



**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ЗАОЧНОЙ  
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ  
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ:  
ПРОБЛЕМЫ И ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ**

Новосибирск, 2012 г.

УДК 51+53+004  
ББК 22+32.81  
Ф 50

Рецензент — кандидат физико-математических наук, Зеленская Татьяна Евгеньевна, Югорский государственный университет (г. Ханты-Мансийск)

**Ф 50 «Физико-математические науки и информационные технологии: проблемы и тенденции развития»:** материалы международной заочной научно-практической конференции. (8 мая 2012 г.) — Новосибирск: Изд. «Сибирская ассоциация консультантов», 2012. — 144 с.

ISBN 978-5-4379-0086-4

Сборник трудов международной заочной научно-практической конференции «Физико-математические науки и информационные технологии: проблемы и тенденции развития» отражает результаты научных исследований, проведенных представителями различных школ и направлений современных физико-математических наук и информационных технологий.

Данное издание будет полезно аспирантам, студентам, исследователям в области физико-математических наук и информационных технологий и всем интересующимся актуальным состоянием и тенденциями развития данного направления науки.

ББК 22+32.81

ISBN 978-5-4379-0086-4

© НП «Сибирская ассоциация консультантов», 2012 г.

## **Оглавление**

<b>Секция 1. Математика</b>	<b>7</b>
<b>1.1. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление</b>	<b>7</b>
ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ Кауфова Амина Амильевна Кумыкова Светлана Каншубиевна	7
ИССЛЕДОВАНИЕ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ Копец Мирослав Михайлович	11
<b>1.2. Математическая физика</b>	<b>24</b>
ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ГАЗА НАД ЖИДКОСТЬЮ Ерунова Ирина Борисовна	24
<b>1.3. Теория вероятностей и математическая статистика</b>	<b>30</b>
ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА Бунтова Елена Вячеславовна Бунтова Оксана Сергеевна	30
<b>1.4. Математическая логика, алгебра и теория чисел</b>	<b>41</b>
О МАЛЫХ МОДЕЛЯХ В ПОЗИТИВНЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ЙОНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ Ешкеев Айбат Рафхатович	41
<b>1.5. Вычислительная математика</b>	<b>52</b>
О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ Карданова Муслимат Лиуановна	52

<b>1.6. Дискретная математика и математическая кибернетика</b>	<b>57</b>
ГЕНЕРАЦИЯ N-ОЙ ПЕРЕСТАНОВКИ В ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ	57
Броницкая Наталья Анатольевна Дармосюк Валентина Николаевна Бережецкая Виктория Геннадиевна	
<b>Секция 2. Информационные технологии</b>	<b>62</b>
<b>2.1. Системный анализ, управление и обработка информации</b>	<b>62</b>
АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ВИДИМОСТИ ОБЪЕКТОВ НА ПЛАНЕ	62
Лукоянов Сергей Владимирович Белов Сергей Валерьевич	
АНАЛИЗ КОРРЕКТНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПРИЗНАКАМИ	68
Мазорчук Мария Сергеевна Сухобрус Анатолий Андреевич Добряк Виктория Сергеевна	
ИСТОРИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ МУЗЫКАЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИИ	73
Славщик Арсений Алексеевич	
<b>2.2. Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами</b>	<b>82</b>
РАЗРАБОТКА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОВЕТУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛИКВИДАЦИЕЙ ПОСЛЕДСТВИЙ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ: НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ	82
Цуриков Александр Николаевич	
<b>2.3. Теоретические основы информатики</b>	<b>90</b>
СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАГРУЖЕННОСТИ ГОРОДСКИХ ДОРОГ	90
Вялых Константин Михайлович	

**2.4. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ 97**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ 97

Морозова Светлана Васильевна  
Абакумова Наталья Александровна

ПОСТРОЕНИЕ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ДИСФУНКЦИИ ИММУННОЙ СИСТЕМЫ У ПАЦИЕНТОВ С ДИСПЛАЗИЕЙ СОЕДИНИТЕЛЬНОЙ ТКАНИ ПРИ ПОМОЩИ ЦЕНТРОИДНОГО МЕТОДА 103

Глотов Андрей Васильевич  
Гольяпин Виктор Викторович  
Москвитин Александр Владимирович

