



**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ЗАОЧНОЙ
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

**МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ**

Новосибирск, 2011 г.

УДК 004+51
ББК 22.1+32.81
М 33

М 33 «Математика и информационные технологии в современном мире»: материалы международной заочной научно-практической конференции. (20 декабря 2011 г.) — Новосибирск: Изд. «Сибирская ассоциация консультантов», 2011. — 90 с.

ISBN 978-5-4379-0039-0

Сборник трудов международной заочной научно-практической конференции «Математика и информационные технологии в современном мире» отражает результаты научных исследований, проведенных представителями различных школ и направлений современной математики и информационных технологий.

Данное издание будет полезно аспирантам, студентам, исследователям и всем интересующимся актуальным состоянием и тенденциями развития математики и информационных технологий.

ББК 22.1+32.81

ISBN 978-5-4379-0039-0

Оглавление

Секция 1. Математика	5
1.1. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление	5
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ, ОПИСЫВАЕМОМ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ Копец Мирослав Михайлович	5
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОТОБРАЖЕНИЯ ОТРЕЗКА К ИЗУЧЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАНИПУЛЯТОРА ФАЗЫ С ФАП Лебедева Лариса Владимировна	18
ОДНА ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА Павлов Геннадий Александрович Абакумова Наталья Александровна	24
1.2. Геометрия и топология	29
МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ВУЗЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ Ганеева Айгуль Рифовна	29
1.3. Дискретная математика и математическая кибернетика	34
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ К КОМПЬЮТЕРНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ФРЕСОК Бердичевский Евсей Григорьевич	34
Секция 2. Информационные технологии	41
2.1. Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами	41
ВНЕДРЕНИЕ НОВЫХ СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ «ОВЕН» В ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС ВЯТГУ Никонов Андрей Владимирович	41

2.2. Системы автоматизации проектирования	48
СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ АРХИТЕКТУРНЫХ ФОРМ	48
Лобанова Екатерина Владимировна Сухарев Евгений Николаевич	
2.3. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ	53
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДОВ РЕФРАКЦИОННЫМ МЕТОДОМ	53
Андросик Андрей Борисович Воробьев Сергей Андреевич Мировицкая Светлана Дмитриевна	
ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И Р- ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕСКРИПТИВНЫХ АЛГЕБР ИЗОБРАЖЕНИЙ	65
Исхаков Алмаз Раилевич Мигранов Наиль Галиханович Кузнецова Елизавета Михайловна Мухаметова Ираида Валерьевна Галанов Вячеслав Александрович	
2.4. Инженерная геометрия и компьютерная графика	77
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНЖЕНЕРНОГО ДИСКРИМИНАНТА В ПРИКЛАДНЫХ РАСЧЕТАХ	77
Попова Людмила Сильвестровна Синицына Ольга Владимировна	
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ВЫСОКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ ПЛОТНОСТИ	84
Базык Елена Владимировна	

СЕКЦИЯ 1.

МАТЕМАТИКА

1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Конец Мирослав Михайлович

канд. физ.-мат. наук, доцент, НТУУ «КПИ», г. Киев, Украина

E-mail: miroslav1941@windowsslive.com

1. Введение

Интерес к исследованию систем дифференциальных уравнений, которые не разрешены относительно старших производных, проявился еще в сороковых годах прошлого столетия. Одной из первых работ в этом направлении является статья академика Н. Н. Лузина [10]. Системы подобного типа рассмотрены также в монографии [8, с. 348]. Однако систематическое изучение этих систем фактически началось в начале восьмидесятых годов прошлого столетия. Значительный рост популярности сингулярных систем объясняется их широким применением для решения большого числа практических задач в технике и экономике, а также и тем обстоятельством, что они обладают рядом особенностей по сравнению с обычными системами дифференциальных уравнений. Особо следует отметить, что очень часто к сингулярным системам приводят задачи, которые рассматриваются в теории оптимального управления. Упомянуть все работы, посвященные данной тематике, не представляется возможным. В первую очередь необходимо указать на монографии [3] — [7], [12], [15] — [20]. В них также можно найти обширные библиографические материалы по рассматриваемой тематике.

Исторически так сложилось, что основное внимание в процессе исследования сингулярных систем было уделено линейным системам со сосредоточенными параметрами, то есть объектам, поведение которых описывается системами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сингулярные системы линейных уравнений с частными производными рассматривались значительно реже. В частности, изучению таких систем посвящена монография [9], а также работы [1], [2]. В них изучаются системы линейных уравнений с частными производными вида

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Bz}(t, x), \quad (1)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — заданные постоянные матрицы размера $n \times n$, $\mathbf{z}(t, x)$ — искомая, $n \times 1$ вектор-функция, причем $\det \mathbf{C} = 0$, то есть матрица \mathbf{C} является вырожденной.

Такие системы называют по-разному: алгебро-дифференциальные системы; вырожденные системы; дифференциально-алгебраические системы; системы не типа Коши-Ковалевской; системы, не разрешенные относительно производных; дескрипторные системы; сингулярные системы; системы с вырождением. Однако независимо от названия всех их объединяет одно общее свойство: матрица \mathbf{C} — вырожденная ($\det \mathbf{C} = 0$). Возможны также случаи, когда обе матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C} — вырожденные. В качестве простого иллюстративного примера, который приводит к сингулярной системе (1), можно рассмотреть телеграфное уравнение [14, с. 215]

$$\frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} + a \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} + bz(t, x). \quad (2)$$

С помощью введения новых переменных

$$\begin{cases} z_1(t, x) = z(t, x) \\ z_2(t, x) = \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} \\ z_3(t, x) = \frac{\partial z(t, x)}{\partial x} \end{cases}$$

Уравнение (2) можно свести к следующей системе трех уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(t,x)}{\partial t} = z_2(t,x), \\ \frac{\partial z_2(t,x)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial z_3(t,x)}{\partial x} + b z_1(t,x) + a z_2(t,x), \\ 0 = \frac{\partial z_1(t,x)}{\partial x} - z_3(t,x), \end{cases}$$

где матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} соответственно равны

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

К сингулярным системам относят также и такие системы вида (1), когда все три матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — прямоугольные матрицы одинакового размера.

2. Постановка задачи оптимального управления

Пусть объект управления описывается следующей системой линейных уравнений с частными производными

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{Bz}(t,x) + \mathbf{Du}(t,x), \quad (3)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — заданные матрицы размера $n \times n$, \mathbf{D} — заданная матрица размера $n \times m$, причем все эти четыре матрицы — постоянные (их элементами являются действительные числа) и $\det \mathbf{C} = 0$. Переменная t ассоциируется со временем, переменная x — пространственная переменная, $\mathbf{z}(t,x)$ — действительный n -мерный вектор-столбец, в дальнейшем называемый *состоянием* системы (3), действительный m -мерный вектор-столбец $\mathbf{u}(t,x)$ называется *управлением*. Предполагается, что управления принадлежат

классу кусочно-непрерывных вектор-функций. Для системы (3) задано начальное условие

$$\mathbf{z}(0, x) = \mathbf{z}_0(x) \quad (4)$$

и нулевые граничные условия

$$\mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}(t, l) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Действительное число $l > 0$ и n -мерный вектор-столбец $\mathbf{z}_0(x)$ заданы. Считаем, что для каждого заданного управления $\mathbf{u}(t, x)$ система уравнений (3) имеет единственное решение, которое удовлетворяет условиям (4) и (5).

Рассмотрим следующий критерий оптимальности

$$I(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \mathbf{u}(t, x) \right] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} \mathbf{z}(T, x) dx, \quad (6)$$

где $\mathbf{z}^* \mathbf{u} = \langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle$ означает скалярное произведение векторов \mathbf{Z} и \mathbf{u} , то есть $\mathbf{z}^* \mathbf{u} = \langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^n z_i u_i$, \mathbf{G} — заданная симметричная положительно

определенная матрица размера $m \times m$ (следовательно, существует матрица \mathbf{G}^{-1}), \mathbf{F} также известная симметричная положительно определенная матрица размера $n \times n$, $T > 0$ — заданное действительное число. *Задача оптимального управления объектом, описываемым системой соотношений (3) — (5), состоит в определении такого управления $\mathbf{u}^0(t, x)$, при котором функционал (6) принимает наименьшее значение. При этом управление $\mathbf{u}^0(t, x)$ называется оптимальным управлением.*

3. Вывод уравнений Эйлера — Лагранжа

Как правило, для нахождения решения задач оптимального управления системами как и со сосредоточенными параметрами, так и с распределенными параметрами, используется принцип максимума Л. С. Понтрягина [13, с. 183] или метод динамического

программирования Беллмана [11, с. 291]. Оба этих метода предполагают, что система дифференциальных уравнений, которая описывает поведение объекта управления, разрешена относительно производных по времени. В случае сингулярных систем такой возможности нет. Однако можно воспользоваться *методом множителей Лагранжа* [13, с. 31]. Сущность метода состоит в том, что вместо функционала (6) рассматривается следующий функционал

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{z}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = & \int_0^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \mathbf{u}(t, x)] + \right. \\
 & \left. + \mathbf{p}^*(x, t) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(x, t)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{z}(x, t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(x, t) - \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(x, t)}{\partial t} \right] \right\} dx dt + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{M} \mathbf{z}(t, x) dx, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{p}(t, x)$ — неизвестная $n \times 1$ вектор-функция. Очевидно, что при выполнении соотношения (3) значения функционалов (6) и (7) совпадают. Поэтому задача на условный экстремум для функционала (6) сводится к задаче на безусловный экстремум для функционала (7). Далее находим выражение для приращения функционала (7).

$$\Delta J = J(\mathbf{z} + \varepsilon \delta \mathbf{z}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \varepsilon \delta \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x} + \varepsilon \delta \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}, \mathbf{p} + \varepsilon \delta \mathbf{p}, \mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) - J(\mathbf{z}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}).$$

Очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta J = & \int_0^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left[[\mathbf{z}^*(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}^*(t, x)] \mathbf{F} [\mathbf{z}(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}(t, x)] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + [\mathbf{u}^*(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{u}^*(t, x)] \mathbf{G} [\mathbf{u}(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{u}(t, x)] \right] + \right. \\
 & \left. + [\mathbf{p}^*(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{p}^*(t, x)] \left[\mathbf{A} \left(\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} \right) + \mathbf{B} [\mathbf{z}(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}(t, x)] \right] \right\} dx dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mathbf{D}[\mathbf{u}(t,x)+\varepsilon\delta\mathbf{u}(t,x)]-\mathbf{C}\left(\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right)\Bigg\}dxdt+ \\
& +\frac{1}{2}\int_0^l[\mathbf{z}^*(T,x)+\varepsilon\delta\mathbf{z}^*(T,x)]\mathbf{M}[\mathbf{z}(T,x)+\varepsilon\delta\mathbf{z}(T,x)]dx \\
& -\int_0^l\int_0^T\left\{\frac{1}{2}[\mathbf{z}^*(t,x)\mathbf{F}\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{u}^*(t,x)\mathbf{G}\mathbf{u}(t,x)]+\right. \\
& \left.+\mathbf{p}^*(x,t)\left[\mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{z}(x,t)}{\partial x}+\mathbf{B}\mathbf{z}(x,t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(x,t)-\mathbf{C}\frac{\partial\mathbf{z}(x,t)}{\partial t}\right]\right\}dxdt- \\
& -\frac{1}{2}\int_0^l\mathbf{z}^*(t,x)\mathbf{M}\mathbf{z}(t,x)dx= \\
& =\varepsilon\left\{\int_0^T\int_0^l\left\{\frac{1}{2}[\delta\mathbf{z}^*(t,x)\mathbf{F}\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{z}^*(t,x)\mathbf{F}\delta\mathbf{z}(t,x)+\right.\right. \\
& \left.+\delta\mathbf{u}^*(t,x)\mathbf{G}\mathbf{u}(t,x)+\mathbf{u}^*(t,x)\mathbf{G}\delta\mathbf{u}(t,x)]+\right. \\
& \left.+\mathbf{p}^*(t,x)\left[\mathbf{A}\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}+\mathbf{B}\delta\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{D}\delta\mathbf{u}(t,x)-\mathbf{C}\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right]\right\}+ \\
& +\delta\mathbf{p}^*(t,x)\left[\mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}+\mathbf{B}\mathbf{z}(t,x)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t,x)-\mathbf{C}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}\right]dxdt\Bigg\}+ \\
& +\frac{1}{2}\int_0^l[\mathbf{z}^*(T,x)\mathbf{M}\delta\mathbf{z}(T,x)+\delta\mathbf{z}^*(T,x)\mathbf{M}\mathbf{z}(T,x)]dx\Bigg\}+.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon^2 \left\{ \int_0^T \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left[\delta \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \delta \mathbf{z}(t, x) + \delta \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \delta \mathbf{u}(t, x) \right] \right. \right. \\
& + \delta \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D} \delta \mathbf{u}(t, x) - \mathbf{C} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \left. \right\} dx dt + \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_0^l \delta \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} \delta \mathbf{z}(T, x) dx \right\}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\delta \mathbf{z}(0, x) = \mathbf{z}_0(x) - \mathbf{z}_0(x) = \mathbf{0}$, $\delta \mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{0}$,

$\delta \mathbf{z}(t, l) = \mathbf{0}$. после очевидных преобразований (интегрирования по

частям и приведения подобных членов) получим

$$\begin{aligned}
\Delta J = \varepsilon \left\{ \int_0^T \int_0^l \left[\left[\frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} - \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} + \mathbf{p}^*(t, x) \mathbf{B} + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \right] \delta \mathbf{z}(t, x) + \right. \right. \\
& \left. + \left[\mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} - \mathbf{p}^*(t, x) \mathbf{D} \right] \delta \mathbf{u}(t, x) + \right. \\
& \left. + \delta \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t, x) - \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] dx dt \right\} + \\
& \left. + \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} + \mathbf{p}^*(T, x) \mathbf{C} \right] \delta \mathbf{z}(T, x) dx \right\} + \\
& + \varepsilon^2 \left\{ \int_0^T \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left[\delta \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \delta \mathbf{z}(t, x) + \delta \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \delta \mathbf{u}(t, x) \right] \right. \right. \\
& + \delta \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D} \delta \mathbf{u}(t, x) - \mathbf{C} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \left. \right\} dx dt + \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_0^l \delta \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} \delta \mathbf{z}(T, x) dx \right\}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Полученное выражение для ΔJ дает возможность сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. Единственное оптимальное управление $\mathbf{u}^0(t, x)$, которое реализует минимум функционала (6), определяется из соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Bz}(t, x) + \mathbf{Du}(t, x), \\ \mathbf{z}(0, x) = \mathbf{z}_0(x), \mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{z}(t, l) = 0, \\ \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}^* \mathbf{p}(t, x) - \mathbf{Fz}(t, x), \\ \mathbf{C}^* \mathbf{p}(T, x) = \mathbf{Mz}(T, x), \mathbf{p}(t, 0) = \mathbf{p}(t, l) = 0, \\ \mathbf{Gu}(x, t) + \mathbf{D}^* \mathbf{p}(x, t) = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (9)$$

где символ \mathbf{A}^* обозначает транспонированную матрицу \mathbf{A} . Аналогично обозначаются транспонированные матрицы \mathbf{B} и \mathbf{C} .

Доказательство. Коэффициент при \mathcal{E} в соотношении (8) — это первая вариация функционала (7), при \mathcal{E}^2 — его вторая вариация, умноженная на $0,5$. Необходимое условие экстремума функционала (7) — равенство нулю его первой вариации. Это возможно, когда выражения при $\delta \mathbf{z}(t, x)$, $\delta \mathbf{z}(T, x)$, $\delta \mathbf{p}^*(x, t)$, $\delta \mathbf{u}(x, t)$ равны нулю одновременно. Таким образом получаем систему уравнений (9). Эта система уравнений называется уравнениями Эйлера-Лагранжа. Поскольку справедливо равенство

$$\mathbf{C} \left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] = \mathbf{A} \left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} \right] + \\ + \mathbf{B} [\mathbf{z}(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}(t, x)] + \mathbf{D} [\mathbf{u}(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{u}(t, x)],$$

то, принимая во внимание соотношение (3), приходим к такому равенству

$$\mathbf{C} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D} \delta \mathbf{u}(t, x).$$

Это означает, что вторая вариация функционала (7) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & \int_0^T \int_0^l \left[\delta \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \delta \mathbf{z}(t, x) + \delta \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \delta \mathbf{u}(t, x) \right] dx dt + \\ & + \int_0^l \delta \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} \delta \mathbf{z}(T, x) dx \end{aligned}$$

С учетом положительной определенности матриц \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{M} , имеем $\delta^2 J > 0$. Это означает, что управление $\mathbf{u}(t, x)$ реализует минимум функционала (7), а значит, и функционала (6). Доказательство единственности оптимального управления следует из таких рассуждений. Предположим, что существует управление $\bar{\mathbf{u}}(t, x) = \mathbf{u}(t, x) + \delta \mathbf{u}(t, x)$, на котором также реализуется минимум функционала (7). Тогда приращение (8) равно нулю. Поскольку в этом случае $\delta J = 0$, то тогда также и $\delta^2 J = 0$. Такое равенство возможно в том случае, когда $\delta \mathbf{u}(t, x) = 0$ и $\delta \mathbf{z}(t, x) = 0$. Отсюда следует, что $\bar{\mathbf{u}}(t, x) = \mathbf{u}(t, x)$.

4. Вывод дифференциального уравнения Риккати

Из третьего уравнения этой системы уравнений (9) выражаем $\mathbf{u}(x, t)$ через $\mathbf{p}(x, t)$ ($\mathbf{u}(x, t) = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{p}(x, t)$) и подставляем в первое уравнение. Получим двухточечную краевую задачу для двух уравнений с частными производными относительно вектор-функций $\mathbf{z}(x, t)$ и $\mathbf{p}(x, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Bz}(t, x) - \mathbf{DG}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{p}(t, x), \\ \mathbf{z}(0, x) = \mathbf{z}_0(x), \mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{z}(t, l) = 0, \\ \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}^* \mathbf{p}(t, x) - \mathbf{Fz}(t, x), \\ \mathbf{C}^* \mathbf{p}(T, x) = \mathbf{Mz}(T, x), \mathbf{p}(t, 0) = \mathbf{p}(t, l) = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Решение последней задачи ищем в следующем виде

$$\mathbf{p}(t, x) = \mathbf{R}(t, x) \mathbf{Cz}(t, x), \quad (11)$$

где $\mathbf{R}(t, x)$ — неизвестная матричнозначная функция.

Дифференцируя равенство (11) сначала по переменной t , потом по переменной x , получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Cz}(t, x) + \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Cz}(t, x) + \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (12)$$

Дальше, учитывая первое уравнение из системы (10) и соотношение (11), приходим к такому равенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Cz}(t, x) + \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \\ &+ \mathbf{R}(t, x) \mathbf{Bz}(t, x) - \mathbf{R}(t, x) \mathbf{DG}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{Cz}(t, x). \end{aligned}$$

После умножения этого соотношения слева на матрицу \mathbf{C}^* окончательно имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} &= \left[\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \right. \\ &\left. - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{DG}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \right] \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x}. \quad (13) \end{aligned}$$

С другой стороны, на основании (10), (11) и (12) подобным образом находим

$$\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} = \left[\mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{F} \right] \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x}. \quad (14)$$

В соотношениях (13) и (14) левые стороны одинаковы. Следовательно, правые стороны также должны быть равными. В результате имеем следующее равенство

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \right] \mathbf{z}(t, x) = \\ & = \left[\mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{F} \right] \mathbf{z}(t, x) + \left[\mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A} \right] \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Оно возможно, если выполняются два следующих соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} &= \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \\ & - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}. \quad (16)$$

Обычно для систем со сосредоточенными параметрами уравнение типа (15) известно под названием: *матричное дифференциальное уравнение Риккати*. В нашем случае имеем *матричное дифференциальное уравнение Риккати с частными производными*. Кроме того, появляется еще и уравнение (16). Оно не является тривиальным. Действительно, в случае, когда $\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{A} = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} — единичная матрица, то далеко не всегда справедливо равенство $\mathbf{C} = \mathbf{C}^*$. Далее, принимая во внимание соотношения

$$\mathbf{C}^* \mathbf{R}(T, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(T, x) = \mathbf{M} \mathbf{z}(T, x), \quad \mathbf{p}(t, 0) = \mathbf{p}(t, l) = 0,$$

получаем следующие дополнительные условия для $\mathbf{R}(t, x)$:

$$\mathbf{C}^* \mathbf{R}(T, x) \mathbf{C} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{R}(t, 0) = \mathbf{R}(t, l) = 0. \quad (17)$$

На основании предыдущих рассуждений приходим к следующему выводу.