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ НЕЛИНЕЙНО ТЕРМО-НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОГО СТЕРЖНЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА И ТЕПЛООБМЕНА 110

Жумадиллаева Айнур Канадиловна  
Кудайкулов Анарбай Кудайкулович  
Ташенова Жулдыз Мусагуловна  
Нурлыбаева Эльмира

**2.5. Методы и системы защиты информации, информационная безопасность 118**

УСТОЙЧИВОСТЬ САРТСНА К АВТОМАТИЧЕСКОМУ РАСПОЗНАВАНИЮ 118

Маннапова Торгын Мендикуловна  
Исекетов Ержан Садыкович  
Кинцель Дмитрий Александрович

ОЦЕНКА И ИЗМЕРЕНИЕ УЯЗВИМОСТЕЙ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМАХ 122

Зайко Татьяна Анатольевна  
Бельмега Артем Валериевич

<b>Секция 3. Физические науки</b>	<b>128</b>
<b>3.1. Кристаллография, физика кристаллов</b>	<b>128</b>
ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ДИСЛОКАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ НА ОПТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ ИОННЫХ КРИСТАЛЛОВ	128
Карьев Леонид Геннадьевич Фёдоров Виктор Александрович Новиков Виктор Петрович	
<b>3.2. Физика полупроводников</b>	<b>137</b>
ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ОСАЖДЕНИЯ НА СТРУКТУРУ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛЕНОК ОКСИДА ЦИНКА	137
Аль-Обайди Надир Джасим Рабданов Муртазали Хулатаевич <b><u>Рабданов Рабадан Абдулкадырович</u></b> Алиев Иса Шамсудинович Исмаилов Абубакар Магомедович	

## СЕКЦИЯ 1.

### МАТЕМАТИКА

#### 1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

##### ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

*Кауфова Амина Амильевна*

*студентка 2 года обучения в магистратуре  
по направлению «Уравнения в частных производных»*

*КБГУ г. Нальчик*

*E-mail: [azamatkaufov96@mail.ru](mailto:azamatkaufov96@mail.ru)*

*Кумыкова Светлана Канишубиевна*

*канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функции и  
функционального анализа, КБГУ, г. Нальчик*

**Цель исследования:** доказать единственность и существование решения поставленной задачи.

**Результаты исследования:**

Рассматривается уравнение

$$\operatorname{sign}y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, m \equiv \text{const} > 0 \quad (1)$$

в области  $D = D_1 \cup D_2 \cup J$  плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , где  $D_1$  - полуплоскость  $y > 0$ ,  $D_2$  — конечная область полуплоскости  $y < 0$ , ограниченная характеристиками  $AC, BC$  уравнения (1), выходящими из точек  $A(0,0), B(1,0)$ , и отрезком  $AB$  прямой  $y = 0$ ;  $J$  — интервал  $0 < x < 1$  прямой  $y = 0$ .

**Задача.** Найти функцию  $u(x, y)$  со следующими свойствами:

1.  $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup J_1 \cup J_2) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$ , причем  $u(\infty) = 0$ ,  $u_y(x, y)|_{y=\infty}$ ,  $u_x(x, y)|_{x=\infty}$  ограничены,  $u_y(x, 0)$  при  $x = 0$ ,  $x = 1$  может обращаться в бесконечность порядка  $1 - 2\varepsilon$ , где  $\varepsilon = \frac{m}{2m+4}$ ;

2.  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1) в  $D_1 \cup D_2$  и краевым условиям

$$u_y(x, 0) = \varphi_i(x), \forall x \in J_i, i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\alpha(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}u[\theta_0(x)] + \beta(x)D_{x1}^{1-\varepsilon}u[\theta_1(x)] + \gamma(x)u(x, 0) + c(x)u_y(x, 0) = d(x), \forall x \in J, \quad (3)$$

где:  $J_1 = \{(x, y): -\infty < x < 0, y = 0\}$ ,  $J_2 = \{(x, y): 1 < x < \infty, y = 0\}$ ,

$\theta_0(x), \theta_1(x)$  — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки  $(x, 0) \in J$  с характеристиками АС и ВС соответственно,  $D_{0x}^1, D_{x1}^1$  — операторы дробного в смысле Римана — Лиувилля интегро — дифференцирования [4];

$\varphi_i(x), \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), c(x), d(x)$  — заданные функции, причем

$$\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) + c^2(x) \neq 0, \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), c(x), d(x) \in C^1(\bar{J});$$

$\varphi_i(x) \in C(J_i)$  и могут обращаться в бесконечность порядка не выше  $1 - 2\varepsilon$  при  $x=0$  и  $x=1$ , а при достаточно больших  $|x|$  удовлетворяют неравенству  $|\varphi_i(x)| \leq M|x|^{-1-\sigma}$ , где  $M, \sigma = \text{const}, \sigma > 0$ .

Вопросы однозначной разрешимости задачи (1)—(3) в ограниченной и неограниченной областях исследовались в работах Кумыковой С. К. [2] и Денисовой З. Г. [1] при  $\gamma(x) = c(x) = 0$ .

Задача (1)—(3) относится к классу задач со смещением А. М. Нахушева [3].

Результатом работы является доказательство теоремы единственности.

**Теорема единственности.** В области  $D$  не может существовать более одного решения задачи (1)—(3), если выполняются условия

$$A_1(x) = (1-x)^\varepsilon \alpha(x) + x^\varepsilon \beta(x) - \frac{1}{c_1} x^\varepsilon (1-x)^\varepsilon c(x) \neq 0, \quad (4)$$

$$\left[ \frac{(1-x)^\varepsilon \alpha(x)}{A_1(x)} \right]' \leq 0, \left[ \frac{x^\varepsilon \beta(x)}{A_1(x)} \right]' \geq 0, \frac{\gamma(x)}{A_1(x)} \geq 0, \quad (5)$$

где:

$$c_1 = \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left( \frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon}.$$

**Доказательство.** Пусть  $u(x, y)$  решение задачи, удовлетворяющей однородным граничным условиям

$$\begin{aligned}
u_y(x, 0) &= 0, \forall x \in J_1 \cup J_2, \\
\alpha(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}u[\theta_0(x)] + \beta(x)D_{x1}^{1-\varepsilon}u[\theta_1(x)] + \\
&+ \gamma(x)u(x, 0) + c(x)u_y(x, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^m u u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u u_y) - y^m u_x^2 - u_y^2 = 0$$

по области  $D_1$  и учитывая, что  $u(\infty) = 0, u_y(x, 0) = 0, \forall x \in J_1 \cup J_2$ , после некоторых преобразований получаем

$$\iint_{D_1} [y^m (u_x)^2 + (u_y)^2] dx dy + \int_0^1 v(x) \tau(x) dx = 0, \quad (6)$$

где:  $v(x) = u_y(x, 0), \forall x \in J, \tau(x) = u(x, 0), \forall x \in \bar{J}$ .

При выполнении условий теоремы интеграл [2]

$$J^* = \int_0^1 v(x) \tau(x) dx \geq 0.$$

Тогда, решение задачи (1) — (3) единственно, так как  $u(x, y) \equiv 0$  в  $D_2$  как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в  $D_1$  как решение однородной задачи  $u_y(x, 0) = 0, \forall x \in J_1 \cup J \cup J_2$ .

Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения

$$\begin{aligned}
A(x)v(x) + \frac{B(x)}{\pi i} \int_0^1 \frac{v(t) dt}{t-x} + \int_0^1 K(x, t)v(t) dt + \\
+ k\gamma(x) \int_0^1 \frac{v(t) dt}{|t-x|^{2\varepsilon}} = F(x), \quad (6)
\end{aligned}$$

где:  $A(x) \neq 0, A(x), B(x), \gamma(x) \in C^1(J), F_1(x) \in C^1(J)$  и при  $x \rightarrow 0$  или  $x \rightarrow 1$  может обращаться в бесконечность порядка ниже  $1 - 2\varepsilon$ . Ядро  $K(x, t)$  имеет слабую особенность и допускает оценку

$$|K_1(x, t)| \leq \frac{|(1-x)^{1-\varepsilon-\varepsilon_1} \bar{\alpha}(x) - x^{1-\varepsilon-\varepsilon_1} \bar{\beta}(x)|}{|t-x|^{2\varepsilon} [x(1-x)]^{1-\varepsilon-\varepsilon_1}}.$$