Теорема 2. Оптимальное управление $\mathbf{u}^0(x, t)$ линейно зависит от состояния $\mathbf{z}(x, t)$, то есть справедливо равенство $\mathbf{u}^0(x, t) = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}(x, t)\mathbf{Cz}(x, t)$, где матричнозначная функция $\mathbf{R}(t, x)$ является решением уравнений (15) и (16), а также удовлетворяет краевым условиям (17).

Список литературы:

1. Бормотова О. В., Чистяков В. Ф. В. О методах численного решения и исследования систем не типа Коши-Ковалевской. // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2004. — Т. 44, № 8. — С. 1380 — 1387.
2. Бормотова О. В., Гайдомак С. В., Чистяков В. Ф. В. О разрешимости вырожденных систем дифференциальных уравнений в частных производных. // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 4 (515). — С. 18 — 29.
3. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980. — 222 с.
4. Бояринцев Ю. Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1988. — 158 с.
5. Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. — Новосибирск: Наука, 2000. — 223 с.
6. Бояринцев Ю. Е., Орлова И. В. Пучки матриц и алгебро — дифференциальные системы. — Новосибирск: Наука, 2006. — 124 с.
7. Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
9. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, — 1998. — 436 с.
10. Лузин Н. Н. К изучению матричной системы теории дифференциальных уравнений.// Автоматика и телемеханика. — 1940. — № 5. — с. 4-66.
11. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. — 480 с.
12. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища школа, 2000. — 204 с.
13. Сиратетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. — 480 с.

14. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 384 с.
15. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.
16. Ascher R., Petzold L. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. — USA, Philadelphia, 1998. — 314 p.
17. Campbell S. L. Singular system of differential equations. Research Notes in Math., No 40. — San Francisco: Pitman, 1980. — 176 p.
18. Campbell S. L. Singular system of differential equations. II. Research Notes in Math., No 61. — San Francisco: Pitman, 1982. — 234 p.
19. Dai L. Singular control systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, No 118. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer Verlag, 1989. — 332 p.
20. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. Printed in Germany, 2006. — 377 p.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОТОБРАЖЕНИЯ ОТРЕЗКА К ИЗУЧЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАНИПУЛЯТОРА ФАЗЫ С ФАП

Лебедева Лариса Владимировна

канд. физ.-мат. наук, доцент ВГАВТ, г. Н. Новгород

E-mail: Anoshina51@mail.ru

Существует ряд систем фазовой синхронизации (СФС), содержащих временной такт работы, математическая модель которых может быть представлена в виде разностного уравнения, например,

$$\bar{\varphi} = F(\varphi) \quad (1)$$

К таким системам относятся, в частности, одноконтурные системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ФАП) с элементом типа «выборка-запоминание» [9, с. 63]; [1, с. 161]; [2, с. 771], ФАП с ключом с фиксирующим элементом [11, с. 21], Развитая теория отображений окружности и отрезка [7, с. 215]; [8, с. 32]; [10, с. 61]; [11, с. 289]; [12, с. 21] позволяет установить основные динамические свойства таких СФС. В настоящей работе представлены результаты изучения особенностей поведения, так называемого, манипулятора фазы с ФАП [3, с. 46]; [4, с. 56]. На основе известных дифференциальных уравнений, описывающих работу этой системы, получена математическая модель в виде разностных уравнений и проведен анализ динамических свойств системы.

Математическая модель

В качестве манипулятора фазы рассматривается система ФАП, дополненная вторым фазовым детектором (ФД), фазовращателями и коммутатором. Блок-схема такого манипулятора изображена на рис. 1. Сигнал от источника колебаний 1 (эталонного генератора) разветвляется на два идентичных коммутируемых канала 4 и 5. В соответствии с передаваемой информацией коммутатор 6 попеременно подключает вход управителя частоты 7 (и подстраиваемого генератора 8) к выходам фазовых детекторов 4 и 5. При этом замыкается либо кольцо ФАП с фазовращателем 2 (+ $\Psi/2$), либо кольцо с фазовращателем 3 (- $\Psi/2$). После окончания переходного процесса в кольце ФАП фаза ПГ изменится либо на угол + $\Psi/2$, либо на угол - $\Psi/2$, т. е. на угол, создаваемый фиксированными фазовращателями на входе системы в цепи эталонного сигнала. Следовательно, любая

желаемая глубина манипуляции $0^\circ < \Psi < 180^\circ$ достигается выбором соответствующих фазовых сдвигов в фазовращателях 2 и 3. Период коммутации T считается постоянным. При упрощающем предположении об отсутствии фильтра нижних частот работа такого манипулятора фазы описывается [3, с. 46]; [4, с. 56] системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{dx}{dt} + g(x) = \gamma, & t_k < t < t_k + h \\ \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{dx}{dt} + g(x + \Psi) = \gamma, & t_k + h < t < t_{k+1} = t_k + T \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $x = x_{\text{ПГ}} - x_{\text{ЭГ}}$ текущая разность фаз генераторов, Ω — полоса синхронизма, $\gamma = (\omega_{\text{пр}} - \omega_{\text{ЭГ}}) / \Omega$ — нормированная начальная расстройка. Принято считать, что фазовые детекторы 4 и 5 обладают одинаковыми нормированными характеристиками $g(x)$. На основе решений системы (2) получим разностное уравнение, описывающее работу манипулятора фазы. Во втором уравнении сделаем замену $x + \Psi = \theta$ (так как $\Psi = \text{const}$, то $\dot{x} = \dot{\theta}$): $\frac{1}{\Omega} \cdot \frac{dx}{dt} + g(\theta) = \gamma$. Пусть решение первого уравнения есть функция $x(t) = \Phi(t, x, \gamma)$, тогда решением второго является функция $\theta(t) = \Phi(t, \theta, \gamma)$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ значение функции $x(0) \equiv x_0$, тогда значения функций в момент $t = h$ определяются как $x(h) = \Phi(h, x_0, \gamma) \equiv x_{\text{посл}}$ и $\theta_{\text{посл}} = x_{\text{посл}} + \Psi = \Phi(h, x_0, \gamma) + \Psi$, а в конце периода при $t = T$ имеют вид $x(T) = \theta - \Psi = \Phi(h, \theta_{\text{посл}} = x_{\text{посл}} + \Psi, \gamma) - \Psi$. Следовательно, работа манипулятора фазы описывается разностным уравнением: $\bar{x} = \Phi(h, \Phi(h, x, \gamma) + \Psi, \gamma) - \Psi \equiv f(x)$, где функция $\Phi(t, x, \gamma)$ есть решение уравнения $\frac{1}{\Omega} \cdot \frac{dx}{dt} + g(x) = \gamma$, а величины h, γ являются параметрами.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, предположив, что характеристика фазового детектора косинусоидальна, т. е. $g(x) = \cos x$. Тогда первое уравнение примет

вид: $\frac{1}{\Omega} \cdot \frac{dx}{dt} + \cos(x) = \gamma$. Заменяем x на $x - \pi/2$ и запишем первое

уравнение в виде $\frac{dx}{\gamma - \sin x} = \Omega \cdot dt$. С учетом начального условия

$x(0) = x_0$ его решение можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega t + \gamma_2 \ln\left(1 - \frac{\gamma_4}{\gamma \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} - \gamma_3}\right) = \gamma_2 \ln\left(1 - \frac{\gamma_4}{\gamma \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \gamma_3}\right), \quad \text{если } |\gamma| < 1 \\ \Omega t + 2\gamma_6 \operatorname{arctg}\left(\gamma_6 \left(\gamma \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} - 1\right)\right) = 2\gamma_6 \operatorname{arctg}\left(\gamma_6 \left(\gamma \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right)\right), \quad \text{если } |\gamma| > 1 \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь $\gamma_1 = \sqrt{1 - \gamma^2}$, $\gamma_2 = 1/\gamma_1$, $\gamma_3 = 1 - \gamma_1$, $\gamma_4 = 2\gamma_1$,
 $\gamma_1 = \sqrt{1 - \gamma^2}$, $\gamma_2 = 1/\gamma_1$. Найдём явное выражение для функции $x(t)$.

Рассмотрим случай $|\gamma| < 1$. Введём новую переменную $z = e^{\Omega \gamma_1 t}$, т. е. $\Omega \cdot t = \ln z \cdot \gamma_1$, первое равенство соотношений (3)

запишем в виде: $z \cdot \left(1 - \frac{\gamma_4}{\gamma \operatorname{tg}(x_0/2) - \gamma_3}\right) = 1 - \frac{\gamma_4}{\gamma \operatorname{tg}(x/2) - \gamma_3}$
, т. е. $x = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\gamma} \left(\gamma_3 + \frac{\gamma_4}{1 - z \cdot \left(1 - \frac{\gamma_4}{\gamma \operatorname{tg}(x_0/2) - \gamma_3}\right)}\right)\right)$. Получили,

что для случая $|\gamma| < 1$ искомое отображение имеет вид:

$$\bar{x} = \Phi_1(h, \Phi_1(h, x, \gamma) + \Psi, \gamma) - \Psi \equiv f(h, x, \gamma) \quad (4)$$

где $\Phi_1(h, x, \gamma) = 2 \cdot \operatorname{arctg}\Phi_1^0(h, x, \gamma)$,

$\Phi_1^0(h, x, \gamma) = (1 - \gamma_1 + \gamma_1/c_2)/\gamma$, $c_3 = \gamma \operatorname{tg}(x/2) - \gamma_3$,

$c_2 = 1 - z + 2z\gamma_1/c_3$.

Рассмотрим случай $|\gamma| > 1$. Пусть $z_1 = \operatorname{tg}(\Omega t \gamma_5 / 2)$, т. е.

$\Omega \cdot t = 2 \cdot \gamma_6 \cdot \operatorname{arctg} z_1$. Сокращая второе уравнение системы (3) на общий множитель, получаем

$$\operatorname{arctg} z_1 + \operatorname{arctg}(\gamma_6(\gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} - 1)) = \operatorname{arctg}(\gamma_6(\gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1)).$$

Возьмем тангенс от обеих частей:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z_1 + \operatorname{arctg}(\gamma_6(\gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} - 1))) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\gamma_6(\gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1)))$$

После преобразований получаем

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma_5}{z_1} \cdot \left(1 + \frac{(z_1^2 + 1) \cdot \gamma_5}{z_1 \cdot \gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} - z_1 - \gamma_5} \right) \right) \equiv \Phi_2^0(h, x, \gamma),$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma_5}{z_1} \cdot \left(1 + \frac{(z_1^2 + 1) \cdot \gamma_5}{z_1 \cdot \gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} - z_1 - \gamma_5} \right) \right) \right) = 2 \operatorname{arctg} \Phi_2^0(h, x, \gamma) \equiv \Phi_2(h, x, \gamma)$$

Искомое отображение при $|\gamma| > 1$ имеет вид:

$$\bar{x} = \Phi_2(h, \Phi_2(h, x, \gamma) + \Psi, \gamma) - \Psi \equiv f(h, x, \gamma) \quad (5)$$

Динамические свойства манипулятора фазы.

Как известно [7, с. 215]; [8, с. 32]; [12, с. 21]; [2, с. 771], динамическое поведение системы, описанной отображением (1), зависит, прежде всего, от того является отображение гомеоморфизмом (т. е. отображение взаимно однозначно) или эндоморфизмом. Под траекторией отображения F понимается [2, с. 771] последовательность точек $\varphi_0, \varphi_1 = F(\varphi_0), \varphi_2 = F(\varphi_1) = F^2(\varphi_0), \dots$ Назовем траекторию отображения q/p -циклом, если $\varphi_{n+p} = \varphi_n + 2\pi q$, но ни для какого $0 < i < p$ равенство $\varphi_{n+i} = \varphi_n + 2\pi q$ не выполняется (предполагается, что p — любое натуральное, а q — любое целое числа). q/p -циклы при $q \neq 0$ соответствуют вращательным, а при $q = 0$ — колебательным движениям. Задача исследования сводится к изучению q/p -зон —

областей параметров, при которых существуют устойчивые q/p — циклы.

Установим, являются ли отображения (4) и (5) гомеоморфизмами или эндоморфизмами. Учитывая, что величины C_1 и Z положительны, получаем $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{2}{1 + (\Phi_1^0)^2} \cdot \frac{-2c_1}{(c_2)^2} \cdot \frac{-2c_1 \Psi}{(c_3)^2} \cdot \frac{\gamma}{(\cos x)^2} > 0$ для всех $\gamma > 0$ и x . Т. е. при всех значениях x имеет место соотношение

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=x_{\text{посл}}} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=x_0} > 0. \text{ Доказана}$$

ЛЕММА 1. При $|\gamma| < 1$ работа системы (1) описывается уравнением (4). Для всех x имеет место равенство

$$\text{sgn} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \text{sgn} \gamma, \text{ где } \text{sgn} \gamma = \begin{cases} +1, & \gamma > 0 \\ 0, & \gamma = 0 \\ -1, & \gamma < 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим случай $|\gamma| > 1$. Введем обозначения

$c_1 = (1 - \sqrt{\gamma^2 - 1}/z)/\gamma$, $c_2 = (\gamma^2 - 1)(z^2 + 1)$, $c_3 = -z - \sqrt{\gamma^2 - 1}$ и рассмотрим производную $\partial \Phi_2 / \partial x$. Имеем:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{2}{1 + (\Phi_2^0)^2} \cdot \left(c_1 - \frac{c_2}{z \cdot \gamma \cdot \text{tg} \frac{x_0}{2} + c_3} \right)' =$$

$$\frac{2}{1 + (\Phi_2^0)^2} \cdot \frac{c_2 \gamma z}{\gamma z (z \cdot \gamma \cdot \text{tg} \frac{x_0}{2} + c_3)^2 \cdot \cos^2 \frac{x_0}{2}}, \text{ т. е. } \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} > 0$$

для всех значений x_0, γ, t . Доказана

ЛЕММА 2. При $|\gamma| > 1$ работа манипулятора фазы описывается разностным уравнением (5). Для всех x справедливо неравенство $\partial f / \partial x > 0$.

Из лемм 1 и 2 получаем следующие утверждения. Отображения (4) и (5) являются гомеоморфизмами. К ним применима теория Майера [7, с. 215] и теория числа вращения [8, с. 32]. Отображения могут иметь колебательные неподвижные точки периода один ($q/p = 0/1$) или два $q/p = 0/2$ и вращательные неподвижные точки любого периода, причем q/p -зоны с разными числами q/p не пересекаются. Это означает, что манипулятор фазы может работать в режиме синхронизма (возможен режим с глобальной асимптотической устойчивостью синхронизма), квазисинхронизма, подстройки под комбинационную частоту, режиме ложного захвата и режиме биений. Особенностью такой системы является достаточно простая структура колебательного притягивающего множества, определяющего характеристики стационарного режима квазисинхронизма.

Список литературы:

1. Белых В. Н. Модели дискретных СФС и их исследование. — В кн. Системы фазовой синхронизации/ Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982, с. 161-162
2. Белых В. Н., Лебедева Л. В. Исследование одного отображения окружности. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 771-776
3. Капранов М. В., Рихтер С. Г. Фазовая автоподстройка частоты в режиме манипуляции фазы. — В сб докладов научно-техн. конф. по итогам научно-исследовательских работ за 1966—1967 гг. в МЭИ, М. 1967, с. 46—52
4. Капранов М. В., Рихтер С. Г. Высокоскоростной режим манипулятора фазы с системой ФАП — В сб докладов научно-техн. конф. по итогам научно-исследовательских работ за 1966—1967 гг. в МЭИ, М. 1967, с. 56—62
5. Лебедева Л. В. О динамике дискретных одномерных систем фазовой синхронизации. Респ.сб. «Теоретическая радиотехника», Львов, 1986, с. 46-49
6. Лебедева Л. В. Определение наличия периодической траектории унимодального отображения отрезка / Межвуз. сб. «Математическое моделирование и оптимизация», Н. Новгород, ННГУ, 1996, с. 31-38
7. Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность. — Ученые записки ГГУ, 1939, вып. 12, с. 215-226
8. Нитецки Э. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир. 1975, 304 с.
9. Системы фазовой синхронизации с элементами дискретизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна М.: Радио и связь, 1989

10. Шарковский А. Н. Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя. УМЖ, 1964, т. 16, №1, с. 61-72
11. Шахгильдян В. В., Петров В. А. Анализ работы системы синхронизации 1 порядка с ключом. — В кн. Фазовая синхронизация / Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Связь, 1975, с. 289-294
12. Collet P. and Eckmann J.—P. Iterated Maps on the Interval. Dynamical Systems. Basel. Birkhauser. 1980
13. R. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature. Vol.251, June.10, 1976

ОДНА ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Павлов Геннадий Александрович

канд. физ.-мат. наук, доцент, АГАУ, г. Барнаул

Абакумова Наталья Александровна

канд. социол. наук, АГАУ, г. Барнаул

E-mail: aba78@mail.ru

В плоском случае рассматривается задача определения правой части уравнения Пуассона. Приведены примеры неединственности решения задачи, а также теоремы существования решения. В случае уравнения Гельмгольца подобная задача рассматривалась в работах [1, 2] а также в монографии [3, с. 651, с. 675, с. 676].

Пусть $T \subset R^2$, $T \in C^{1,\lambda}$ (за исключением быть может отдельных точек).

$$\Delta U(x, y) = f(x, y) \varphi(x), (x, y) \in T. \quad (1)$$

Поставим задачу определения функции φ , если выполнены условия

$$U/\partial T = \psi, \quad U/\gamma = k, \quad (2)$$

где $\gamma \subset T$ кривая $y = \theta(x)$, $a \leq x \leq b$, причем $[a, b]$ есть проекция T на ось x , $f \in C^\lambda(T)$, ∂T — граница T .

Вначале покажем, что задача имеет, вообще говоря, неединственное решение. Легко проверить, что если функция f

знакопеременная, то решение задачи определяется неединственным образом.

Пример 1. Пусть $T = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, $|a| \leq 1$,

$$f(y) = (a + 2\sin(y - \arcsina)),$$

U удовлетворяет уравнению (1), условиям (2), $\psi = k = 0$, γ — прямая $y = \pi + 2\arcsina$.

Тогда наряду $\varphi = 0$ данному уравнению удовлетворяет $\varphi(x) = \sin x$ (решение $U = -\sin x (a + \sin(y - \arcsina))$).

Итак, условие $f(x, y) > 0$ является в некотором смысле необходимым условием. Заметим, что если вместо условия $U/\gamma = 0$ будем рассматривать условие: нормальное производное на ней равно нулю, то условие $f(x, y) > 0$ уже не будет достаточным.

Пример 2. $T = [0, \pi] \times [\pi/3, 2\pi/3]$, $f(y) = \sin y - 1/4$,

$$U/\partial T = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=\pi/2} = 0.$$

Здесь наряду с $\varphi = 0$, задаче удовлетворяет $\varphi(x) = \sin x$ (решение $U = (1/2 - \sin y) \sin x/2$).

Следующий пример, хотя и не относится к уравнению Пуассона, но по видимому, подстергает нас, что условие $f(x, y) > 0$ явно является недостаточным для однозначного определения $\varphi(x)$.

Пример 3. Пусть $\Delta U(x, y) + \lambda U(x, y) = (2 + \sin y) \varphi(x)$, где $5/3 \leq \lambda < 2$ или $2 < \lambda \leq 3$ произвольное число.

$$T = [0, \pi] \times \left[\arcsin\left(\frac{2(2-\lambda)}{\lambda-1}\right), 2\pi + \arcsin\left(\frac{2(2-\lambda)}{\lambda-1}\right) \right],$$

$$U/\partial T = \left. U \right|_{y=\pi+\arcsin\left(\frac{2(2-\lambda)}{\lambda-1}\right)} = 0.$$

Здесь наряду с $\varphi = 0$ есть решение $\varphi = \sin x$ (решение

$$U(x, y) = -2\sin x / ((\lambda - 1) + \sin x \frac{\sin y}{\lambda - 2})).$$

В примере 3 наиболее интересный случай, когда λ не является собственным значением оператора Лапласа Δ . Интересно рассмотреть случай $\lambda = 2$. Перейдем к изучению задачи. Отметим вначале, что если

$U(x, y)$ (заданная функция) достаточно гладкая, то заменой переменной $U(x, y) = f(x, y)v(x, y)$ уравнение (1) можно свести к эллиптическому уравнению второго порядка с коэффициентами зависящими от x, y , где в правой части будет стоять уже функция $f(x, y) = 1$ задача определения правой части φ будет неединственная. Заметим, что уравнение в этом случае может быть записано в виде

$$\Delta v + k_1(x, y)v_x + k(x, y)v_y + \left(\frac{\Delta f(x, y)}{f(x, y)}\right)v = \varphi(x).$$

И для того, чтобы для этого уравнения соблюдался принцип максимума, необходимо, в случае $f > 0$, чтобы f была супергармонической функцией.