Действительно,

$$K(x, t) - K(x, x) = \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)} \left[ \left( \frac{t}{x} \right)^{1-2\varepsilon} - 1 \right] x^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\alpha}(x) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k}{\Gamma(\varepsilon)} \left[ \left( \frac{1-t}{1-x} \right)^{1-2\varepsilon} - 1 \right] (1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\beta}(x) = \\
& = \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)} \left[ \frac{t^{1-2\varepsilon} - x^{1-2\varepsilon}}{x^{1-2\varepsilon}} \right] x^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\alpha}(x) - \\
& -\frac{k}{\Gamma(\varepsilon)} \left[ \frac{(1-t)^{1-2\varepsilon} - (1-x)^{1-2\varepsilon}}{(1-x)^{1-2\varepsilon}} \right] (1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\beta}(x).
\end{aligned}$$

Известно, что

$$|u^p - v^p| \leq |u - v|^p$$

для любых  $p \leq 1$  и  $u, v \geq 0$ .

Отсюда

$$\begin{aligned}
K(x, t) - K(x, x) & \leq \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{|t-x|^{1-2\varepsilon}}{x^{1-2\varepsilon}} x^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\alpha}(x) - \\
& - \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{|x-t|^{1-2\varepsilon}}{(1-x)^{1-2\varepsilon}} (1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\beta}(x) = \\
& = \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)} \left[ |t-x|^{1-2\varepsilon} x^{\varepsilon_1+\varepsilon-1} \bar{\alpha}(x) - |x-t|^{1-2\varepsilon} x^{\varepsilon_1+\varepsilon-1} \bar{\beta}(x) \right].
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{K(x, t) - K(x, x)}{t-x} & \leq \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)} \left[ \frac{\bar{\alpha}(x)}{x^{1-\varepsilon-\varepsilon_1} |t-x|^{2\varepsilon}} - \frac{\bar{\beta}(x)}{(1-x)^{1-\varepsilon-\varepsilon_1} |t-x|^{2\varepsilon}} \right] = \\
& = \frac{k}{\Gamma(\varepsilon)} \left[ \frac{(1-x)^{1-\varepsilon-\varepsilon_1} \bar{\alpha}(x) - x^{1-\varepsilon-\varepsilon_1} \bar{\beta}(x)}{|t-x|^{2\varepsilon}} \right] \frac{1}{[x(1-x)]^{1-\varepsilon-\varepsilon_1}}.
\end{aligned}$$

Подвижная особенность ядра  $K_1(x, t)$  равна  $2\varepsilon$ , неподвижная  $1 - \varepsilon - \varepsilon_1$ . Сумма подвижной и неподвижной особенностей в ядре  $2\varepsilon + 1 - \varepsilon - \varepsilon_1 = 1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon)$ . Эта особенность меньше 1.

Действительно,  $1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon) < 1$  при  $\varepsilon_1 - \varepsilon > 0$ , то есть  $\varepsilon_1 > \varepsilon$ , что выполняется по условию задачи.

Условие

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( c_1 + \frac{k\pi}{\Gamma(\varepsilon)} \right) [x^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\alpha}(x) + (1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\beta}(x)] - c(x) \right]^2 + \\
& + \frac{\pi^2 k^2}{\Gamma^2(\varepsilon)} [x^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\alpha}(x) + (1-x)^{\varepsilon_1-\varepsilon} \bar{\beta}(x)]^2 \neq 0
\end{aligned}$$

гарантирует существование регуляризатора, приводящего уравнение (6) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого будет следовать из единственности решения задачи. По найденному  $\tau(x)$  можно определить  $\nu(x)$  и решение задачи (1) — (3) в областях  $D_1$  и  $D_2$  по формулам

$$u(x, y) = -k \int_{-\infty}^{\infty} \nu_1(t) \left[ (t-x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{-\varepsilon} dt, \quad (7)$$

где:

$$k = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{4}{m+2} \right)^{2\varepsilon} \frac{\Gamma^2(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)},$$

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)} \int_0^1 \tau \left[ x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{\varepsilon-1} dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} y \int_0^1 \nu \left[ x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{-\varepsilon} dt.$$

**Вывод:** в данной работе доказана однозначная разрешимость задачи со смещением для обобщенного уравнения Трикоми в неограниченной области.

### Список литературы:

1. Денисова З. Г. Об одной задаче со смещением для уравнения  $signy|y|^m u_{xx} + U_{yy} = 0$  в неограниченной области. // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14. № 1. — С. 170—173.
2. Кумыкова С. К. Об одной задаче с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10. — № 1, — С. 78—88.
3. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. — 1969. — Т. 5. — № 1. — С. 44—59.
4. Hardy G., Littlwood J., Somme properties off ractional integrals // Math/ Zs. — 1928. — Bd 27. — № 4. — P. 565—606.

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*Конец Мирослав Михайлович*

*канд. физ.-мат. наук, доцент НТУУ «КПИ», г. Киев, Украина*

*E-mail: [miroslav1941@windowslive.com](mailto:miroslav1941@windowslive.com)*

### 1. Введение

Дифференциальное уравнение Риккати — это дифференциальное уравнение первого порядка, правая часть которого представляет собой квадратный трехчлен относительно неизвестной функции. Таким названием это уравнение обязано статье итальянского математика Якопо Франческо Риккати, опубликованной в 1724 году [14]. Несмотря на прошедшие почти три столетия, интерес к уравнению Риккати

несколько не ослабевает. В первую очередь к уравнениям Риккати приводят задачи оптимального управления, задачи теории дифференциальных игр, задачи построения оптимальных фильтров Калмана — Бьюси, двухточечные краевые задачи с использованием метода прогонки. Также уравнения Риккати появляются при решении задач динамики процессов в сплошных средах, задач теории теплопроводности и диффузии, задачи нахождения решений матричных телеграфных уравнений. В основном, в перечисленных выше случаях, как правило, приходится исследовать матричные дифференциальные уравнения Риккати, в которых неизвестная зависит только от одной переменной. Такая ситуация возникает тогда, когда рассматриваются системы со сосредоточенными параметрами. Именно для таких случаев основные свойства матричных дифференциальных уравнений Риккати изучены наиболее полно [1]—[6], [10]—[13]. Для математических моделей систем с распределенными параметрами возникают матричные дифференциальные уравнения Риккати с частными производными [7], [9], [12], матричные интегродифференциальные уравнения Риккати, которые менее исследованы по сравнению с обычными матричными дифференциальными уравнениями Риккати.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается следующая система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{R}(t,x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t,x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t,x) - \mathbf{R}(t,x) \mathbf{B} - \mathbf{F}, \\ \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t,x) = \mathbf{R}(t,x) \mathbf{A}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{F}$  — заданные матрицы размера  $n \times n$ ,  $\mathbf{D}$  — заданная матрица размера  $n \times m$ ,  $\mathbf{G}$  — заданная симметричная положительно определенная матрица размера  $m \times m$  (поэтому существует матрица  $\mathbf{G}^{-1}$ ), причем все эти пять матриц — постоянные (их элементами являются действительные числа),  $\mathbf{F}$  — симметричная неотрицательно определенная матрица размера  $n \times n$ , символы  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}^*$  и  $\mathbf{D}^*$  соответственно обозначают транспонированные матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$ . Заданы действительные числа  $T > 0$  и  $l > 0$  такие, что  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Искомая матричнозначная функция  $\mathbf{R}(t,x)$  при каждой упорядоченной паре  $(t,x)$  фиксированных значений  $t$  и  $x$  имеет размер  $n \times n$  и удовлетворяет условию

$$\mathbf{R}(T,x) = \mathbf{M}, \quad (2)$$

где:  $\mathbf{M}$  — симметричная неотрицательно определенная матрица размера  $n \times n$ .