В связи с этим, возникает гипотеза, если $f > 0$ супергармоническая функция, то задача определения φ , возможно, не может иметь больше одного решения.

Выпишем эллиптическое уравнение общего вида, с достаточно гладкими коэффициентами, для которого справедлив принцип максимума, где задача определения правой части $\varphi(x)$ с $f = 1$ имеет не более одного решения. В общем в виде:

$$\begin{aligned} a_1(x, y)U_{yy} + a_2(x, y)U_{xy} + a_3(x)U_{xx} + b_1(x, y)U_y + \\ + b_2(x)U_x + c(x)U = \varphi(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, в этом случае решение можно записать в виде

$$U(x, y) = \Phi(x) + h(x, y), \quad (4)$$

где h — решение однородного уравнения, а Φ удовлетворяет для $x \in [a, b]$ уравнению

$$\begin{aligned} a_3(x)\Phi'' + b_2(x)\Phi' + c(x)\Phi = \varphi(x), \\ \Phi(a) = \Phi'(a) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда $h(a, y) = 0$, $(a, y) \in \partial T$ и кроме того

$$h(x, y)|_{\partial T} = h(x, y)|_{\gamma} = -\Phi(x),$$

то есть функция h достигает максимума (минимума) и на γ и он очевидно, если $h(x, y) \not\equiv 0$ больше нуля, откуда получаем противоречие.

Рассмотрим теперь уравнение (1) с $f = 1$, $T \in C^{2,\lambda}$ и покажем, что решение задачи существует (задача нахождения φ). Не теряя общности, можно считать $\psi = 0$.

Предположим, что $\theta \in C^{2,\lambda}$, $k \in C^{2,\lambda}$, $T \in C^{2,\lambda}$.

Лемма. Существует единственное решение задачи правой части $\varphi \in C^\lambda[a, b]$, при этом обратное отображение $(0, k) \rightarrow \varphi$ является ограниченным оператором из $C^{2,\lambda} \rightarrow C^\lambda$.

Замечание 1. Решение задачи можно искать в другом виде. Заметим, что так как $U(x, y) = 0$, $(x, y) \in \partial T$, то

$$U(x, y) = \int_T \varphi(\tau) \mathcal{G}(x, y, \tau, v) d\tau dv.$$

Откуда для нахождения $\varphi(x)$ получаем уравнение, эквивалентное задаче

$$\int_T \varphi(\tau) \mathcal{G}(x, \theta(x), \tau, v) d\tau dv = k(x).$$

Из леммы вытекает, что существует ограниченный оператор из $C^{2,\lambda} \rightarrow C^\lambda$ такой, что $\varphi(x) = \mathcal{P}_k(x)$.

Рассмотрим произвольную функцию $p(x)$, $a \leq x \leq b$, $p \in C^\lambda[a, b]$ и обозначим $\delta = |f(x, y) - p(x)|_{C^\lambda(\bar{T})}$, $p(x) \geq a_0 > 0$.

Теорема. Пусть $T \in C^{2,\lambda}$, $f \in C^\lambda(\bar{T})$, $p \in C^\lambda$, $\psi = 0$.

Тогда существует такое число $\delta(T, a_0)$, что для всех $\delta < \delta(T, a_0)$ для любой заданной функции f , найдется единственная функция $\varphi \in C^\lambda[a, b]$, удовлетворяющая условию (1).

Замечание 2. Отметим, что если вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение $\Delta U(x, y) = \Delta(f(x, y)\varphi(x))$, где f — заданная функция, $f(x, y) > 0$, $(x, y) \in \bar{T}$, $f \in C^{2,\lambda}(\bar{T})$, f — супергармоническая функция, то задача определения функции φ при условиях $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ имеет не более одного решения.

В случае $f = 1$, когда $T = [0, a] \times [0, d]$ решение задачи легко получить методом разделения переменных.

Замечание 3. К рассмотренной задаче может быть сведена задача о единственности определения коэффициента $a(x)$ при уравнении

$$\Delta U(x, y) + a(x)U(x, y) = f(x, y).$$

Для этой задачи имеют место аналогичные примеры неоднозначного определения $a(x)$.

Список литературы:

1. Запreeв А. С. Теорема единственности решения плоской обратной задачи для уравнения Гельмгольца // Некорректные математические задачи и проблемы геофизики. — Новосибирск, 1976. — С. 46—63.
2. Запreeв А. С., Цецохо В. А. Обратная задача для уравнения Гельмгольца. — Новосибирск, 1976. — 18 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. Отд-не. ВЦ; № 22).
3. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: изд-во Ин-та математики, 1999. 702 с.

1.2. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ВУЗЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Ганеева Айгуль Рифовна

*канд. пед. наук, и.о. доцента кафедры математического анализа,
алгебры и геометрии филиала КФУ в г. Елабуга
E-mail: ai gul_ganeeva@mail.ru*

В современном мире с каждым днем информационные потоки все больше проникают в различные сферы деятельности. В связи с этим необходимо пересмотреть систему профессиональной подготовки будущих учителей. Уже сейчас школе нужны квалифицированные специалисты с высоким уровнем образованности, способные переключаться с одного вида педагогической деятельности на другой. От современного учителя требуется не только обширные, но и, прежде всего, систематизированные знания и умения [3].

Подготовка будущих учителей в вузе должна быть основана на творческом развитии личности, способности к постоянному самосовершенствованию и саморазвитию.

Информационная культура будущих учителей должна формироваться все годы обучения и не в рамках одного предмета, а в наборе профилирующих курсов.

Студентов необходимо заинтересовать предметом. Базовая подготовка, которую получили студенты в школе очень низкая. Информационные технологии помогут успеть повторить на занятии школьный материал, а потом изучить соответствующую тему вузовской геометрии.

При традиционном чтении лекций и проведении практических занятий по геометрии требуются многочисленные построения, с использованием чертежных инструментов. Это занимает большое количество времени. Используя информационные технологии можно разнообразить занятия по геометрии красочными, анимированными слайдами.

Информационные технологии позволяют рассмотреть все случаи решения той или иной задачи, доказательство теоремы, рассмотреть частный случай и т. д.

Средства мультимедиа способствуют более глубокому и осознанному усвоению изучаемого материала, так как студент, освоив основные понятия на лекции, сможет без труда вернуться к просмотренному материалу для закрепления или повторения его во внеучебное время.

При традиционном обучении геометрии многие студенты испытывают затруднения, цели обучения часто не достигаются, и одной из причин этого, по мнению многих методистов, является преобладание аналитических методов изучения. Психологически обоснованно, что при изучении систематического курса геометрии, целесообразно опираться на наглядно-действенное мышление и практическую деятельность студентов и отдавать предпочтение конструктивному подходу в качестве возможного пути совершенствования преподавания систематического курса геометрии. Средством реализации конструктивного подхода может являться система конструктивных задач, обеспечивающая возможность изучения геометрических преобразований и их применения [2, с. 6].

На занятиях, посвященных изучению геометрических преобразований и его видов преподавателю, как правило, приходится рисовать на доске множество различных фигур и пытаться изобразить процесс их преобразования. Применение PowerPoint в таких случаях экономит время на занятиях, предоставляя анимационные чертежи, повышает наглядность по сравнению со статичной картинкой на доске.

Геометрические преобразования отражают общие закономерности явлений природы. Такие преобразования как осевая, центральная симметрия, параллельный перенос, поворот — есть обобщение наблюдаемых в природе явлений. Понятие движения взято из реальной действительности и является отражением свойств реальных предметов. Благодаря этому изучение геометрических преобразований предполагает возможность широкого использования задач прикладного характера и практического содержания. Применяя данные геометрические преобразования можно создавать необыкновенной красоты орнаменты, эскизы для паркетов.

Очарование красивыми образами помогает убедить школьников в востребованности знания о геометрических преобразованиях плоскости. Кроме того, следует заметить, что для геометрии эта тема важна и интересна сама по себе, не только в связи с ее применением для построения узоров. Так мотивируется необходимость изучения геометрических преобразований в школьном курсе геометрии. Всю красоту природы и прикладной направленности геометрических

преобразований можно продемонстрировать используя информационные технологии [4, с. 220].

В качестве примера рассмотрим поэтапно лекцию по геометрии на тему: «Инверсия». С инверсией студенты впервые встречаются в вузе. Это геометрическое преобразование отличается от других геометрических преобразований. Необходимо наглядно продемонстрировать всю красоту инверсии.

1. После ввода определения инверсии, говорим, что оно является инволютивным преобразованием. Устно на слайдах используя анимацию можно продемонстрировать процесс построения образа точки M при инверсии и прообраза точки M' .

2. Свойства инверсии (рис. 1).

Свойства инверсии

1. Каждая точка окружности инверсии инвариантна в этой инверсии.

Если $M \in \omega$, то $f(M) = M$.

2. Центр O инверсии не имеет образа.

Фигура F *проколота* в точке O или *без точки O* .

3. Прямая проходящая через центр O (проколота в точке O) инверсии инвариантна при этой инверсии f .

4. Инверсия – инволютивное преобразование

$$f(M) = M', f(M') = M$$

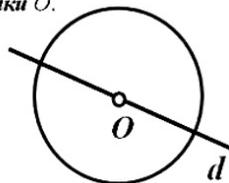
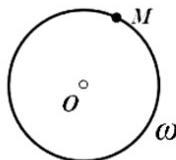


Рисунок 1.

3. Далее на доске проводим вывод формул преобразования инверсии, если базовая окружность имеет центр с координатами $(0;0)$. Сразу после вывода данных формул на слайде можно продемонстрировать формулы преобразования, если центр базовой окружности имеет произвольные значения.

4. Аналитический вывод двух предложений:

1) прямая не проходящая через центр инверсии переходит в окружность, проколотую в точке O ;

2) окружность проколота в точке O , переходит в инверсии в прямую, не проходящую через точку O . На слайдах можно продемонстрировать различные случаи расположения данных прямых и окружностей относительно данной базовой окружности (рис. 2).

Прямая d , не проходящая через центр O инверсии, переходит в окружность γ' , проколотую в точке O . $f_O : d \rightarrow \gamma'$.

Окружность γ' , проколотая в точке O , переходит в инверсии в прямую d . $f_O : \gamma' \rightarrow d$.



Рисунок 2.

5. Аналитический вывод предложения: окружность не проходящая через центр O инверсии переходит в окружность, также не проходящую через точку O . На слайдах можно продемонстрировать различные случаи расположения данной окружности относительно данной базовой окружности (рис. 3).

Окружность γ не проходящая через центр инверсии O , переходит при инверсии в окружность γ' , не проходящую через точку O .

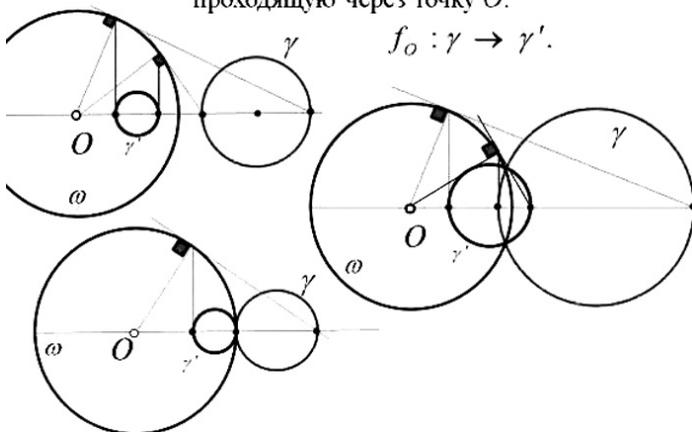


Рисунок 3.

6. Доказательство теоремы: угол между данными линиями конгруэнтен углу между линиями инверсными данным. Очень тяжело представить данную теорему геометрически, поэтому можно перед доказательством данной теоремы рассмотреть на слайде устно частный случай (рис. 4).

Угол между линиями a и b конгруэнтен углу между линиями α и β , инверсными данным.

$$f_o : a \rightarrow \alpha(O_1), b \rightarrow \beta(O_2).$$

$$\angle(a, b) = \angle O_1 O O_2 = \angle(\alpha, \beta).$$

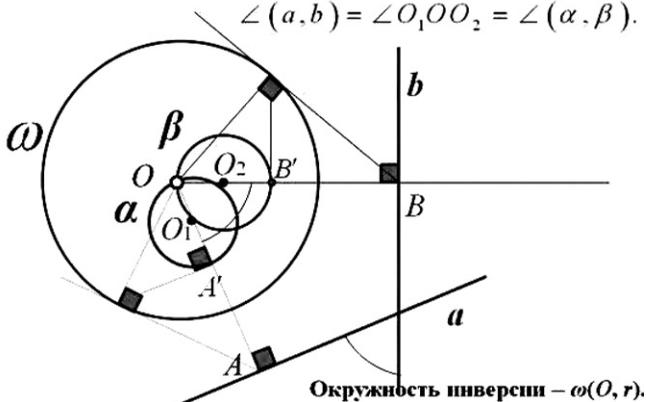


Рисунок 4.

Аналогично можно проводить занятия и по другим темам геометрии с использованием информационных технологий.

Список литературы:

1. Геометрия. Учеб. пособие для студ. I курса физ.-мат. факультетов пед. инсти-в / В. Т. Базылев и др. М., «Просвещение», 1974 — 351 с.
2. Клубничкина О. А. Изучение геометрических преобразований в общеобразовательной школе (В условиях дифференцированного обучения): дис. ... канд. пед. наук. М., 2001 — 199 с.
3. Косино О. А. Формирование профессиональной компетентности учителя в области элементарной математики в условиях интеграции педагогических и информационных технологий // Современные проблемы науки и образования. 2009. № 2. [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.science-education.ru/29-1070> (дата обращения: 20.12.2011).
4. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчишина и др.; под ред. В. А. Гусева. — М.: Издательский центр «Академия» — 368 с.

1.3. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ К КОМПЬЮТЕРНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ФРЕСОК

Бердичевский Евсей Григорьевич

кан. техн. наук, доцент НовГУ им. Я. Мудрого, г. В. Новгорода

E-mail: bersev@mail.ru

При реконструкции древнерусской монументальной храмовой живописи часто возникает ситуация, когда мастер-реставратор располагает в основном руинизированными фрагментами изображения. Количество фрагментов может быть достаточно велико. Контур фрагмента неровный, с острыми углами, сколами. Задача реставратора состоит в том, чтобы подобрать и состыковать фрагменты, принадлежащие одной композиции. При этом нужно иметь в виду, что некоторые фрагменты, нам неизвестные, исчезли безвозвратно. Традиционная технология реставрации (реконструкции) таких росписей очень трудоемка, длительна, дорогостоящая. Реставрация длится годами, часто мастер не может увидеть конечный результат.

Ситуация изменилась после начала использования в реставрации (реконструкции) компьютерных технологий. Повысилось качество реставрации (реконструкции) на криволинейных поверхностях схем из-за появившейся возможности учесть перспективные искажения. Среди многочисленных вариантов компьютерных программ для реставрации, наилучшие результаты показали разработки доцента НовГУ им. Ярослава Мудрого Луция С. А., который применил традиционные программы растровой и векторной графики при реконструкции церкви Спаса Преображения на Нередице (г. Великий Новгород) [6]. В основе компьютерной технологии Луция С. А. лежали процедуры сканирования фрагментов в компьютер, поиски оптимального стыка между фрагментами с учетом цвета, направления мазка, формы контура и т. д., а так же редактирования вариантов расположения фрагментов на схемах изображения и сохранившихся фотографиях.

Анализ проблемы использования компьютерных технологий в реставрации произведений искусства (табл. 1) позволил выделить реализованные и перспективные варианты.

Таблица 1.

Компьютерные технологии для реставрации произведений искусства

№ п/п	Компьютерная технология	Исходный материал	Дополнительная аппаратура и программное обеспечение (ПО)
1	3d-моделирование и создание фотореалистичных изображений	Документы, описания, изображения	3d- принтер, программы рендеринга
2	Применение растровой графики для редактирования изображений	Изображения или крупные фрагменты	Приложение к базовому пакету прикладных программ
3	Применение векторной графики для доработки изображений	Изображения или крупные фрагменты	Приложение к базовому пакету прикладных программ
4	Применение технического зрения и теории распознавания изображений (образов)	Фрагменты реставрируемого (реконструируемого) произведения	Цифровые камеры, специальное ПО
5	Применение специальных программ для стыковки фрагмента	Фрагменты реставрируемого (реконструируемого) изображения	Сканеры, специальное ПО

Характер задач, решаемых художником-реставратором при работе над восстановлением фрески из разрозненных фрагментов, позволяет предположить целесообразность использования математического аппарата и теории распознавания образов, относящихся к сфере искусственного интеллекта.

Сущность теории состоит в обосновании и создании методов отнесения распознаваемого объекта к тому или иному классу (образу). Существуют две технологии распознавания образов: объяснение

правил распознавания и обучение на примерах. В нашей ситуации — восстановление фресковой живописи, должна использоваться система распознавания, основанная на нескольких правилах.

Система распознавания образов конструируется отдельно под конкретную задачу. В обсуждаемой ситуации можно выделить шесть основных этапов построения системы.

Этап 1. Подробное и поначалу неформализованное изучение объектов распознавания и выяснение их сходств и различий, на основе которых объекты могут быть объединены в определенные классы и распознаны, т. е. отнесены каждый к своему классу. Реализация этапа включает тщательный анализ восстанавливаемой композиции (колористический, стилизованный, технологический и т. д.). Композиция разбивается на несколько зон, внутри которой примерно идентичны цветовые решения, тональные переходы, направления мазка, толщина красочного слоя и т. д. Например, композиция икон разбивалась на пять зон — голова с нимбом; одежда; руки; фон; вспомогательные фигуры (кресты, ангелы и т. д.).

Этап 2. Классификация распознаваемых процессов или явлений, выбор для этого принципа классификации. Обычно при выборе принципа классификации исходят из решений, которые предстоит принимать по результатам распознавания. В нашем случае классы — это зоны реконструируемого изображения, к которым следует отнести тот или иной фрагмент.

Этап 3. Составление перечня признаков, используемого для априорного (т. е. до предъявления объектов к распознаванию) описания классов. Те же признаки должны быть пригодны для апостериорного (условного) описания неизвестных объектов при их предъявлении к распознаванию. Признаки должны позволять отнести предъявляемый объект к одному из классов с достаточной надежностью.

В перечень включают те признаки, которые обладают наибольшей информативностью при отнесении объектов распознавания к своему классу. Поскольку определение информативности признаков возможно лишь после описания классов на языке признаков (этап 4), эти два этапа должны выполняться параллельно и связно.

Этап 4. Описание классов на языке признаков. Если все признаки являются логическими, то описания классов, как указано выше, могут представлять собой многоразрядные двоичные числа, например

10010111..., где 1 соответствует наличию признака, 0 — его отсутствию, а порядок перечисления признаков в разных классах является постоянным. Такое описание называют логическим.

Возможно вероятностное описание классов количественными признаками. В графическом изображении один из вариантов вероятностного описания представлен на рис. 1, где рассмотрен случай «два класса, два признака». Рисунок изображает двумерное пространство признаков.

Пользуясь рис. 1, опишем состояние фрагментов стеной живописи, гарантированно относящихся к одному изображению.

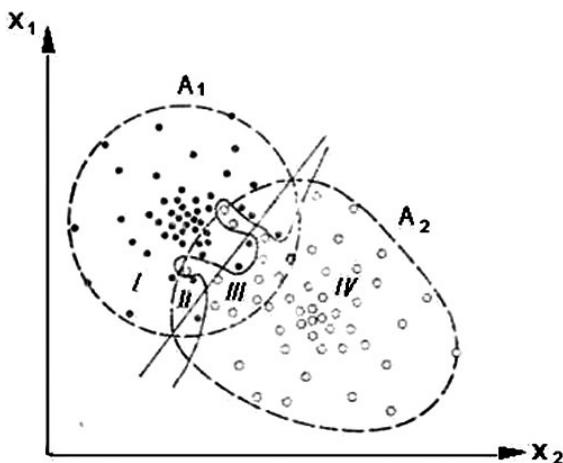


Рисунок 1. Двумерное пространство признаков

A_1 и A_2 — классы; x_1 и x_2 — параметры, образующие двумерный признак; точки — величины двумерного признака x_1, x_2 при состоянии A_1 ; кружки — величины того же признака при состоянии A_2 .