Задача (1)—(2) обязана своим возникновением следующей задаче оптимизации: найти управление  $\mathbf{u}(t, x)$ , на котором реализуется минимум функционала

$$I(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} \mathbf{z}(T, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \left[ \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \mathbf{u}(t, x) \right] dx dt$$

при условии, что состояние  $\mathbf{z}(t, x)$  управляемой системы является решением системы уравнений с частными производными

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t, x),$$

удовлетворяет начальному условию  $\mathbf{z}(0, x) = \mathbf{z}_0(x)$  и краевым

условиям  $\mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{g}(t)$ ,

$$\mathbf{z}(t, l) = \mathbf{h}(t),$$

где  $n$  — мерные векторнозначные функции  $\mathbf{g}(t)$ ,  $\mathbf{h}(t)$ ,  $\mathbf{z}_0(x)$  заданы,  $n$  — мерная векторнозначная функция  $\mathbf{z}(t, x)$  должна быть найдена. По аналогии с конечномерным случаем первое уравнение системы (1) естественно назвать матричным дифференциальным уравнением Риккати с частными производными [7].

### 3. Основные свойства матричного дифференциального уравнения Риккати с частными производными

Рассмотрим следующее матричное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) - \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F} \quad (3)$$

с дополнительными условиями

$$\mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) = \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A} \quad (4)$$

и

$$\mathbf{R}(T, x) = \mathbf{M} \quad (5)$$

Предположим, что задача (3)—(5) имеет единственное решение. Если в уравнении (3) выполнить операцию транспонирования, то получим

$$\frac{\partial \mathbf{R}^*(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{R}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} + \mathbf{R}^*(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}^*(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}^*(t, x) - \mathbf{R}^*(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F} \quad (6)$$

Из условия (4) имеем  $\mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) = \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}$ . Поэтому  $\mathbf{R}^*(t, x) \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \mathbf{R}^*(t, x)$  и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{R}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}^*(t, x)}{\partial x}. \quad (7)$$

Кроме того, в силу симметричности матрицы  $\mathbf{M}$  имеем

$$\mathbf{R}^*(T, x) = \mathbf{M}. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (6) и принимая во внимание равенство (8), видим, что  $\mathbf{R}(t, x)$  и  $\mathbf{R}^*(t, x)$  являются решениями одной и той же задачи (3) — (5). В силу единственности решения этой задачи приходим к выводу, что  $\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{R}^*(t, x)$ . Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если задача (3)—(5) имеет единственное решение, то тогда справедливо равенство  $\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{R}^*(t, x)$ , то — есть для каждой упорядоченной фиксированной пары  $(t, x)$ , где  $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$ , решение  $\mathbf{R}(t, x)$  является симметрической матрицей порядка  $n \times n$ .

**Теорема 2.** Решение  $\mathbf{R}(t, x)$  задачи (3) — (5) можно представить в следующем виде

$$\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x), \quad (9)$$

где: функции  $\mathbf{P}(t, x)$  и  $\mathbf{S}(t, x)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x), \\ \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{F} \mathbf{S}(t, x) \end{cases} \quad (10)$$

и дополнительному условию

$$\mathbf{P}(T, x) \mathbf{S}^{-1}(T, x) = \mathbf{M} \quad (11)$$

при условии, что матричнозначная функция  $\mathbf{S}^{-1}(t, x)$  существует.

**Доказательство.** Ищем решение уравнения (3) в виде произведения

$$\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x), \quad (12)$$

где:  $\mathbf{P}(t, x)$  и  $\mathbf{Q}(t, x)$  — пока неизвестные функции. Непосредственно из соотношения (12) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}(t, x) + \mathbf{P}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \quad (13)$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}(t, x) + \mathbf{P}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x}. \quad (14)$$

Подставляя (12), (13) и (14) в уравнение (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}(t, x) + \mathbf{P}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}(t, x) + \mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} + \\ + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) - \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь предположим, что существует матричнозначная функция  $\mathbf{Q}^{-1}(t, x)$ . После умножения справа уравнения (7) на матрицу  $\mathbf{Q}^{-1}(t, x)$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} + \mathbf{P}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \\ + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}^{-1}(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{B} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) - \mathbf{F} \mathbf{Q}^{-1}(t, x). \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} + \\ + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) - \\ - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{B} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) - \mathbf{F} \mathbf{Q}^{-1}(t, x), \end{aligned} \quad (17)$$

поскольку имеет место равенство  $\mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) = \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{A}$ , и, поэтому, справедливо также и равенство  $\mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) = \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1}(t, x)$ .

Очевидно, что уравнение (9) переписать так

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} - \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{F} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \\ = \mathbf{P}(t, x) \mathbf{Q}(t, x) \left[ -\mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \right. \\ \left. + \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{B} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Равенство (18) будет иметь место, если одновременно выполняются следующие два равенства

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} - \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{F} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) = 0 \quad (19)$$

и

$$-\mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{B} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) = 0. \quad (20)$$

Дальше в уравнениях (19) и (20) сделаем замену  $\mathbf{s}(t, x) = \mathbf{Q}^{-1}(t, x)$ .

Поскольку справедливы следующие равенства

$$\frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} = -\mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} = -\mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}^{-1}(t, x),$$

то с учетом этих замечаний совокупность уравнений (19) и (20) можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x), \\ \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{F} \mathbf{S}(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) \end{cases} \quad (21)$$

Наконец, из равенств  $\mathbf{R}(T, x) = \mathbf{P}(T, x) \mathbf{S}^{-1}(T, x)$  и  $\mathbf{R}(T, x) = \mathbf{M}$  получаем  $\mathbf{P}(T, x) \mathbf{S}^{-1}(T, x) = \mathbf{M}$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 3.** Если рассмотреть блочную матрицу  $\mathbf{H}$  размера  $2n \times 4n$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & -\mathbf{B}^* & \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{bmatrix}, \quad (22)$$

то систему уравнений (21) можно записать в следующем виде

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(t, x) \\ \mathbf{P}(t, x) \\ \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где  $\mathbf{0}$  — квадратная матрица размера  $n \times n$ , все элементы которой равны нулю.

**Доказательство.** Действительно, путем непосредственного вычисления находим

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(t, x) \\ \mathbf{P}(t, x) \\ \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & -\mathbf{B}^* & \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(t, x) \\ \mathbf{P}(t, x) \\ \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} \\ -\mathbf{F} \mathbf{S}(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Подобным образом устанавливается и следующее утверждение.

**Теорема 4.** С помощью матрицы (15) систему (1) можно записать в блочной форме

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}(t,x) & \mathbf{I} \\ \mathbf{R}(t,x) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(t,x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} & \mathbf{R}(t,x) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размера  $n \times n$ ,  $\mathbf{0}$  — квадратная матрица размера  $n \times n$ , все элементы которой равны нулю.

**Доказательство.** В самом деле, имеем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^* & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & -\mathbf{B}^* & \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(t,x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} & \mathbf{R}(t,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}(t,x) & \mathbf{A} \\ -\mathbf{F} - \mathbf{B}^*\mathbf{R}(t,x) + \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} & \mathbf{A}^*\mathbf{R}(t,x) \end{bmatrix}$$

Дальше находим

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\mathbf{R}(t,x) & \mathbf{I} \\ \mathbf{R}(t,x) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}(t,x) & \mathbf{A} \\ -\mathbf{F} - \mathbf{B}^*\mathbf{R}(t,x) + \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} & \mathbf{A}^*\mathbf{R}(t,x) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}(t,x)\mathbf{B} + \mathbf{R}(t,x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}(t,x) - \mathbf{F} - \mathbf{B}^*\mathbf{R}(t,x) + \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} \\ \mathbf{R}(t,x)\mathbf{A} - \mathbf{A}^*\mathbf{R}(t,x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial t} &= -\mathbf{R}(t,x)\mathbf{B} + \mathbf{R}(t,x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}(t,x) - \mathbf{F} - \mathbf{B}^*\mathbf{R}(t,x) + \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x}, \\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}(t,x) &= \mathbf{R}(t,x)\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Это означает, что равенство (24) доказано.