I — зона, где встречается только состояние A_1 ; II — зона, где преобладает состояние A_1 ; III — зона, где преобладает состояние A_2 , IV — зона, где встречается только состояние A_2

Состояние разделим на два класса: A_1 и A_2 . A_1 — складки одежды; A_2 — кожа шеи и туловища изображения. Для описания используем два признака фрагмента: максимальный линейный размер, цветовой тон. В рассматриваемой модели состояние каждого фрагмента описывается одной точкой. Предположим, что области A_1 и A_2 взаимно перекрывают друг друга (рис. 1). Проведем

разделительную границу так, чтобы по одну сторону границы была выше вероятность класса A1 по другую — вероятность класса A2, а на самой границе вероятности A1 и A2 были равны: $P(x/A1) = P(x/A2)$. Граница может быть и нелинейной (рис. 1). Правильно построенная разделительная граница минимизирует число ошибок.

Этап 5. Разработка алгоритмов распознавания, обеспечивающих отнесение распознаваемого объекта к своему классу.

Подходы к разработке алгоритмов распознавания можно разделить на логические и вероятностные.

Логические подходы предусматривают отыскание таких признаков, которые встречаются только у объектов, принадлежащих к данному классу. Отдельные признаки можно рассматривать как элементарные высказывания типа «да», «нет» или «истина», «ложь» и применять в этом случае для распознавания вычислительные методы алгебры логики. В общей форме можно утверждать, что для любой ситуации такие признаки в принципе могут быть найдены. Иногда приходится включать в систему распознавания образы человека, который обладает уникальной способностью к распознаванию образов по сложным комплексам признаков, количественный учет которых и само их измерение методически достаточно трудны.

В терминах вероятностного подхода к распознаванию это же положение можно сформулировать так: в пространстве признаков, описывающих группы фрагментов разрушенных фресок, если это пространство содержит признаки, позволяющие их дифференцировать, могут быть найдены такие подпространства, где вероятность одного класса превосходит вероятность всех остальных в такой степени, которая необходима для достаточно надежного вывода.

При вероятностном подходе исходят из предположения, что объекты каждого класса с какой-то, пусть очень малой, вероятностью могут встретиться в любой точке пространства признаков, но вероятность одного из классов в определенных подпространствах может сильно превосходить вероятности других. Следовательно, нам нужно только назначить порог отношения вероятностей, достаточный для распознавания, и тогда можно выделить подпространства, где этот порог превышен.

Математический аппарат, используемый в вероятностных алгоритмах, как при описании классов, так и при самом распознавании — это аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Этап 6. Выбор показателей эффективности системы распознавания и оценка их значений. В реставрационном деле в качестве такого показателя можно принять долю ошибочных решений по размещению фрагментов на схеме или рисунка изображения. Лучше эту долю сравнивать с долей при обычной «ручной» реставрации (реконструкции). Можно предложить и другие критерии: среднее время заполнения единицы площади реставрируемого объекта, величина расходов на распознавание, среднее число требуемых признаков и т. д.

В зависимости от количества исходной информации можно применять три вида систем распознавания.

Первый вид — Система без обучения предусматривает введение в готовом виде классов, признаков и описания классов на языке признаков. Поэтому широкому внедрению этого вида распознавания должно предшествовать скрупулезное изучение опыта работы лучших реставраторов, формализация их ручных действий и процедур. Нужно располагать подробными документами исходного состояния фрески до разрушения (чертежи, рисовальные копии, фотографии).

При системе без обучения в готовом виде вводится и алгоритм распознавания. Эти алгоритмы имеют свои преимущества; в частности, они существенно снижают число диапазонов признаков и, следовательно, количество рассматриваемых ячеек многомерного пространства признаков.

При вероятностном подходе обеспечивается более детальное изучение пространства признаков, однако усложняются вопросы, связанные с достаточностью исходной информации. Число наблюдений должно быть тем больше, чем больше число классов, признаков, диапазонов признаков, чем сложнее распределения признаков [3, 5] и чем сложнее взаимная зависимость признаков [4]. Если признаки независимы, требования к числу наблюдений не возрастают с увеличением их числа. Независимыми признаками являются, например, размер фрагмента и направление мазка краски; цвет фрагмента и острота кромок контура и т. д. Требования к числу наблюдений существенно снижаются при нормальных или вообще известных распределениях признаков. Наш опыт показал, что законы распределения основных характеристик фрагментов стенной краски (штукатурки) сильно отличаются от нормальных.

Системы распознавания с обучением и самообучением наиболее перспективны для целей реконструкции (реставрации) сильно пострадавших памятников искусства, так как позволяет делать прогнозы, даже если информации недостаточно для описания классов

на языке признаков и для задания достаточного алгоритма распознавания [2]. В реставрационном деле опыт применения таких систем минимален, что объясняется большой трудоемкостью процедуры «обучения» системы и необходимостью привлечения мощного математического аппарата.

Внедрение самообучающихся систем распознавания (кластерный анализ) в искусстве реставрации дело недалекого будущего. На сегодняшний день целесообразно использовать системы без обучения с логическими или вероятностными алгоритмами. Выбор конкретной системы распознавания определяется степенью разрушенности фрески, площади и качества сохранившегося «собственного» изображения. Чем выше степень разрушения фрески, чем хуже качество руинированных фрагментов, тем более эффективны будут вероятностные системы распознавания.

Из вероятностных систем распознавания достаточно эффективными в реставрационных работах будут методы Байеса и вытекающая из него последовательная процедура распознавания [1].

Можно утверждать, что происходит становление новой научной дисциплины — реставрационной кибернетики и теория распознавания образов при реставрации древних памятников искусства — один из самых перспективных разделов этого направления.

Список литературы:

1. Байесовский метод. Энциклопедия кибернетики. Киев: Наукова думка. 1975. — Т. 1. — С. 148.
2. Бердичевский Е. Г. Прогнозирование эффективности технологических смазок на основе теории распознавания образов.// Успехи современного естествознания, 2010. — №1. — С. 106-107.
3. Васильев В. И. Распознающие системы. Киев: Наукова думка, 1985. 422 с.
4. Гаскаров Д. В., Голинкевич Т. А., Мозгалевский А. В. Прогнозирование техники состояния и надежности радиоэлектронной аппаратуры. М.: Советское радио, 1974. — 274 с.
5. Распознавание образов. Теория и приложения. Сборник / Под ред. Турбовича И. Г. М.: Наука, 1977. — 178 с.
6. Ромашкевич Т. А., Луций С. А. Компьютерная реконструкция монументальной живописи церкви Спаса Преображения на Нередице. Новгород и Новгородская земля. Искусство и реставрация / Сост. — Володина Т.В. Великий Новгород: Типография «Виконт», 2005.

СЕКЦИЯ 2.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

2.1. АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ И ПРОИЗВОДСТВАМИ

ВНЕДРЕНИЕ НОВЫХ СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ «ОВЕН» В ЛАБОРАТОРНЫЙ КОМПЛЕКС ВЯТГУ

Никонов Андрей Владимирович

аспирант Вятского государственного университета, г. Киров

E-mail: ITspecal2009@yandex.ru

Модернизация существующих предприятий — одна из главных задач, стоящих перед современной Россией. Достижение поставленной цели невозможно без грамотных специалистов, получивших хорошую теоретическую базу и практические навыки в вузах. Всё это требует своевременной разработки новых лабораторных работ, закупки оборудования, его внедрения в учебный процесс.

Кафедра автоматики и телемеханики Вятского государственного университета продолжает активно сотрудничать с НПО «ОВЕН», выпускающим измерители-регуляторы, приборы контроля и управления, модули ввода/вывода, блоки питания, датчики и другие устройства. На базе множества приборов был создан лабораторный комплекс (рис. 1) для проведения практических занятий по дисциплинам «Технические средства автоматизации и управления», «Проектирование АСУТП» и ряду других.



Рисунок 1. Лабораторный комплекс ВятГУ

Назначение разработанного комплекса заключается в закреплении теоретических знаний студентов; знакомстве с современными приборами автоматизации, их устройством, структурой меню, способами настройки, подключения, функционирования; выработке практических навыков по управлению технологическим процессом и работе с различными программными средствами.

Лабораторный комплекс состоит из ряда стендов, позволяющих осуществлять управление температурой воздуха, влажностью, скоростью вращения вентилятора и т. п. Каждый из стендов состоит из устройства управления (УУ) и объекта управления (ОУ). Объекты управления представляют собой сочетание имитаторов технологического оборудования и процессов, датчиков, исполнительных механизмов. Устройства управления реализованы по модульному принципу на основе сменных блоков, содержащих один из регуляторов или контроллеров фирмы ОВЕН и могут связываться с рабочей станцией по интерфейсу RS-232. Общая структурная схема исследуемых систем в лабораторном комплексе приведена на рис. 2.

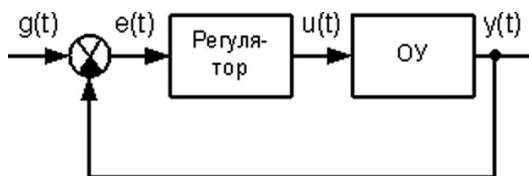


Рисунок 2. Структурная схема исследуемых систем регулирования

Расширение имеющегося функционала данного комплекса является одним из приоритетных направлений работы на кафедре автоматики и телемеханики. Поэтому дополнительно были приобретены программируемый логический контроллер ОВЕН ПЛК150, универсальный измерительный модуль ввода ОВЕН МВА8 — для подключения к контроллеру температурных датчиков, модуль управления исполнительными механизмами МВУ8 — для управления вентилятором и лампой накаливания, индикационная панель ОВЕН ИП320 — для задания параметров регулирования.

Контроллер ОВЕН ПЛК150 (рис. 3) предназначен для создания систем управления малыми и средними объектами. Построение системы управления и диспетчеризации возможно как с помощью проводных средств — используя встроенные интерфейсы Ethernet, RS-232, RS-485, так и с помощью беспроводных средств — используя радио, GSM, ADSL модемы. Контроллер выполнен в компактном DIN-реечном корпусе. Расширение количества точек ввода/вывода осуществляется путем подключения внешних модулей ввода/вывода по любому из встроенных интерфейсов.



Рисунок 3. Контроллер ОВЕН ПЛК150

В контроллере изначально заложены мощные вычислительные ресурсы при отсутствии операционной системы: высокопроизводительный процессор RISC архитектуры ARM9, с частотой 180МГц компании Atmel; большой объем оперативной памяти — 8МБ; большой объем постоянной памяти — Flash память, 4МБ; объем энергонезависимой памяти, для хранения значений переменных — до 16КБ [1].

Восьмиканальный универсальный измерительный модуль ввода ОВЕН МВА8 был разработан для распределенных систем управления в сети RS-485, может использоваться в качестве модуля расширения входов для ОВЕН ПЛК или программируемых контроллеров других производителей. Модуль ввода МВА8 работает в сети RS-485 при наличии в ней «мастера», при этом сам МВА8 не является «мастером» сети [2].

Восьмиканальный модуль управления исполнительными механизмами ОВЕН МВУ8 для распределенных систем в сети RS-485 (протоколы ОВЕН, Modbus, DCON) может использоваться: в качестве удаленного блока выходных устройств для SCADA-системы или программируемых контроллеров (ОВЕН ПЛК или др.); для интеллектуального управления исполнительными механизмами. МВУ8 работает в сети RS-485 при наличии в ней «мастера», при этом сам МВУ8 не является «мастером» сети [3].

Графическая панель оператора ИП320 поддерживает совместную работу с ОВЕН ПЛК, с модулями ОВЕН МВА8, МВУ8, МДВВ, а также приборами и контроллерами других производителей [4].

Основная задача состояла в «объединении» рассмотренных выше средств автоматизации в виде еще одного сменного модуля УУ для лабораторного комплекса, структурная схема которого приведена на рис. 4.

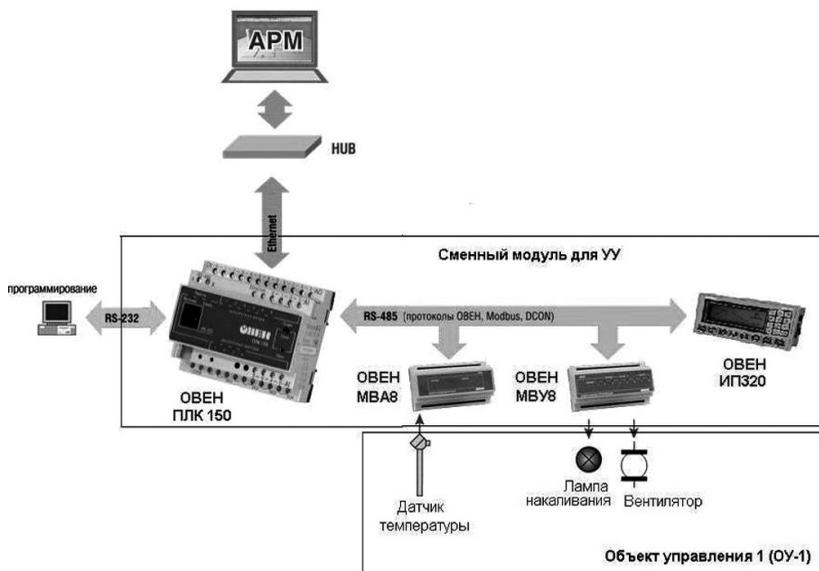


Рисунок 4. Структурная схема сменного модуля УУ

После разработки функциональной схемы был решен вопрос с размещением приборов на сменном модуле УУ, а также выполнена схема электрических соединений. Дальнейшая работа заключалась в конфигурировании МВА8, МВУ8 и программирования ПЛК 150 и ИП 320.

С помощью программ, входящих в комплект поставки модулей МВА8 и МВУ8: «Конфигуратор МВА8» и «Конфигуратор МВУ8», а также адаптера интерфейса RS-232/RS-485 ОВЕН АС3, предназначенного для взаимного преобразования сигналов интерфейсов RS-232 и RS-485, были заданы адреса модулей в сети RS-485 и выбраны типы датчиков и выходных элементов.

Решение задачи программирования контроллера ПЛК 150 осуществлялось в среде программирования контроллера CoDeSys v. 2.3, где было написано несколько программ по управлению температурой: режимы «холодильника», «нагревателя» — для эмуляции работы простейшего терморегулятора. CoDeSys v. 2.3 предоставляет программисту удобную среду для программирования контроллеров на языках стандарта МЭК 61131-3. Используемые редакторы и отладочные средства базируются на широко известных и хорошо себя зарекомендовавших принципах [5].

Основное назначение панели ИП320 — это вывод температуры на экран и установка параметров работы контроллера, работающего в двух режимах: прямой гистерезис и обратный. Для реализации этих двух программ необходимо задавать уставку, гистерезис и сам режим работы.

В панели ИП320 были реализованы 2 экрана. На основном (рис. 5) происходит вывод основных параметров работы прибора, задаются уставка и гистерезис, выбирается режим работы терморегулятора. На дополнительном экране (рис. 6) отображается график температуры.

Ттек=24,5	Туст=21,4	Гист.=2
Текущий режим работы прибора 0		
Установка режима		
0 – Нагреватель		1 – Холодильник
Установка параметров		
Уставка 22,5		Гистерезис 3
Экран графика		Пароль
температуры		

Рисунок 5. Основной экран ИП320

Назначение основного экрана — просмотр измеряемой температуры, вывод текущих значений уставки и гистерезиса, задание режима работы и параметров регулятора, переход на экран пароля.

Установить режим работы можно нажатием кнопок 0 или 1 на панели оператора ИП320. После выбора режима путем нажатия соответствующей кнопки на экран будет выведен номер текущего режима.

Все параметры читаются из соответствующих регистров. С помощью кнопки 2, расположенной на панели ИП320, можно перейти в режим автоматического переключения экранов панели. Для разрешения записи новых значений необходимо перейти на экран пароля с помощью кнопки 3 на панели ИП320 и выбрать меню «Открыть доступ». Далее откроется экран ввода пароля, в котором необходимо ввести пароль с помощью стрелок на панели.

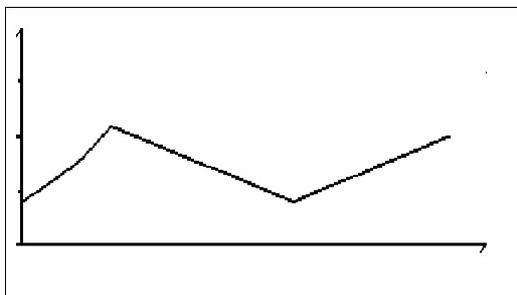


Рисунок 6. Экран графика температуры

Экран графика температуры (рис. 6) отображает кривую изменения значений соответствующей физической величины.

Конфигурирование панели оператора осуществляется на ПК с помощью программы «Конфигуратор ИП320», которая предоставляется в комплекте с прибором. Данная программа предназначена для создания, редактирования и сохранения пользовательских экранов, которые будут отображаться на дисплее прибора.

Практические испытания созданного сменного модуля на базе ПЛК 150 и других средств автоматизации ОВЕН прошли успешно. Данные о режиме и уставке успешно считываются с панели ИП320, передаются по интерфейсу RS-485 контроллеру ПЛК 150, на который через модуль МВА8 также поступает информация с датчика температуры. Сформированный выходной сигнал идет на МВУ8 и далее на исполнительные механизмы. Система управления температурой воздуха в ОУ-1 работает и позволяет проводить новые лабораторные работы.

Список литературы:

1. Информация с сайта фирмы «ОВЕН» [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.owen.ru/catalog/81771770>
2. Информация с сайта фирмы «ОВЕН» [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.owen.ru/catalog/16158393#t20c>
3. Информация с сайта фирмы «ОВЕН» [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.owen.ru/catalog/28842722#t20c>
4. Информация с сайта фирмы «ОВЕН» [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.owen.ru/catalog/79604532#t20c>
5. Справочная система CoDeSys V2.3

2.2. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ АРХИТЕКТУРНЫХ ФОРМ

Лобанова Екатерина Владимировна
магистрант СибГАУ, г. Красноярск

Сухарев Евгений Николаевич
канд. техн. наук, доцент, преподаватель кафедры рекламы и
культурологии СибГАУ, г. Красноярск
E-mail: lennona@mail.ru

В данной статье раскрыто понятие визуализации архитектурных форм, выделены её этапы, представлен обзор программ, позволяющих создать наглядное изображение архитектурного проекта в трёхмерном пространстве.

Визуализация архитектурных форм — это одновременно процесс и результат представления архитектурного объекта в виде чертежей, приобретающий более наглядную, объёмную форму в фотографически реалистичном изображении здания или сооружения, построенного в трёхмерном пространстве. [3]

Визуализация архитектурных форм стала важным условием в строительстве. С помощью графико-анимационных программ, особенно это касается последних версий, можно визуализировать различные по своей сложности объекты, например, жилые и торговые комплексы. [1]

Когда заказчик желает видеть объект будущего строительства максимально приближенным к реальности, возникает необходимость в его визуализации. В таком случае можно изготовить уменьшенную копию будущего строения в виде макета. Однако более рациональным представляется создать его модель в виртуальной реальности с помощью программ для визуализации. Трёхмерную модель, изготовить значительно проще, чем макет, её также проще отредактировать (переделать, перекрасить, придать новую форму), её можно отправить по электронной почте. В некоторых программах визуализации можно учитывать тонкости и детали будущего здания, например, по компьютерной модели можно прогуляться, подняться по лестнице, открыть дверь или включить освещение.

В отличие от других типов визуализации, визуализация архитектурных форм предполагает доминирующее положение моделирования по отношению к другим этапам этого процесса. Любая визуализация состоит из нескольких этапов:

1. моделирование сцены;
2. отрисовка текстур и текстурирование элементов сцены;
3. расстановка источников света и настройка вида;
4. наполнение сцены различными мелкими элементами (кусты, газоны, вазы);
5. настройка параметров рендеринга и сам рендеринг или визуализация.

Большая часть времени при визуализации интерьеров тратится на расстановку источников света и подбор аксессуаров. Однако при визуализации архитектуры присутствует один источник света — это солнце, а наполнение сцены может ограничиться кустом, человеческой фигурой и машиной, поскольку здесь более важно показать масштаб объекта. Также, при визуализации, в том числе и при визуализации архитектурных форм, ограничено количество текстур. Таким образом, 80% всего времени тратится на само моделирование здания и прорисовку его декоративных элементов. [3]

Итак, рассмотрим далее несколько программ, с помощью которых можно создать визуализацию архитектурного проекта. Одной из самых известных является программа 3ds Max, с помощью которой, можно делать не только архитектурную визуализацию.

В данной программе следует выделить наиболее распространённые и доступные возможности создания трёхмерной модели, которые предлагают разработчики.

В 3ds Max есть довольно большая библиотека объектов трёхмерной графики, которая содержит стандартные и расширенные примитивы. Построить простые геометрические формы в данной программе несложно — достаточно выбрать нужный примитив или модель и задать необходимые параметры (такие, как длина, высота, радиус и т. д.).

В данной программе имеется редактор материалов, с помощью которого можно настраивать свойства поверхностей объектов: блеск, прозрачность, цвет и т. д. В программе 3ds Max есть встроенный визуализатор, но также можно использовать и иные визуализаторы других разработчиков, например, довольно часто используемый с данной программой визуализатор V-Ray. В отличие от визуализатора, встроенного в 3ds Max, этот визуализатор позволяет моделировать солнечное освещение в зависимости от географической широты, на

которой находится объект, а также в него встроена функция глобального освещения моделируемой сцены.

В программе 3ds Max содержатся модули, позволяющие работать с различными системами частиц, моделирующими снег, дождь или брызги, основными факторами управления характеристиками и динамикой которых положены реальные законы физики. С помощью программы 3ds Max можно моделировать персонажей и создавать довольно реалистичные предметы их одежды, анимируя их и создавая необходимые визуальные эффекты, например, складки либо эффект мокрой или липкой ткани.

3ds Max включает в себя средства, с помощью которых достигается высокое качество изображения, получаемого при рендеринге. К ним можно отнести метод трассировки лучей, позволяющий создавать реалистичное отражение и преломление света, также атмосферные эффекты (туман, огонь), естественное освещение и проч. [4]

Следующая программа, используемая для визуализации, — Autodesk Maya. По своим функциям она сходна с программой 3d Max. Перечислим её основные свойства.

Существует две основные версии программы: Maya Complete и Maya Unlimited, включающая некоторые специфические функции. Maya работает на компьютерах с операционными системами Windows NT/2000, Linux, IRIX, Macintosh.

Maya позволяет создавать трёхмерную графику и анимацию, которые основаны на создаваемых пользователем моделях. Данные модели освещаются виртуальными источниками света и могут отображаться с помощью виртуальных камер.

С помощью Maya можно создавать фотореалистичные растровые изображения, а также задавать изменения любого параметра с течением времени, в результате чего, получается анимированная сцена [5]. В этом состоит одно из отличий данной программы от 3ds Max.

Ещё одна программа, с помощью которой можно создавать проекты и их изображения в трёхмерном пространстве, — ArchiCAD. Это графический программный пакет, предназначенный для проектирования архитектурно-строительных конструкций и решений, а также элементов ландшафта, мебели и т. п.

Принцип работы данной программы несколько отличается от предыдущих. Здесь используется концепция виртуального здания, которая заключается в том, что ArchiCAD выполняет построение объёмной модели в натуральную величину, существующую в памяти

компьютера. Для этого, в начале работы, необходимо как бы «построить» здание, с помощью инструментов создания стен, перекрытий, окон, лестниц, а также других различных объектов. После чего, из проекта можно извлекать различную информацию: планы каждого этажа, фасады, разрезы, экспликации, спецификации, презентационные материалы и др. Особенностью программы ArchiCAD является то, что её можно использовать вместе с различными инженерными программами.

Ещё одним преимуществом программы является то, что её можно дополнять расширенной библиотекой объектов проектирования. В стандартную библиотеку входит более 1000 разнообразных элементов, в дополнение к ней поставляется библиотека по ГОСТу, которая, однако, не так хорошо проработана, как стандартная.

Основное преимущество программы в том, что все части проекта естественным образом связаны между собой. В программе ArchiCAD используется технология «виртуального здания», позволяющая работать проектом как с единым целым, поэтому, любые изменения сделанные, на одном плане проекта, автоматически отображаются (пересчитываются) на других планах, видах и других частях проекта. Это значительно сокращает временные затраты на проектирование.

Если говорить о недостатках ArchiCAD, то можно выделить ограниченность возможностей при создании объектов со сложной, нестандартной геометрией. Также, в программе не предусмотрено много вариантов проектирования, то есть, является предпочтительным, чтобы в рамках одного файла в любой момент времени был один вариант архитектурно-строительных решений, принимаемых в проекте [2].

Итак, основным достоинством визуализации является возможность рассматривать реалистичные модели зданий под любым углом, при необходимости (если предусмотрено в проекте), видеть движущиеся объекты, растительность, световые блики, отражения, тени и воду.

Исходя из перечисленных свойств программ, можно сделать вывод о том, что, существует несколько продуктов, способных осуществлять визуализацию архитектурных форм, применять к ним различные эффекты и анимацию. У каждой из этих программ свой набор инструментов, текстур и свой интерфейс, но с помощью любой из них можно визуализировать архитектурный проект.

Список литературы:

1. Визуализация архитектурных проектов [Электронный ресурс] // сайт студии Архитектурного Дизайна «Фортиссимо»: [сайт]. [2009]. URL: — http://www.fortissimo.dn.ua/pages/article/index.php?id_article=11 (дата обращения 15.12.2011).
2. Википедия. ArchiCAD [Электронный ресурс] // Википедия — свободная энциклопедия: [сайт]. [2011]. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/ArchiCAD> (дата обращения 11.12.2011).
3. Воронина Т. Визуализация архитектуры [Электронный ресурс] // сайт Татьяны Ворониной: [сайт]. [2011]. URL: <http://vizualizaciya-architekturi.archizona.ru> (дата обращения 14.12.2011).
4. Илюк Т. Введение: компьютерная 3d графика в современном мире [Электронный ресурс] // сайт мультимедиа-сообщества Estate.ru: [сайт]. [2009-2010]. URL: <http://www.esate.ru/page/3D-Studio-Max> (дата обращения 10.12.2011).
5. Редакция портала Mir3d.ru. Мауа: история культа одной программы [Электронный ресурс] // портал Mir3d.ru: [сайт]. [2008-2010]. URL: <http://mir3d.ru/articles/967> (дата обращения 10.12.2011).

2.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДОВ РЕФРАКЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Андросик Андрей Борисович

*канд. техн. наук., доцент, Государственный открытый Университет,
г. Москва*

Воробьев Сергей Андреевич

*канд. техн. наук., доцент, Государственный открытый Университет,
г. Москва*

Мировицкая Светлана Дмитриевна

*канд. техн. наук., доцент, Государственный открытый Университет,
г. Москва*

E-mail: vorsa_57@mail.ru

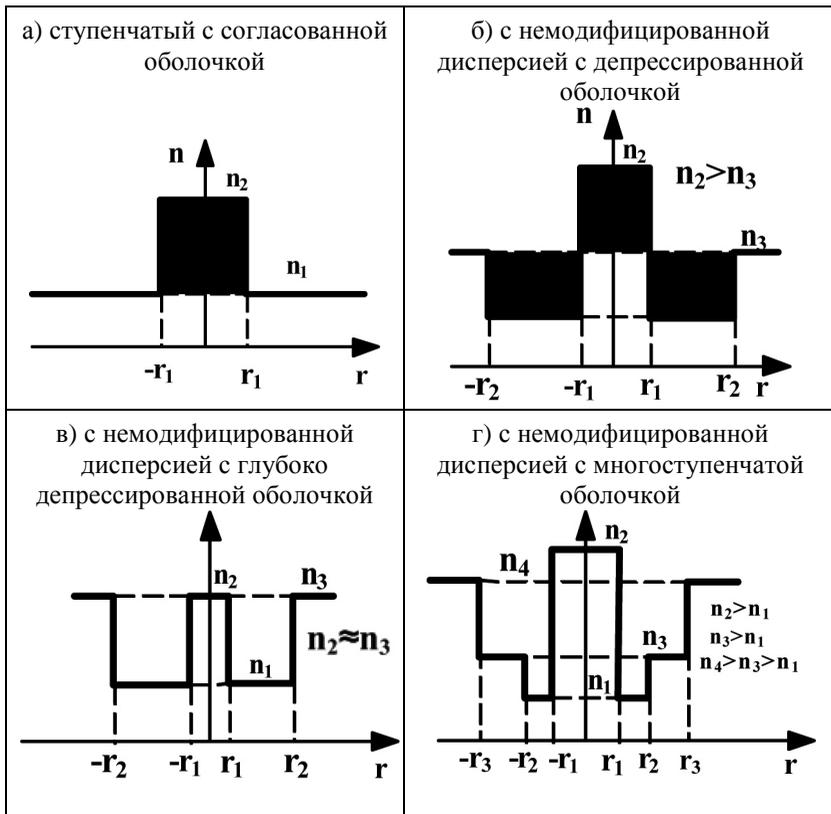
Оптические волноводы в виде стеклянных волокон используются в качестве передающей среды в системах оптической связи. Обладая малыми потерями и низкой дисперсией, они способны передавать широкополосные сигналы оптического диапазона на большое расстояние. По этим характеристикам стеклянные волокна существенно отличаются от планарных и полосковых волноводов.

Многомодовые волоконные световоды (ВС) находят широкое применение в различных приложениях волоконной оптики [3, стр. 385]. В первую очередь это относится к стандартным градиентным многомодовым ВС, а также многомодовым ВС, оптимизированным для работы с лазерными источниками оптического излучения, которые эффективно используются в высокоскоростных локальных сетях передачи данных. Другое направление – это много- и маломодовые ВС специального назначения, отличающиеся сложным профилем показателя преломления (рис. 1). Подобные ВС находят широкое применение в отдельных компонентах высокоскоростных одномодовых ВОСП, таких как компенсаторы хроматической дисперсии на модах высших порядков.

Наиболее простой и распространенной конструкцией одномодового ВС является ступенчатый с согласованной оболочкой (рис. 1, а). Такая

конструкция модифицирована в трех направлениях, что привело к созданию одномодовых волокон с немодифицированной, смещенной и сглаженной дисперсией. Одномодовые ВС с немодифицированной дисперсией делятся на ВС с депрессированной (рис. 1, б), глубоко депрессированной (рис. 1, в), многоступенчатой (рис. 1, г), фторированной (рис. 1, д) оптическими оболочками.

Для согласования наименьших потерь в ВС с длиной волны дисперсии применяются световоды со смещенной дисперсией. Увеличение волноводной дисперсии, необходимое для согласования, получается вследствие распространения света вне сердцевины со ступенчатым профилем и высоким значением показателя преломления сердцевины (рис. 1, е). Применение сегментного и конвексного профилей увеличивает стойкость ВС к воздействию поперечной раздавливающей силы и изгибающих нагрузок.



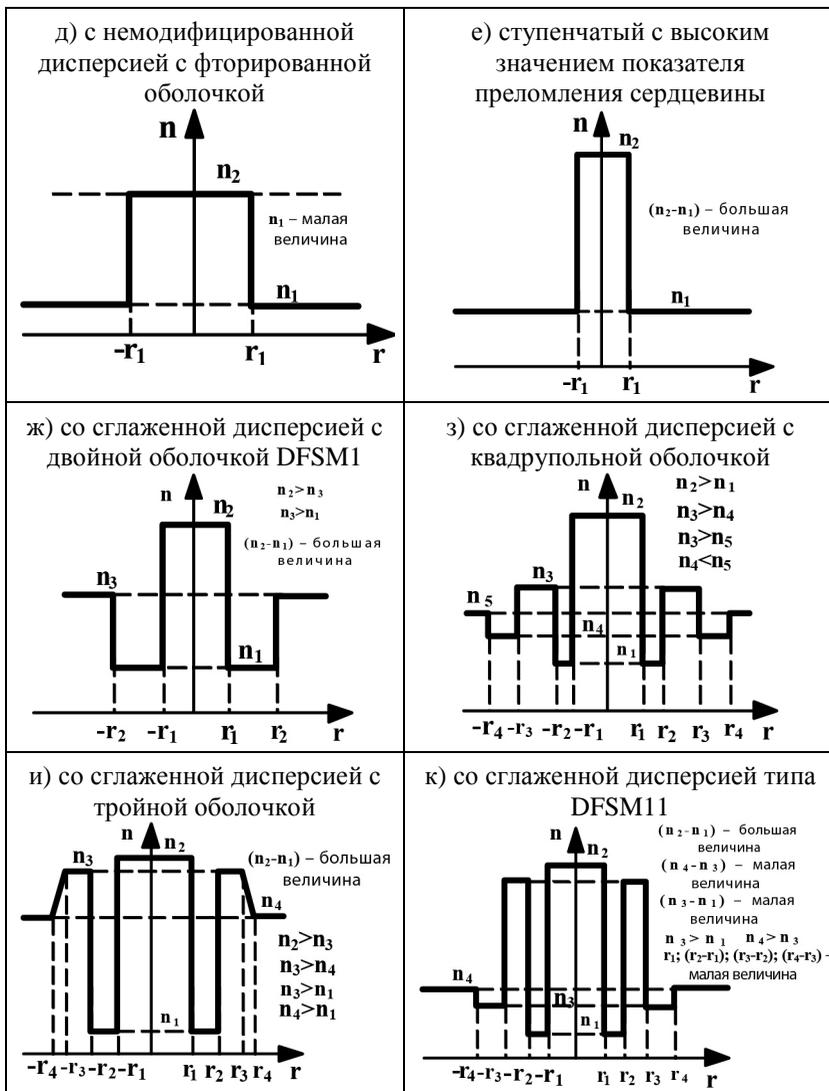


Рисунок 1. Профили показателей преломления одномодовых ВС без сохранения поляризации излучения

Применение сегментного и конвексного профилей увеличивает стойкость ВС к воздействию поперечной раздавливающей силы и изгибающих нагрузок.

ВС с усложненным профилем показателя преломления представляют интерес для ряда специальных применений, поскольку выбором параметров световодов можно оптимизировать свойства каналов передачи информации, придав им новые функции. Двухканальные световоды с концентрической геометрией рассмотрены в [2, стр. 30]. Сердцевина и кольцевой световод изготавливаются многомодовыми, а их параметры подбираются таким образом, чтобы обеспечить удобное возбуждение источниками излучения и оптическую развязку между каналами на определенном уровне, достаточном для раздельной передачи цифровых и аналоговых световых потоков в системах двухканальной или дуплексной связи. Вследствие малых поперечных размеров и веса, а также того, что ВС являются полностью диэлектрическими и не подвержены электромагнитным наводкам, двухканальные концентрические световоды представляют несомненный интерес для применения в системах связи и телеуправления подвижными объектами, в авиации, космических летательных аппаратах и др.

Разновидностью концентрических световодов является одномодовый ВС с дополнительным световедущим тонким кольцевым световодом (трубкой), который находится на малом расстоянии от одномодовой сердцевины. Работа такого двухканального ВС основана на распределенной связи между каналами, которая реализуется при близких или равных постоянных распространения, приводя к периодической по длине световода перекачке излучения из сердцевины в кольцо и обратно.

В последние годы перспективными стали брэгговские световоды, позволяющие снизить ограничения, присущие традиционным кварцевым ВС. Брэгговские световоды представляют собой одномерный фотонный кристалл, излучение в котором распространяется в полой сердцевине или сердцевине с показателем преломления меньшим, чем у оболочки. Это оказывается возможным, поскольку оболочка служит многослойным диэлектрическим зеркалом, работающим по принципу брэгговских резонансов [1, стр. 178].

Несколько лет назад были созданы [4, стр. 152] ВС из кварцевого стекла с контрастом показателя преломления Δn , значительно превышающим (более чем на порядок) Δn в обычных ВС. Последнее достигается за счет наличия в оболочке таких световодных сплошных, однородных по всей длине световода, продольных отверстий, в том или ином порядке расположенных в поперечном сечении относительно оси. Эти перспективные ВС называются дырчатыми или

микроструктурированными. Большой контраст показателей преломления сердцевин и оболочек определяет уникальные оптические свойства дырчатых ВС. Варьируя геометрией элементов оболочки (размеры отверстий, их количество и относительное расположение), можно управлять дисперсионными свойствами — смещать нулевое значение дисперсии ВС в обе стороны спектра по отношению к нулевой материальной дисперсии, менять наклон дисперсионной кривой, добиваться ее неоднократного пересечения с осью длин волн. Одномодовый режим распространения излучения в микроструктурированных ВС возможно обеспечить как со сравнительно большой, так и малой эффективной площадью поперечного сечения поля моды в широком спектральном диапазоне. Высокая симметричность расположения отверстий в оболочке и их одинаковые размеры не являются критичными при создании данного типа ВС. Эти уникальные оптические свойства определяют перспективность микроструктурированных ВС для целого ряда практических применений в волоконной оптике, а также спектроскопии и при создании нелинейных волоконных устройств для среднего ИК диапазона.

В качестве базовой модели для всех описанных выше категорий волоконных световодов можно рассмотреть многослойный ВС с постоянным показателем преломления слоев. Количество слоев выбирается, исходя из профиля показателя преломления. Чем больше разница между начальным и конечным показателями преломления, тем большее число слоев следует ввести для обеспечения требуемой точности измерений.

Перспективным методом исследования геометрических параметров и структуры ВС является рефракционный метод зондирования неоднородных диэлектрических цилиндров и анализа зависимости угла рефракции от распределения показателя преломления по сечению ВС. Угловые и линейные параметры рефрагировавшего пучка чувствительны к изменению числа слоев и формы поперечного сечения многослойных диэлектрических структур [5, стр. 18]. Метод базируется на точных измерениях распределения поля в функции угла рассеяния в ближней зоне и позволяет определить диаметр ВС, степень его эллиптичности, структуру зоны раздела сердцевина-оболочка, дефекты сердцевин и оболочек, а также распределение показателя преломления в поперечном сечении ВС.

В общем случае схема зондирования слоистого ВС представлена на рис. 2.

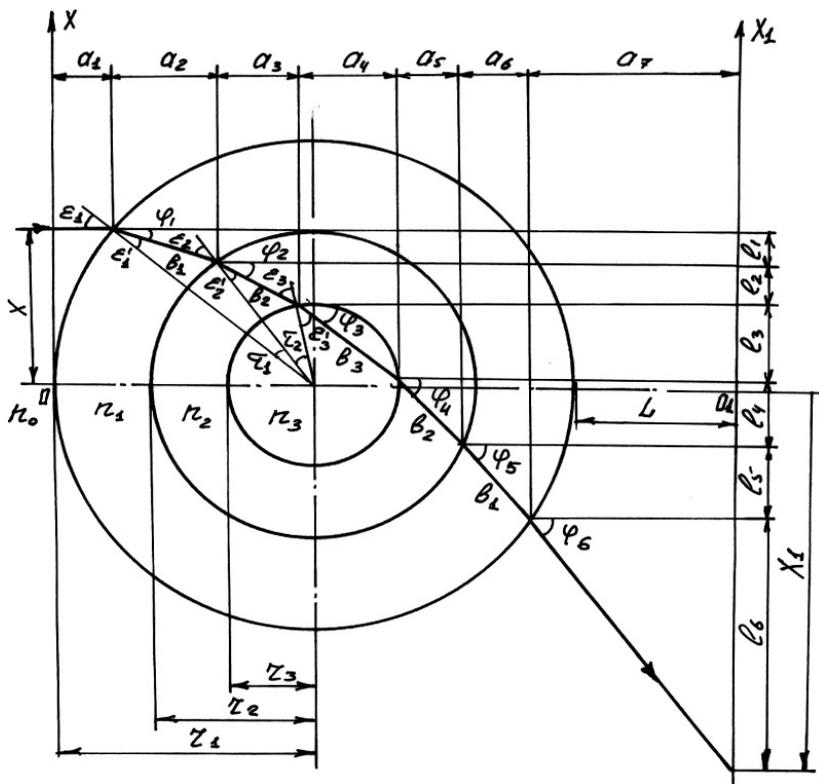


Рисунок 2. Схема зондирования трехслойного ВС

Основные зависимости геометрических параметров — углов падения и преломления, проекций пути луча на горизонтальную и вертикальную оси, координат отклонения луча, а также условий входа луча в сердцевину, сведены в таблицы 1 и 2.

При зондировании слоистого ВС формируется ряд характеристических лучей, которые вносят энергетический вклад в суммарную картину рассеяния в ближней зоне.

Основные типы лучей в случае трехслойного ВС с учетом переотражений от слоев снаружи (S_i) и изнутри (q_i) показаны на рис. 3. При моделировании учитывалось не более двух переотражений, поскольку интенсивность лучей более высокого порядка отражений ничтожно мала (менее 0,8 % от суммарной величины) [6, стр. 73].

Таблица 1.

Основные углы падения и преломления лучей

Тип ВС	Углы падения ε_i и преломления ε'_i	Углы, φ_i	Путь луча в слое ВС, b_i
Одно-родный	$\varepsilon_1 = \arcsin\left(\frac{x}{r_1}\right);$ $\varepsilon'_1 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_1n_1}\right).$	$\varphi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon'_1;$ $\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon'_1.$	$b_1 = 2r_1 \cos \varepsilon'_1.$
Двух-слойный	$\varepsilon_1 = \arcsin\left(\frac{x}{r_1}\right);$ $\varepsilon'_1 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_1n_1}\right);$ $\varepsilon_2 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_2n_1}\right);$ $\varepsilon'_2 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_2n_2}\right).$	$\varphi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon'_1;$ $\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_2;$ $\varphi_3 = \varphi_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon'_3;$ $\varphi_4 = \varphi_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon'_4.$	$b_1 = \frac{r_2 \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon'_1)}{\sin \varepsilon'_1};$ $b_2 = 2r_2 \cos \varepsilon'_2.$
Трех-слойный	$\varepsilon_1 = \arcsin\left(\frac{x}{r_1}\right);$ $\varepsilon'_1 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_1n_1}\right)$ $\varepsilon_2 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_2n_1}\right)$ $\varepsilon'_2 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_2n_2}\right)$ $\varepsilon_3 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_3n_2}\right)$ $\varepsilon'_3 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_3n_3}\right)$	$\varphi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon'_1$ $\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_2$ $\varphi_3 = \varphi_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon'_3$ $\varphi_4 = \varphi_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon'_4$ $\varphi_5 = \varphi_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon'_5$ $\varphi_6 = \varphi_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon'_6$	$b_1 = \frac{r_2 \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon'_1)}{\sin \varepsilon'_1}$ $b_2 = \frac{r_3 \sin(\varepsilon_3 - \varepsilon'_2)}{\sin \varepsilon'_2}$ $b_3 = 2r_3 \cos \varepsilon'_3$

<p>Четырех- слойный</p>	$\varepsilon_1 = \arcsin\left(\frac{x}{r_1}\right)$ $\varepsilon'_1 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_1 n_1}\right)$ $\varepsilon_2 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_2 n_1}\right)$ $\varepsilon'_2 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_2 n_2}\right)$ $\varepsilon_3 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_3 n_2}\right)$ $\varepsilon'_3 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_3 n_3}\right)$ $\varepsilon_4 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_4 n_3}\right)$ $\varepsilon'_4 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_4 n_4}\right)$	$\varphi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon'_1$ $\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_2$ $\varphi_3 = \varphi_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon'_3$ $\varphi_4 = \varphi_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon'_4$ $\varphi_5 = \varphi_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon'_5$ $\varphi_6 = \varphi_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon'_6$ $\varphi_7 = \varphi_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon'_7$ $\varphi_8 = \varphi_7 + \varepsilon_8 - \varepsilon'_8$	$b_1 = \frac{r_2 \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon'_1)}{\sin \varepsilon'_1}$ $b_2 = \frac{r_3 \sin(\varepsilon_3 - \varepsilon'_2)}{\sin \varepsilon'_2}$ $b_3 = \frac{r_4 \sin(\varepsilon_4 - \varepsilon'_3)}{\sin \varepsilon'_3}$ $b_4 = 2r_4 \cos \varepsilon'_4$
<p>К- слойный</p>	$\varepsilon_1 = \arcsin\left(\frac{x}{r_1}\right)$ $\varepsilon'_1 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_1 n_1}\right)$ $\varepsilon_2 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_2 n_1}\right)$ $\varepsilon'_2 = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_2 n_2}\right)$ <p>.....</p> $\varepsilon_k = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_k n_{k-1}}\right)$ $\varepsilon'_k = \arcsin\left(\frac{xn_0}{r_k n_k}\right)$	$\varphi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon'_1$ $\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_2$ <p>.....</p> $\varphi_k = \varphi_{k-1} + \varepsilon_k - \varepsilon'_k$ $\phi_{k-1} = \phi_k + \varepsilon_{k-1} - \varepsilon'_{k-1}$ $\phi_{k-2} = \phi_{k-1} + \varepsilon_{k-2} - \varepsilon'_{k-2}$ <p>.....</p> $\phi_{2k} = \phi_{2k+1} + \varepsilon_1 - \varepsilon'_1$	$b_1 = \frac{r_2 \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon'_1)}{\sin \varepsilon'_1}$ <p>.....</p> $b_{k-1} = \frac{r_k \sin(\varepsilon_k - \varepsilon'_{k-1})}{\sin \varepsilon'_{k-1}}$ $b_k = 2r_k \cos \varepsilon'_k$

Таблица 2.

Проекции путей луча и координаты отклонения

Тип ВС	Проекция пути луча на горизонтальную ось, a_i	Проекция луча на вертикальную ось, l_i	Координата отклонения луча, X_i	Условия входа в сердцевину
Одно- родный	$a_1 = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2}$ $a_2 = b_1 \cos \varphi_1$ $a_3 = 2r_1 + L - a_1 - a_2$	$l_1 = b_1 \sin \varphi_1$ $l_2 = a_3 \operatorname{tg} \varphi_2$	$x_1 = x - l_1 - l_2$	
Двух- слойный	$a_1 = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2}$ $a_2 = b_1 \cos \varphi_1$ $a_3 = b_2 \cos \varphi_2$ $a_4 = b_1 \cos \varphi_3$ $a_5 = 2r_1 + L - a_1 - a_2 - a_3 - a_4$	$l_1 = b_1 \sin \varphi_1$ $l_2 = b_3 \sin \varphi_2$ $l_3 = b_1 \sin \varphi_3$ $l_4 = a_5 \operatorname{tg} \varphi_4$	$x_1 = x - l_1 - l_2 -$ $-l_3 - l_4$	$x < \frac{n_1 r_2}{n_0}$
Трехслой- ный	$a_1 = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2}$ $a_2 = b_1 \cos \varphi_1$ $a_3 = b_2 \cos \varphi_2$ $a_4 = b_3 \cos \varphi_3$ $a_5 = b_2 \cos \varphi_4$ $a_6 = b_1 \cos \varphi_5$ $a_7 = 2r_1 + L - a_1 - a_2$ $-a_3 - a_4 - a_5 - a_6$	$l_1 = b_1 \sin \varphi_1$ $l_2 = b_2 \sin \varphi_2$ $l_3 = b_3 \sin \varphi_3$ $l_4 = b_2 \sin \varphi_4$ $l_5 = b_1 \sin \varphi_5$ $l_7 = a_7 \operatorname{tg} \varphi_6$	$x_1 = x - l_1 - l_2 - l_3 -$ $-l_4 - l_5 - l_6$	$x < \frac{n_2 r_3}{n_0}$

Четырех- слойный	$a_1 = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2}$ $a_2 = b_1 \cos \varphi_1$ $a_3 = b_2 \cos \varphi_2$ $a_4 = b_3 \cos \varphi_3$ $a_5 = b_4 \cos \varphi_4$ $a_6 = b_3 \cos \varphi_5$ $a_7 = b_2 \cos \varphi_6$ $a_8 = b_1 \cos \varphi_7$ $a_9 = 2r_1 + L - a_1 - a_2 -$ $-a_3 - a_4 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8$	$l_1 = b_1 \sin \phi_1$ $l_2 = b_2 \sin \phi_2$ $l_3 = b_3 \sin \phi_3$ $l_4 = b_4 \sin \phi_4$ $l_5 = b_3 \sin \phi_5$ $l_6 = b_2 \sin \phi_6$ $l_7 = b_1 \sin \phi_7$ $l_8 = a_9 \operatorname{tg} \varphi_8$	$x_1 = x - l_1 - l_2 - l_3 - l_4 -$ $-l_5 - l_6 - l_7 - l_8$	$x < \frac{n_3 r_4}{n_0}$
К- слойный	$a_1 = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2}$ $a_2 = b_1 \cos \varphi_1$ <p>.....</p> $a_k = b_{k-1} \cos \varphi_{k-1}$ $a_{k+1} = b_k \cos \varphi_k$ $a_{k+2} = b_{k-1} \cos \varphi_{k+1}$ <p>.....</p> $a_{2k} = b_1 \cos \varphi_{2k-1}$ $a_{2k+1} = 2r_1 + L - \sum_{i=1}^{2k} a_i$	$l_1 = b_1 \sin \phi_1$ <p>.....</p> $l_k = b_k \sin \phi_k$ $l_{k-1} = b_{k-1} \sin \phi_{k+1}$ <p>.....</p> $l_{2k-1} = l_1 \sin \phi_{2k-1}$ $l_{2k} = a_{2k+1} \sin \varphi_{2k}$	$x_1 = x - \sum_{i=1}^{2k} l_i$	$x < \frac{n_{k-1} r_k}{n_0}$

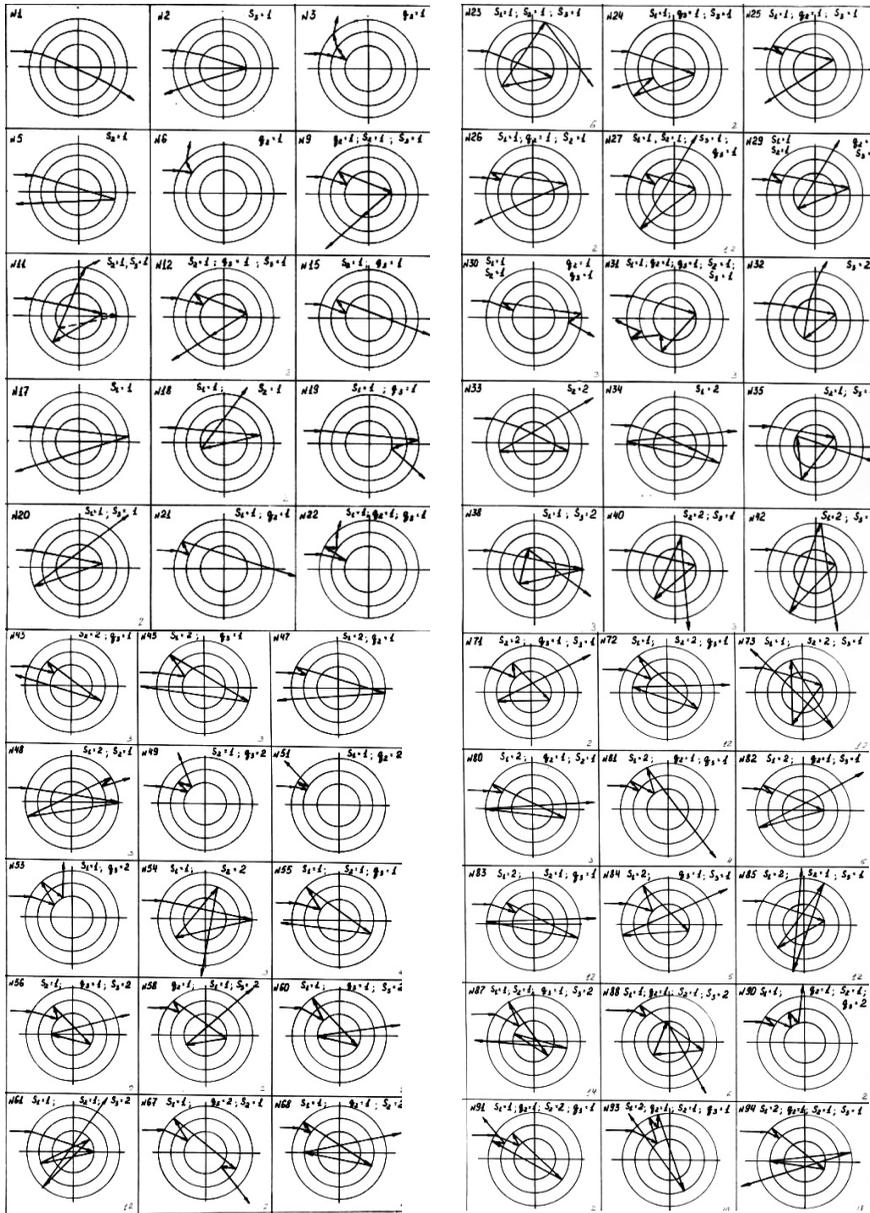


Рисунок 3. Основные характеристические лучи зондирования трехслойного ВС

Было проведено моделирование слоистых световодных структур, результаты которого представлены на рис. 4. Расчеты проводились для случая трехслойного ВС с радиусами слоев $R_1=600$ мкм, $R_2=400$ мкм, $R_3=100$ мкм показателями преломления внешней среды $n_0=1,15$ и слоев $n_2=1,4$, $n_3=1,6$. Расстояние до плоскости формирования результирующей картины выбрано постоянным и равно $L=100$ мм.

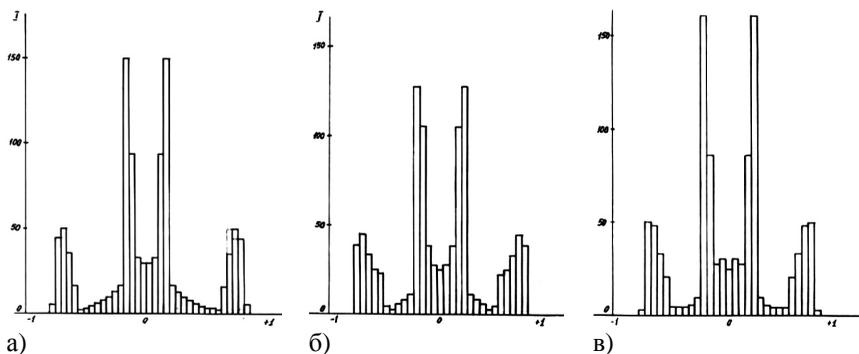


Рисунок 4. Картины рассеяния на трехслойных ВС

Исследовалось изменение показателя преломления первого слоя при $n_1=1,2$ (а), $n_1=1,19$ (б), $n_1=1,21$ (в). Как видно из результатов моделирования распределения интенсивности в ближней зоне метод является высоко чувствительным к изменению показателя преломления. Вариация n_1 в третьем знаке приводит к изменению интенсивности картины в зоне прохождения лучей, претерпевших преломление в сердцевине.

Список литературы:

1. Андросик А. Б., Воробьев С. А., Мировицкая С. Д. Основы волноводной фотоники. — М.: МГОУ, 2009. 246 с.
2. Андросик А. Б., Воробьев С. А., Мировицкая С. Д. Математические основы волноводной фотоники. — М.: МГОУ, 2011. 370 с.
3. Бутвина Л. Н. и др. Одномодовый микроструктурированный световод для среднего ИК диапазона. — Квантовая электроника. — 2007, 37. № 4.
4. Желтиков А. М. Оптика микроструктурированных волокон. — Москва, Наука, 2004.
5. Лазарев Л. П., Мировицкая С. Д. Контроль геометрических и оптических параметров волокон. — М.: Радио и связь, 1988. 280 с.
6. Мировицкая С. Д., Филиппов М. В. Исследование рефракции зондирующего пучка на диэлектрических цилиндрах различных типов. — Радиотехника. — 1987. № 11

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И Р-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕСКРИПТИВНЫХ АЛГЕБР ИЗОБРАЖЕНИЙ

Исхаков Алмаз Раилевич

*преподаватель ФГБОУ ВПО Башкирский государственный
педагогический университет им. М. Акмуллы, г. Уфа
E-mail: intellab@mail.ru*

Мигранов Наиль Галиханович

*д-р физ.-мат. наук, проф. ФГБОУ ВПО Башкирский государственный
педагогический университет им. М. Акмуллы, г. Уфа
E-mail: ufangm@yahoo.co.uk*

Кузнецова Елизавета Михайловна

Мухаметова Ираида Валерьевна

Галанов Вячеслав Александрович

*студенты ФГБОУ ВПО Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа
E-mail: KuznetsovaEM@yandex.ru*

Введение

Автоматизация обработки, анализа, оценивания и понимания информации, представленной в виде изображений, является одной из актуальной и узловой проблемой теоретической информатики, искусственного интеллекта и теории распознавания образов. Разнообразии применяемых методов не заменяет необходимости иметь некоторую регулярную основу для систематизации и выбора адекватных методов анализа изображений, единообразного представления обрабатываемых данных (изображений), отвечающих требованиям стандартных алгоритмов распознавания к исходной информации, построения математических моделей изображений, ориентированных на задачи распознавания, и в целом — наличия некоторого универсального языка для единообразного описания изображений и преобразований над ними. В рамках указанной проблемы ведущим направлением стала «алгебраизация» обработки, анализа и распознавания изображений [3, с. 100—109], заключающаяся в разработке и исследовании различных алгебр

изображений (АИ). Основной целью алгебраического подхода является построение теоретического аппарата, обеспечивающего представление изображений и преобразований над ними в виде алгебраических структур, позволяющих использовать в анализе и распознавании изображений математические методы [9, с. 518-541].

В области распознавания образов и анализа изображений выделяют следующие основные стадии «алгебраизации»: математическая морфология (Г. Матерон (Matheron), Ж. Серра (Serra) [1970-е]); алгебра алгоритмов (Ю. И. Журавлев [1970-е]); теория образов (У. Гренандер (Grenander) [1970-е]); теория категорий в области распознавания образов (М. Павел (Pavel) [1970-е]); АИ (Ж. Серра, С. Стернберг (Sternberg) [1980-е]); стандартная алгебра изображений (САИ) (Г. Риттер (Ritter) [1990-е]); дескриптивная алгебра изображений (ДАИ) (И. Гуревич [1990-е]); ДАИ1К (И. Гуревич, В. Яшина [2002 и далее]).

Разработанный к настоящему моменту времени математический аппарат ДАИ [9, с. 518—541] и ДАИ1К [8, с. 298—328] обладает рядом недостатков: неудобная терминология формальных обозначений, отсутствие конструктивности в описаниях методов и операций, обобщенное определение операции структуризации, слабая связь семантической и контекстной информации изображений и т. п. В данной статье предлагается формализованный подход к описанию параметрических преобразований и Р-представлений ДАИ.

Реализации изображений в ДАИ

Пусть объектом наблюдения является совокупность объектов или процессов действительности, которую будем называть сценой наблюдения или просто сценой. Изображение сцены может быть задано в разных форматах, которые называются его *реализациями* [9, с. 518–541]. Таким образом, *изображение I* может быть задано в виде совокупности его реализаций $\{I_{bin}, I_{gray}, I_{color}\}$, соответствующих бинарным, полутоновым и цветным (полноцветное или палитровое) изображениям:

1. $I_{bin} \stackrel{def}{=} \|a_{ij}\|$, где $(\forall i, j) [a_{ij} \in \{0, 1\}]$;
2. $I_{gray} \stackrel{def}{=} \|a_{ij}\|$, где $(\forall i, j) [a_{ij} \in \{0, \dots, 255\}]$;
3. $I_{color} \stackrel{def}{=} \|a_{ij}\|$, где $(\forall i, j) [(a_{ij} = \langle r, g, b \rangle) \wedge (r, g, b \in \{0, \dots, 255\})]$

По умолчанию цветные реализации представляются в полноцветной форме.

Параметрические преобразования в ДАИ

Параметрические преобразования, в отличие от процедурных преобразований, позволяют для заданного изображения вычислить значение заранее выделенного параметра, характеризующего содержимое исходного изображения в виде числа, числовой последовательности (вектора), матрицы, функции или аналитической зависимости и т. п.

Введем обозначения для параметрических представлений, как в случае с процедурными преобразованиями (табл. 1).

Таблица 1. Параметрические преобразования

№	Название параметрического преобразования для вычисления	Обозначение
1	детерминированного признака	$O_p^{\det erm} (; p)$, где p — числовая величина
2	вероятностного признака	$O_p^{probal} (; p)$, где $p \in \{m_i, u_j, g_k, \mathcal{E}, \dots\}$
3	структурного признака	$O_p^{struct} (; p_k)$, где $k \in \{border, area\}$

Согласно [3, с. 20-32], в качестве принципа классификации выберем «модальность» признаков, что обуславливает разделение множества всех возможных признаков на: детерминированные, вероятностные, логические и структурные. Из этого числа исключаются логические признаки, что обусловлено их отношением к системам принятия решений. Для простоты вычислений, в дальнейшем будут использованы бинарные или полутоновые реализации изображений.

Определение: Параметрическим преобразованием реализации изображения I_f с параметром V называется отображение

$$O_p^{parameter} (; v): I_f \rightarrow v, \quad \text{где}$$

$$parameter \in M_p = \{\det erm, probal, struct\} \quad \text{и}$$

$$f \in \{bin, gray, color\} \quad (*)$$

Элементы множества M_p являются обозначениями признаков соответственно: детерминированных, вероятностных, и структурных. Эта классификация не является универсальной, поэтому приведем дополнительные классификации, позволяющие рассмотреть разнообразие методов их вычисления с разных ракурсов:

1. по форме существования выделяются [3, с. 15-17]: количественные и качественные;
2. по типу значений выделяются: целые, рациональные, действительные, комплексные, символьные и сложные символьные (строчные или последовательности символов);
3. по виду области определения выделяются [4, с. 13-18]: дискретные и непрерывные;
4. по сложности выделяются: скалярные, векторные, матричные и тензорные;
5. по модальности выделяются [1, с. 201-230]; [7, с. 78-85]: физические, геометрические, функциональные и топологические;

В силу однотипности в структуре методов вычисления детерминированных признаков в статье их формализация не приводится, а в качестве символьных обозначений используется $O_p^{\text{determ}}(; p)$ или $O_p^{\text{determ}}(; \bar{p})$. Детерминированные признаки представляют собой частный случай вероятностных признаков [3, с. 32-34]. Так как некоторая величина считается вероятностной, если она может принимать не одно значение, а целое множество, то в таком аспекте детерминированный признак является вероятностной величиной, только с единственным значением, вероятность появления которого равна 1.

Под измерением вероятностного признака будем подразумевать процесс определения всех возможных значений с вероятностями их принятия. Кроме них в области компьютерного зрения [2, с. 143-184] используются также «статистические величины», к которым можно отнести: начальный и центральный моменты (математическое ожидание (среднее), среднеквадратичное отклонение, коэффициенты асимметрии и эксцесса), энтропия, значения минимального и максимального элементов анализируемого поля и размах (диапазон уровней). Рассмотрим реализации $I_f = \left\| x_{ij}^f \right\|$, где $f \in \{bin, gray, color\}$ изображения I и формализованные представления статистических характеристик с учетом принятой в ДАИ обозначений:

- начальные моменты k -го порядка —

$$O_p^{probal}(I_f; m_k) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij}^f)^k,$$

Согласно этой формулировке получаем ее частные случаи:

1. $m_1 = O_p^{probal}(I_f; m_1) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij}^f$ — начальный момент

1-го порядка;

2. $m_2 = O_p^{probal}(I_f; m_2) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij}^f)^2$ — начальный момент

2-го порядка;

3. $m_3 = O_p^{probal}(I_f; m_3) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij}^f)^3$ — начальный момент

4-го порядка;

4. $m_4 = O_p^{probal}(I_f; m_4) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij}^f)^4$ — начальный момент

4-го порядка;

- центральные моменты $u_k = O_p^{probal}(I_f; u_k)$

1. $u_2 = m_2 - m_1^2$ — центральный момент 2-го порядка. Откуда можно вычислить среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{u_2}$;

2. $u_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$ — центральный момент 3-го порядка;

3. $u_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$ — центральный момент 4-го

порядка;

- коэффициент асимметрии $g_1 = O_p^{probal}(I_f; g_1) = \frac{u_3}{\sigma^3}$;

- коэффициент эксцесса $g_2 = O_p^{probal}(I_f; g_2) = \frac{u_4}{\sigma^4} - 3$;

- энтропия $\mathcal{E} = O_p^{probal}(I_f; \mathcal{E}) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$, где

$$p_i = P(X = x_i);$$

- избыточность или относительная энтропия $\mathcal{E}_D = 1 - \frac{I}{I_0}$, где

$I_0 = \log_2(h_{\max} - h_{\min} + 1)$ и h_{\max}, h_{\min} — максимальный и минимальный уровни поля (для бинарной реализации $h = 2$, для полутоновой реализации $h = 256$);

К логическим признакам относятся, прежде всего, признаки, не имеющие количественного выражения. Они представляют собой суждения качественного характера на наличие или отсутствие некоторых свойств или некоторых элементов у распознаваемых объектов или явлений. Также логическим можно отнести признаки, у которых важна не величина признака, а лишь факт попадания или непадения ее в заданный интервал. В пределах этих интервалов появление различных значений признаков у распознаваемых объектов предполагается равновероятным. На практике логические признаки подобного рода имеют место в таких ситуациях, когда ошибками измерений можно пренебречь, либо интервалы значений признаков выбраны, что ошибки измерений не оказывают влияния на достоверность принимаемых решений относительно попадания измеряемой величины в заданный интервал [3, с. 10-43]. Вероятностные признаки сводятся к логическим признакам аналогично детерминированным; если бы логические признаки существовали как отдельная разновидность, то для измерения логических признаков разных типов нужно было бы разрабатывать отдельные измерители. Определение значения логического признака представляет собой простейшую систему принятия решений.

Структурные и логические признаки схожи в аспекте их формализованного представления. По сути, структурные признаки являются геометрическими объектами. Проведя аналогию между простейшими геометрическими объектами и символьными обозначениями высказываний, а также, установив взаимно однозначное соответствие логическими операциями и отношениями между геометрическими объектами, приходим к возможности записи сложного структурного объекта в форме предложения на естественном языке. Таким образом, структурный метод распознавания связан с использованием аналогии между структурой объектов и синтаксисом естественного языка. Под измерением структурного признака нужно понимать идентификацию непроеизводных элементов и связей между ними [3, с. 10-43].

Методы выделения непроеизводных элементов можно разделить на две группы. В первой из них делается упор на границы, а во второй – на области изображения. В настоящее время основным методом, используемым в описании границ, является цепные коды Фримена [5, с. 56—178]; [2, с. 203—213]. Но наряду с цепными кодами Фримена существуют и другие, например: 1) кодирование по трем признакам: длине текущего элементарного вектора, направлению поворота при переходе к следующему элементарному вектору и углу

между соседними элементарными векторами; 2) кодирование текущего элементарного вектора трехразрядным двоичным кодом (метод Фримена); 3) R-представление контура; 4) кодирование текущего элементарного вектора двумя его проекциями на оси координат (двухмерный код); 5) полигональное представление контура; 6) представление контура радиус-векторами, приведенными из центра тяжести фигуры; 7) представление контура в виде функции комплексного переменного; 8) представление элементарного вектора контура в плоскости квадратной сетки комплексными числами.

Ниже приведена текстовая формулировка алгоритма для бинарной реализации I_{bin} изображения I , использующего один из восьми способов кодирования: 1) наложить на изображение I равномерную сетку; 2) в качестве элементов границы выбрать те элементы реализации I_{bin} , более 50 % площади которых находится в пределах рассматриваемой фигуры; 3) выбрать из числа элементов реализации I_{bin} те, которые не являются внутренними (внешние элементы фигуры); 4) применить один из 8 способов кодирования последовательности выбранных на 3 шаге элементов. Результатом применения этого алгоритма будет последовательность кодов, описывающих граничные точки фигуры, изображенной на реализации I_{bin} .

Пусть дана бинарная реализация I_{bin} изображения I , т. е. $I_{bin} = \|\|x_{ij}\|\|$, где $x_{ij} \in \{0,1\}$. Следующая формализованная запись представляет математическую модель процедуры вычисления структурных признаков $\{q_1, \dots, q_m\}$ для бинарной реализации I_{bin} :

$$\begin{aligned} & \text{Alg}(I_{bin} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) \\ & \langle I_{bin} \Rightarrow A = \{ \langle x_{ij}, \langle i, j \rangle \} \mid (I_{bin} = \|\|x_{ij}\|\|) \wedge (x_{ij} \in \{0,1\}) \}, \\ & A \Rightarrow B^h = \{ \langle x_{kj}, \langle i, j \rangle \} \mid (\langle x_{kj}, \langle i, j \rangle \rangle \in A) \wedge [(k = \min(i)) \vee (k = \max(i))] \}, \\ & A \Rightarrow B^v = \{ \langle x_{il}, \langle i, j \rangle \} \mid (\langle x_{il}, \langle i, j \rangle \rangle \in A) \wedge [(l = \min(j)) \vee (l = \max(j))] \}, \\ & (B^h \cup B^v) \Rightarrow B = \text{Dom}(B^h \cup B^v), \\ & B \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\} \end{aligned}$$

Алгоритм представляет собой параметрическое преобразование:

$$\{q_1, \dots, q_m\} = O_P^{struct}(I_{bin}; \{q_1, \dots, q_m\}) = \text{Alg}(I_{bin} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow)$$

Другим не менее распространенным методом получения цепных кодов для границ является привлечение методов математической морфо-

логии [2, с. 351-395] на первом шаге алгоритма. Согласно той же самой исследовательской работе граница $\beta(A)$ множества A может быть вычислена путем выполнения сначала операции эрозии A по B , а затем получения разностного множества между A и результатом его эрозии:

$$\beta(A) = A \setminus (A \odot B),$$

где B — подходящий примитив, а роль множества A выполняет бинарная реализация I_{bin} . Ниже приведена математическая модель этой процедуры, которая уже является параметрической:

$$\begin{aligned} & Alg(I_{bin} \downarrow, \|\mu\| \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) \\ & \langle I_{bin} \Rightarrow I'_{bin} = I_{bin} \setminus (I_{bin} \odot \|\mu\|), \\ & I'_{bin} \Rightarrow B = \{ \langle x_{ij}, \langle i, j \rangle \rangle \mid (I_{bin} = \|x_{ij}\|) \wedge (x_{ij} \in \{0, 1\}) \}, \\ & B \Rightarrow C = Dom(B), \\ & C \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\} \end{aligned}$$

где $A = I_{bin}$ — исходное изображение, а $B = \|\mu\|$ — маска и параметр алгоритма.

В терминах параметрических преобразований для структурных признаков оно имеет вид:

$$\{q_1, \dots, q_m\} = O_p^{struct}(I_{bin}; \{q_1, \dots, q_m\}) = Alg(I_{bin} \downarrow, \|\mu\| \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow)$$

Эту же задачу можно решать с привлечением операторов, выполняющих дискретное дифференцирование [2, с. 396-443] при использовании процедурного преобразования с операцией фильтрации, где значением параметра является вектор параметров маски фильтра $\bar{\eta}$:

$$\begin{aligned} & Alg(I_{bin} \downarrow, \bar{\eta} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) \\ & \langle I_{bin} \Rightarrow I'_{bin} = O_T^{filter}(I_{bin}, \bar{\eta}), \\ & I'_{bin} \Rightarrow B = \{ \langle x_{ij}, \langle i, j \rangle \rangle \mid (I_{bin} = \|x_{ij}\|) \wedge (x_{ij} \in \{0, 1\}) \}, \\ & B \Rightarrow C = Dom(B), \\ & C \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\} \end{aligned}$$

где $\bar{\eta}$ — параметр алгоритма и параметры маски фильтра. В терминах параметрических преобразований для структурных признаков она имеет вид:

$$\{q_1, \dots, q_m\} = O_P^{struct}(I_{bin}; \{q_1, \dots, q_m\}) = \text{Alg}(I_{bin} \downarrow, \bar{\eta} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow)$$

Если рассмотрим процедурные преобразования на базе операции фильтрации, то параметр $\bar{\eta}$ может принимать векторное значение (n, m) , компоненты которого являются рангами матрицы-маски для линейных и нелинейных пространственных фильтров.

Более сложный случай описывает следующий алгоритм, когда он содержит в своей структуре два преобразования с параметрами (n, m) и η_0 . Тогда параметрическое преобразование со значением параметра $\bar{\eta} = \{(n, m), \eta_0\}$ над полутоновой реализацией изображения может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Alg}(I_{gray} \downarrow, \bar{\eta} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow) &= \text{Alg}(I_{gray} \downarrow, \{(n, m), \eta_0\} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow), \\ \langle I_{gray} \Rightarrow I'_{gray} = O_T^{filter}(I_{gray}, (n, m)), \\ I'_{gray} \Rightarrow I_{bin} = O_T^{gray \rightarrow bin}(I_{gray}, \eta_0), \\ I_{bin} \Rightarrow B = \{ \langle x_{ij}, \langle i, j \rangle \rangle \mid (I_{bin} = \|x_{ij}\|) \wedge (x_{ij} \in \{0, 1\}) \}, \\ B \Rightarrow C = \text{Dom}(B), \\ C \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\} \end{aligned}$$

Ее общая форма будет иметь вид:

$$\{q_1, \dots, q_m\} = O_P^{struct}(I_{gray}; \{q_1, \dots, q_m\}) = \text{Alg}(I_{gray} \downarrow, \{(n, m), \eta_0\} \downarrow; \{q_1, \dots, q_m\} \uparrow)$$

Отметим, что в данном параметрическом преобразовании использованы два процедурных преобразования: метод фильтрации полутоновой реализации I_{gray} с параметрами маски (n, m) , и метод пороговой конвертации полутоновой реализации I_{gray} в бинарную реализацию I_{bin} с параметром η_0 .

Р-представления в ДАИ

Для формализации Р-представлений обратимся к узловой работе И. Гуревича и В. Яшиной «Описательный подход к анализу изображений: модели изображений» [9, с. 518-541].

Определение [9, с. 518-541]: Параметрическим преобразованием $O_p \in \{\widetilde{O}_p\}$ над изображением I называется такая операция, применение которой к изображению I преобразовывает его в числовую характеристику p , которой можно сопоставить свойства геометрических объектов, яркостных характеристик или конфигураций, образующихся за счет регулярных повторений геометрических объектов и яркостных характеристик исходного изображения.

В таком случае, придерживаясь определения Т-представления и параметрического преобразования можно сформулировать следующее определение Р-представления. Аналогичное определение приведено в работе [9, с. 518-541].

Определение [9, с. 518-541]: Р-представлением $\mathfrak{R}_p(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ изображения I называется формальная схема, предназначенная для получения его числовой характеристики и построенная на основании контекстной и семантической информации $\{B\} \subset \{\widetilde{B}\}$ с помощью параметрических преобразований $\{O_p(\bar{\eta})\} \subset \{\widetilde{O}_p\}$ и структурирующих элементов $\{S(\bar{\mu})\} \subset \{\widetilde{S}\}$. Множество всех корректных Р-представлений обозначается $\{\mathfrak{R}_p(\bar{\eta}, \bar{\mu})\}$.

Определение: Реализацией Р-представления $\mathfrak{R}_p(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ изображения I называется применение представления $\mathfrak{R}_p(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ с выбранными значениями $(\bar{\eta} = \bar{\eta}_0, \bar{\mu} = \bar{\mu}_0)$ параметров преобразований, входящих в представление к реализациям исходного изображения $\{I_{bin}, I_{gray}, I_{color}\}$.

Любое корректное Р-представление из множества $\{\mathfrak{R}_p(\bar{\eta}, \bar{\mu})\}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_p(\overline{\eta_0}, \overline{\mu_0})(I_f) &= \mathfrak{R}_p(\overline{\eta_0}, (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n))(I_f) = \ll S(\cdot, (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n), O_p^{param}(\cdot, \overline{\eta_0})) \gg (I_f) = \times \\
&\times \ll O_p^{param}(\cdot, \overline{\eta_0}) \gg \left(S(\cdot, (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n))(I_f) \right) = \ll O_p^{param}(\cdot, \overline{\eta_0}) \gg \left(S(S(I_f, \mu_1), (\mu_2, \dots, \mu_n)) \right) = \times \\
&\times \ll O_p^{param}(\cdot, \overline{\eta_0}) \gg \left(S(I_f^1, (\mu_2, \dots, \mu_n)) \right) = \ll O_p^{param}(\cdot, \overline{\eta_0}) \gg \left(S(S(I_f^1, \mu_2), (\mu_3, \dots, \mu_n)) \right) = \times \\
&\dots \\
&\times \ll O_p^{param}(\cdot, \overline{\eta_0}) \gg \left(S(S(I_f^{n-2}, \mu_{n-1}), \mu_n) \right) = \ll O_p^{param}(\cdot, \overline{\eta_0}) \gg \left(S(I_f^{n-1}, \mu_n) \right) = \times \\
&\times \ll O_p^{param}(\cdot, \overline{\eta_0}) \gg \left(I_f^n \right) = O_p^{param}(I_f^n, \overline{\eta_0}) = \overline{\eta_0}
\end{aligned}$$

где $param \in M_p = \{det\ erm, \ probal, \ struct\}$ и $f \in \{bin, \ gray, \ color\}$.

Можно обойтись и без операции структуризации, вычислив значение искомого признака в исходном изображении. Приведем подробное математическую формулировку действий для следующей задачи: дана полутоновая реализация I_{gray} , нужно вычислить значение статистического момента 1-го порядка m_1 :

$$\begin{aligned}
Alg(I_{gray} \downarrow, \eta_0 \downarrow; m_1 \uparrow) &= \\
\left\langle I_{gray} \Rightarrow I_{bin} = \mathfrak{R}_T(\eta_0, *) \left(I_{gray} \right) = \ll O_T^{gray \rightarrow bin}(\cdot, \eta_0), S(\cdot, *) \gg (I_{gray}), \right. \\
\left. I_{bin} \Rightarrow m_1 = O_p^{probal}(I_{bin}; m_1) = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m I_{bin} = \frac{1}{n * m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|x_{ij}\| \right\rangle
\end{aligned}$$

Приведем формализованное описание процедуры вычисления значения структурного признака в форме окружности в полутоновой реализации I_{gray}

$$\begin{aligned}
Alg(I_{gray} \downarrow, (\eta_0, \mu_{i \ \acute{e}d\acute{o}c\acute{e} \ i \ \grave{i} \ \grave{n}\acute{o} \ \acute{u}} = \langle i_0, j_0, r \rangle) \downarrow; m_1 \uparrow) &= \\
\left\langle I_{gray} \Rightarrow I_{bin} = \mathfrak{R}_T(\eta_0, \mu_{i \ \acute{e}d\acute{o}c\acute{e} \ i \ \grave{i} \ \grave{n}\acute{o} \ \acute{u}}) \left(I_{gray} \right) = \ll O_T^{gray \rightarrow bin}(\cdot, \eta_0), S(\cdot, \mu_{i \ \acute{e}d\acute{o}c\acute{e} \ i \ \grave{i} \ \grave{n}\acute{o} \ \acute{u}}) \gg (I_{gray}), \right. \\
I_{bin} \Rightarrow B = \left\{ \langle x_{ij}, \langle i, j \rangle \mid (I_{bin} = \|x_{ij}\|) \wedge (\forall x_{ij} = 1) [(i - i_0)^2 + (j - j_0)^2 = r^2] \right\}, \\
B \Rightarrow \{q_1, \dots, q_m\}
\end{aligned}$$

Таким образом, можно записать любое отдельное действие, их комплекс или алгоритм решения поставленной задачи. Предлагаемая в данной диссертационной работе формализованная терминология

является удобным инструментом для математической записи задач преобразования и анализа изображений. В следующей главе данной работы рассмотрим использование предлагаемой терминологии в ДАИ для решения поставленных задач.

Заключение

В данной статье приведены теоретические положения, полученные А. Р. Исхаковым в ходе исследований по диссертационной работе. В число основных результатов, описанных в статье, входят: виды классификаций признаков, формализация процедурных преобразований, использующих методы вычисления статистических и структурных признаков в бинарных реализациях, формализация Р-представлений для вычисления детерминированных, статистических и структурных признаков. Полученные результаты являются важными для развития алгебраического подхода к обработке, анализу и распознаванию изображений.

Список литературы:

1. Воротников С. А. Информационные устройства робототехнических систем: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. — 384 с.
2. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде Matlab. М.: Техносфера, 2006
3. Горелик А. Л. Методы распознавания: Учеб. пособие для вузов / А. Л. Горелик, В. А. Скрипкин. — 4-е изд., испр. — М.: Высш. Шк., 2004. — 261 с.
4. Потапов А. С. Распознавание образов и машинное восприятие, 2007
5. Фу К. Структурные методы в распознавании образов, 1977
6. Фурман Я. А., Юрьев А. Н., Яншин В. В. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений, 1992
7. Хорн Б. К. П. Зрение роботов, 1989
8. I. B. Gurevich, V. V. Yashina. Operations of Descriptive Image Algebras with One Ring // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. Pleiades Publishing, Inc. 2006. — Vol.16, No.3. — P. 298-328.
9. I. B. Gurevich and V. V. Yashina. Descriptive Approach to Image Analysis: Image Models // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. — МАИК «Наука/Interperiodica»/Pleiades Publishing, Inc., 2008. — Vol.18, No.4. — P. 518—541.

2.4. ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНЖЕНЕРНОГО ДИСКРИМИНАНТА В ПРИКЛАДНЫХ РАСЧЕТАХ

Попова Людмила Сильвестровна

к.т.н., доцент, ФГБОУ ВПО «ВятГУ» г. Киров

Синицына Ольга Владимировна

к.т.н., доцент, ФГБОУ ВПО «ВятГУ» г. Киров

Основной задачей разработки сложносоставных плоских и пространственных обводов является создание их оптимальной математической модели в рамках существующих систем автоматизированного проектирования. Для модернизации систем автоматизированного расчета и управления работой различных объектов и процессов необходимы планомерные исследования в этой области.

Чтобы достигнуть оптимальных результатов на стадии проектирования самих объектов, принята следующая последовательность конструктивных действий:

1. на основании заданной графической информации и вводных технических условий проектируют математическую модель разрабатываемого объекта;
2. по полученным в результате апробации объекта эмпирическим данным, производится доработка его требуемых свойств.

При проектировании сложносоставных поверхностей обтекаемых технических конструкций типа судов и летательных аппаратов, прежде всего, необходимо учесть комплекс специальных требований. Особые условия, предъявляемые при конструировании обводов таких поверхностей с заданной степенью гладкости, определяют создание новых графических и аналитических алгоритмов их моделирования.

В предыдущих работах [2, с. 322] предлагается описывать сложные геометрические поверхности в матричной форме записи. Аналитическое описание поверхности в матричной форме обеспечивает достаточно высокую степень формализации решения

задач при стыковке кусков поверхностей с заданной степенью гладкости в плоскостях произвольного положения.

Для разработки сложносоставных поверхностей большое практическое применение нашли кривые и поверхности второго порядка, заданные в неявном виде. Если пространственный обвод составлен из поверхностей второго порядка, то линия касания кусков поверхностей также будет второго порядка.

Рассмотрим метод, основанный на использовании сегментов конических сечений, которые удовлетворяют условиям сопряжения и касания в нескольких точках. Как известно, кривые второго порядка можно получить сечением конической поверхности вращения различными плоскостями. В зависимости от расположения секущей плоскости и исходной конической поверхности получаем:

- окружность, если секущая плоскость расположена перпендикулярно оси вращения конуса;
- эллипс, если секущая плоскость пересекает все образующие конуса конуса;
- парабола, если секущая плоскость параллельна одной образующей конуса;
- гипербола, если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса.

Для получения искомого уравнения используются сегменты конических сечений, которые удовлетворяют условиям сопряжения и касания в нескольких заданных точках.

Конические сечения общего вида описываются уравнением второго порядка в неявной форме [3, с. 18]:

$$f = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

Вид кривой данного сечения определяется коэффициентами A B C D E L . Для того чтобы найти эти коэффициенты необходимо наложить пять независимых условий, и решить соответствующие уравнения для отношений этих коэффициентов к одному из них. Эта операция достаточно трудоемка.

Чтобы избежать решения системы уравнений можно воспользоваться классическим приемом, который показывает преимущества уравнений, заданных в неявном виде [4, с. 81].

Пусть два конических сечения (рис. 1) заданы уравнениями $f^1(x,y)=0$ и $f^2(x,y)=0$, или кратко $f^1=0, f^2=0$.

Эти кривые пересекаются в четырех точках, через которые можно провести пучок конических сечений, в том числе вырожденные конические сечения, которые получаются в результате пересечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину.

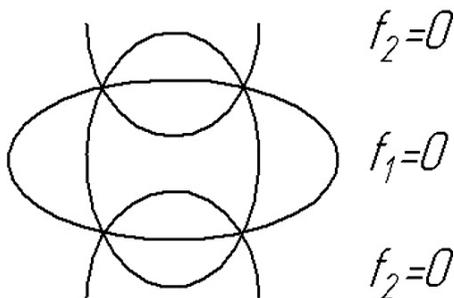


Рисунок 1.

Уравнение этого пучка имеет вид:

$$(1-\lambda)f^1+\lambda f^2=0,$$

где λ — инженерный дискриминант, с помощью которого можно регулировать форму кривых данного пучка.

Уравнение действительно для точек, принадлежащих $f^1=0$ и $f^2=0$. Это уравнение удовлетворяет еще одно коническое сечение, проходящее через точки пересечения кривых $f^1=0$ и $f^2=0$ при любых значениях λ .

В инженерном варианте кривая второго порядка может быть определена треугольником ABC и дискриминантом λ . Рассмотрим данное положение на примере (рис. 2). Зададим кривую l второго порядка точками A, C и F , а также касательными l_1 и l_2 (AB и BC) в точках A и C .

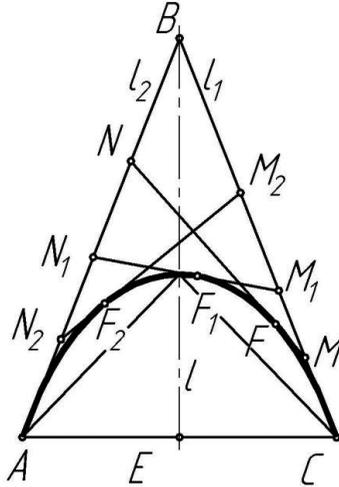


Рисунок 2.

Выберем точку F внутри треугольника ABC , тогда коническое сечение образует непрерывную кривую между точками A и C внутри треугольника. Если точка F делит пополам прямую, соединяющую середины отрезков AB и BC , то коническое сечение является параболой. Если F находится между этой параболой и прямой AC , то получается эллипс. Если же эта точка находится за пределами параболы, то получается гипербола.

Задавая исходное положение точки F определяем коэффициент λ , который находится из отношения:

$$FE/FB = \lambda,$$

где λ — инженерный дискриминант дуги AC кривой второго порядка, заданного соприкасающимся треугольником ABC и точкой F .

Выбирая различные положения точки F , можно задавать форму дуги проектируемой кривой второго порядка — эллипса, параболы, гиперболы.

Рассмотрим алгоритм проектирования кривой l , заданной координатами требуемого количества точек.

Известно, что данная кривая l проходит через точки A , C и F .

Прямые AB и BC (l_1 и l_2) — это касательные прямые к кривой l , проведенные в точках A и C , а прямые $M_i N_i$, касательные к кривой l в точках F_i .

Точка F , удовлетворяет системе трех отношений:

$$\begin{aligned}
 (\text{ANB}) &= \frac{AN}{NB} = f \\
 (\text{CMB}) &= \frac{CM}{MB} = \gamma \\
 (\text{NFM}) &= \frac{NF}{FM} = \mu
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Построим в любой точке Fi кривой l касательную прямую $Mi Ni$. Обозначим на ней отрезки FN и FM так, чтобы $NMK=\mu$. Если через полученные точки M и N провести касательные к кривой l , то получим треугольник ACB , в котором сохраняются равенства (2).

Представленный алгоритм дает возможность строить точки кривой l , находящиеся как внутри треугольника ACB , так и вне его.

Одной из задач современной прикладной геометрии является решение вопроса аналитического и графического задания замкнутых контуров сложных форм. При проектировании фюзеляжа самолета, конфигурация каждого сечения составляется из кривых второго порядка, которые имеют в местах соединения общие касательные и одинаковый радиус кривизны. Решение задачи сводится к построению кривых с помощью фигуры постоянных элементов, состоящих из точки F и соприкасающегося треугольника ABC [1, с. 45, 46].

Рассмотренный алгоритм позволяет получить уравнения кривых, аппроксимирующих с заданной точностью контуры теоретических поперечных сечений (например, контуры шпангоутов фюзеляжа самолета).

Разработанный нами математический аппарат геометрического моделирования сложносоставных обводов может быть также успешно применен для контроля вычислений траектории полета геометрических объектов на далекие расстояния.

Рассмотрим, например, варианты полетных траекторий летательного аппарата при перелете с одной планеты на другую. По геометрии Лобачевского, с учетом искривления пространства, траектория полета рассматриваемого объекта представляет собой одну из кривых на поверхности конуса — эллипс, гиперболу или параболу.

Если летательный аппарат должен облететь исследуемую планету и возвратиться, то его полетная траектория будет представлять собой эллиптическую кривую. При запланированной посадке объекта на планету аппарату следует совершать полет по параболе.

На рис. 3 рассмотрена условная полетная траектория летательного аппарата по вариантной кривой второго порядка AB .

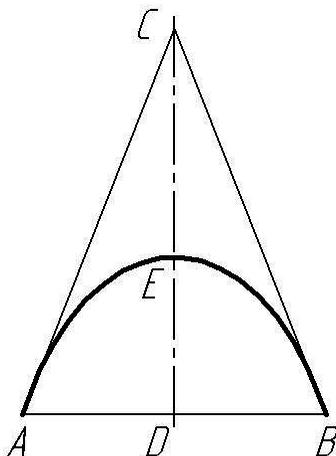


Рисунок 3.

Чтобы рассчитать перелет геометрического объекта из точки A в точку B по параболе, гиперболе или эллипсу используем отношения инженерного дискриминанта λ .

Для определения графического дискриминанта λ сформируем треугольник ABC . Сначала соединим точки A и B прямой линией, а затем в конечных точках дуги проведем касательные прямые и медиану CD . Отметим на медиане точку E , как точку пересечения медианы с дугой AB .

Отношение отрезков DE к CD называется графическим или инженерным дискриминантом λ .

Варианты значений отношений $\lambda = DE/CD$ инженерного дискриминанта и дают нам решения поставленной задачи.

Рассматриваемая точка E находится в треугольнике ABC и принадлежит коническому сечению, образующему непрерывную кривую между точками A и B внутри треугольника.

Если точка E делит пополам прямую, соединяющую середины отрезков AC и CB , то проходящее через эту точку коническое сечение является параболой.

Если точка E находится между этой параболой и прямой CD , то полученная кривая будет эллипсом.

Если же эта E точка находится за пределами параболы, то проходящая через эту точку коническая кривая будет гиперболой.

Таким образом, выбор точки E напрямую связан со значениями инженерного дискриминанта λ , который находится из отношения DE к CD .

Из аналитической геометрии известно, что по числовым значениям инженерного дискриминанта исходного соприкасающегося треугольника ACB с точкой E , определяется характер кривой второго порядка дуги AB

Например, если значение дискриминанта находится в пределах $0 < \lambda < 0,5$, то коническая кривая будет эллипсом. Если значение дискриминанта $\lambda = 0,5$, то расчетная кривая — парабола. А если значения инженерного дискриминанта рассматриваются в пределах от $0,5 < \lambda < 1$, то кривая второго порядка — гипербола.

Такой вариант моделирования траектории полета позволяет не только рассчитать траекторию пути летательного аппарата, но и сократить количество затратного топлива, уменьшить сопротивление внешних факторов, таких как температура, притяжение и так далее.

Таким образом, оптимальная математическая модель проектируемого обвода полетной кривой позволяет перейти к автоматической системе увязки задающих его параметров.

Опираясь на графические построения, следует разрабатывать всевозможные алгоритмы математического решения поставленных задач. Выбранный подход в процедуре формализации указанной выше задачи позволяет использовать менее энергоемкие программы, благодаря чему проектирование становится более экономичным.

Список литературы:

1. Левицкий В. С. Аналитические методы в инженерной графике [Текст] : учеб. пособие по курсу «Инженерная графика» для слушателей ФПКП / В. С. Левицкий. — М.: Изд-во МАИ, 1978. — С. 43-47.
2. Построение плоского обвода второго порядка с помощью инженерного дискриминанта [Текст] / Л. С. Попова, О. В. Сеницына // Наука — производство — технологии — экология : всеросс. ежегод. науч.-техн. конф.. Сб. материалов в 7 т. Т. 4. ФАМ, ФСА / ВятГУ. — Киров, 2008. — С. 321-323.
3. Попова Л. С. Некоторые вопросы проектирования поверхностей технических конструкций [Текст]: дисс. ... канд. техн. наук: 05.01.01:защищена 18.06.1981: утв. 30.09.1981/ Л. С. Попова. — М., 1978. — Библиогр.: с. 16-26.
4. Сеницына О. В. Матричные методы конструирования обводов и поверхностей [Текст]: дисс. ... канд. техн. наук: 05.01.01:защищена 12.01.1996: утв. 19.09.1995/ О. В. Сеницына. — М.: Изд-во МАИ, 1995. — С. 79-85.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ВЫСОКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ ПЛОТНОСТИ

Базык Елена Владимировна

преподаватель, ФГБОУ СПО «ГТМАУ», г. Георгиевск

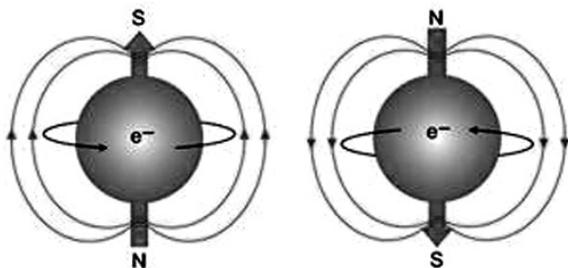
E-mail: geo-teh@mail.ru

С развитием средств вычислительной техники растет и будет расти спрос на запоминающие устройства небольших размеров, способных хранить большой объем информации. В этой связи проблема повышения информационной плотности записи — одна из важнейших проблем в производстве современных запоминающих устройствах большой емкости.

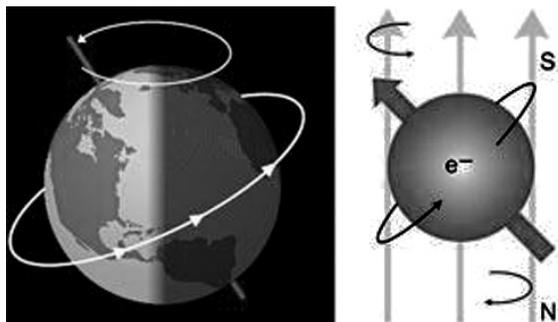
В последние годы все реже встречается термин «микроэлектроника», чаще мы слышим и читаем о нанофизике, наноэлектронике, нанотехнологиях. Теперь каждый знает, что приставка «нано» уменьшает обычный метр в миллиард раз. Однако не всем известны принципы функционирования наноустройств, таких как считывающие головки жестких дисков компьютера или сенсоры магнитного поля. Подобные устройства были бы невозможны без развития спинтроники — достаточно молодой, но уже весьма авторитетной науки, которая рассматривает использование квантовых эффектов в сверхэкономичных и сверхбыстрых спиновых устройствах ближайшего будущего.

Термин «спинтроника» произошел от англоязычного выражения «spin electronics» («спиновая электроника»; или как часто ее еще называют «магнитоэлектроникой»). Спинтроника — область науки, изучающая взаимодействие собственных магнитных моментов электронов (спинов) с электромагнитными полями и разрабатывающая на основе обнаруженных явлений и эффектов спинэлектронные приборы и устройства.

Начнем с понятия спина. В теории магнетизма считается, что электрон обладает квантовым свойством — спином, из-за чего он ведет себя подобно стрелке компаса, вращающейся вокруг своей оси и соединяющей его (электрона) южный и северный полюса. Спины электронов могут быть ориентированы в направлениях, которые обычно называют «спин-вверх» (мажорные спины) и «спин-вниз» (минорные спины, см. рис. 1). [4]



Если поместить электроны в магнитное поле, то их спины выстроятся вдоль направления поля. При этом они будут прецессировать (определенным образом вращаться) вокруг силовых линий — это явление можно сравнить с орбитальной прецессией нашей планеты (рис. 2). Если выключить поле, прецессия спина прекращается и его ориентация фиксируется. Другими словами, используя эффект прецессии, можно менять спиновое состояние электрона и тем самым изменять бит информации, переносимый электроном, с логического «0» на «1» и обратно. [4]



Отметим, что впервые в мире спин отдельного электрона «рассмотрели» ученые IBM Research Division (США), и произошло это в 2005 году. Для решения данной задачи они использовали так называемую магнитную резонансную силовую микроскопию (magnetic resonance force microscopy, MRFM). Но интерес исследователей к спиновой электронике возник еще в 1988 году, после открытия Бэйбичем (M.N.Baibich) эффекта гигантского магнитосопротивления в многослойных магнитных наноструктурах Fe/Cr, суммарная толщина которых составляла около 100 нм и количество слоев менялось от 3 до 50. Было обнаружено, что сопротивление многослойной структуры

Fe/Cr, в смежных магнитных слоях которой в отсутствие поля векторы намагниченности выстроены антипараллельно, уменьшается более чем на 50% под воздействием внешнего магнитного поля. Так как уменьшение сопротивления было столь велико, ученые назвали этот эффект гигантским магнитосопротивлением (далее – ГМС). Такое anomальное поведение сопротивления обусловлено различиями в поведении электронов «спин-вверх» и «спин-вниз» в указанных наноструктурах. Открытие эффекта ГМС позволило создать высокоточные сенсоры магнитного поля, а так же, считывающие головки жестких дисков, которые были выпущены в 1997 году компанией IBM и в настоящее время используются практически во всех жестких дисках. Открытие такого рода не только привело к прорыву в размерах жестких дисков, но и стало ключевым моментом в развитии современных портативных электронных устройств, таких как iPod.

В то время как обычные технологии основаны на использовании заряда электронов, то области спинтроники основываются на манипуляции спинон, одним из уникальных свойств которого является то, что спин может быть передан практически без протекания электрического заряда.

В ближайшие десять-пятнадцать лет кремниевые процессоры достигнут предела своих возможностей, и поэтому необходимо искать иные физические принципы, на которых будут построены быстродействующие устройства с низкими энергопотреблением и тепловыделением. В спинтронных устройствах переворот спина практически не требует затрат энергии, а в промежутках между операциями устройство отключается от источника питания. Если изменить направление спина, то кинетическая энергия электрона не изменится. Это означает, что тепла почти не выделяется. Скорость изменения положения спина очень высока. Эксперименты показали, что переворот спина осуществляется за несколько пикосекунд (триллионных долей секунды). [3, с. 87]

Спинтроника уже принесла много благодатных плодов. Так, в 2005 году компания Motorola начала массовое производство спинтронных модулей памяти MRAM (Magnetoresistance Random Access Memory — магниторезистивная память с произвольной выборкой). Главное отличие таких модулей — записанная информация не пропадает при отключении питания, так как электроны способны сохранять положение спина сколь угодно долго. MRAM уже нашла применение в сотовых телефонах, мобильных компьютерах, идентификационных картах. Кроме того, новую память используют

военные для управления боевыми ракетами и для контроля за космическими станциями. Высокоточные угловые, позиционные и скоростные спиновые сенсоры широко используются в автомобильных агрегатах и механизмах – например, в антиблокировочной тормозной системе, известной водителям как ABS (Antilock Braking System), благодаря которой автомобиль сохраняет прямолинейное направление движения при торможении на скользком дорожном покрытии. Современную компьютерную, теле- и видеотехнику невозможно представить без спинтронных устройств. Помимо жестких дисков, достижения спинтроники можно найти в персональных видеорекордерах (тюнерах для захвата видеосигнала с аналоговых устройств), аппаратуре телевидения высокой четкости (HDTV), DVD-приводах с интерференцией в ближнем поле (near field recording, NFR) при записи. [2, с. 29]

В ближайшее время ученые выделяют три основных направления развития спинтроники: квантовый компьютер, спиновый полевой транзистор и спиновая память. На сегодняшний день самым перспективным является разработка о спиновой памяти. Конечно, очень трудно представить модуль памяти, содержащий миллионы наноманитов, которые к тому же еще и не взаимодействуют друг с другом. Но есть альтернативное решение проблемы и оно подсказано более полувека назад самим Эйнштейном. Великий ученый предположил, что для быстро движущегося электрона электрическое поле будет выглядеть как магнитное. В 2004 физики подтвердили эту гипотезу, взяв два различных по составу полупроводника и образовав из них единую структуру путем напыления в вакууме. [1, с. 44] В результате в структуре возникали внутренние механические напряжения, приводящие к появлению электрического поля, которое и становится движущей силой для электронов. И чем сильнее это электрическое поле, тем более эффективно магнитное поле, заставляющее быстрее прецессировать спины электронов. Это может говорить о том, что у нас появляется возможность управлять углом наклона спинов, т.е. их фазой (направлением спина). Иначе говоря, направление спина необязательно принимает два фиксированных положения, соответствующих логическим «0» и «1» в классических бинарных компьютерах, а может иметь и промежуточные фазы. Тем самым позволяя перейти от битов к так называемым фитам (фазовым числам), способным принимать больше значений. Представьте себе, например, модуль памяти, в котором группы спинов направлены на север, юг, восток, запад, северо-восток, северо-запад, юго-восток и юго-запад. Всего восемь направлений, соответствующих восьми

фитам: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Чем точнее мы определим фит, тем большей плотности записи информации сможем достигнуть. Уже существует ряд методов точного определения фазового угла спинов, и можно ожидать, что сверхплотная, энергонезависимая и сверхбыстродействующая память не за горами.

Список литературы:

1. Рязанов В. В. Джозефсоновский π -контакт сверхпроводник-ферромагнетик-сверхпроводник как элемент квантового бита. УФН, 1999. Т.169. № 8. с.920.
2. Журнал технической физики, 2010, том 81, вып.5
3. Аплеснин С. С. Основы спинтроники: учебное пособие. Изд. Лань, 2010.-288с.
4. Журнал «Компьютерра» № 5 за 7 февраля 2006.
5. Maekawa S. (Ed) Concepts in Spin Electronics, 2006.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

«Математика и информационные технологии в современном мире»

Материалы международной заочной научно-практической
конференции

20 декабря 2011 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 27.12.11. Формат бумаги 60x84/16.
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 5,625. Тираж 550 экз.

Издательство «Сибирская ассоциация консультантов»
630082, г. Новосибирск, ул. Дачная, 21/1
E-mail: mail@sibac.info

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного
оригинал-макета в типографии «Априори»
630099, г. Новосибирск, ул. Романова, 28