**Теорема 5.** Пусть функция  $\mathbf{R}_1(t,x)$  есть частным решением

уравнения (3) Если  $\mathbf{R}(t,x)$  — некоторое другое решение уравнения (3), отличное от  $\mathbf{R}_1(t,x)$ , то функция  $\mathbf{P}(t,x) = \mathbf{R}(t,x) - \mathbf{R}_1(t,x)$  удовлетворяет следующему матричному уравнению Бернулли с частными производными

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{P}(t,x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{P}(t,x) + \mathbf{P}(t,x)\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^*\mathbf{P}(t,x), \quad (25)$$

где:  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_1(t,x) - \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_1^* = \mathbf{R}_1(t,x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^* - \mathbf{B}^*$ . При этом выполняется равенство  $\mathbf{A}^*\mathbf{P}(t,x) = \mathbf{P}(t,x)\mathbf{A}$ .

**Доказательство.** Из равенства  $\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x)$  непосредственно имеем  $\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x}$ . Подставляя эти выражения в уравнение (3), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} + \\ & + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) + \\ & + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{P}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F},$$

то уравнение (26) переписывается так

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{P}(t, x) [\mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{B}] + \\ + [\mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* - \mathbf{B}^*] \mathbf{P}(t, x). \end{aligned}$$

Введем обозначение  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{B}$ . Тогда

$\mathbf{B}_1^* = \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* - \mathbf{B}^*$ . В результате окончательно имеем

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{P}(t, x) \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^* \mathbf{P}(t, x).$$

Кроме того, из равенств  $\mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) = \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) = \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{A}$  следует также, что  $\mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) = \mathbf{P}(t, x) \mathbf{A}$ . Это означает, что теорема 5 доказана.

**Теорема 6.** С помощью замены  $\mathbf{P}(t, x) = \mathbf{Q}^{-1}(t, x)$  уравнение (25)

сводится к линейному уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}_1 \mathbf{Q}(t, x) - \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{B}_1^* - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \cdot$$

**Доказательство.**

Имеем  $\frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} = -\mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}^{-1}(t, x)$  и

$\frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} = -\mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}^{-1}(t, x)$ . Подставляя эти выражения в уравнение (25), получим

$$-\mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) = -\mathbf{A}^* \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \\ + \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^* \mathbf{Q}^{-1}(t, x). \quad (27)$$

Поскольку  $\mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) = \mathbf{P}(t, x) \mathbf{A}$ , то это означает, что  $\mathbf{A}^* \mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \mathbf{A}$ . Следовательно, равенство (27) будет иметь вид

$$-\mathbf{Q}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) = -\mathbf{Q}^{-1}(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \\ + \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{Q}^{-1}(t, x) + \mathbf{Q}^{-1}(t, x) \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^* \mathbf{Q}^{-1}(t, x).$$

Умножая последнее равенство слева на матрицу  $-\mathbf{Q}(t, x)$ , получим

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \mathbf{Q}^{-1}(t, x) - \\ - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{Q}^{-1}(t, x) - \mathbf{B}_1 - \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{B}_1^* \mathbf{Q}^{-1}(t, x).$$

После умножения этого уравнения справа на матрицу  $\mathbf{Q}(t, x)$  окончательно имеем

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{Q}(t, x) \mathbf{B}_1^* - \mathbf{B}_1 \mathbf{Q}(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^*. \quad (28)$$

Таким образом, уравнение (28) является линейным относительно неизвестной функции  $\mathbf{Q}(t, x)$ . При этом выполняется равенство

$$\mathbf{Q}(t, x) \mathbf{A}^* = \mathbf{A} \mathbf{Q}(t, x). \quad \text{Пусть}$$

известно частное решение  $\mathbf{Q}_1(t, x)$

уравнения (28). Тогда это уравнение можно свести к однородному уравнению, если выполнить замену  $\mathbf{Q}(t, x) = \mathbf{W}(t, x) + \mathbf{Q}_1(t, x)$ .

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{W}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{W}(t, x) \mathbf{B}_1^* - \mathbf{B}_1 \mathbf{W}(t, x). \quad (29)$$

Очевидно, что дополнительно имеет место равенство  $\mathbf{W}(t, x) \mathbf{A}^* = \mathbf{A} \mathbf{W}(t, x)$ .

Решение уравнения (29) ищем в виде следующего произведения  $\mathbf{w}(t,x) = \mathbf{U}(t,x)\mathbf{C}\mathbf{v}(t,x)$ , где  $\mathbf{C}$  — произвольная постоянная матрицы размера  $n \times n$ ,  $\mathbf{U}(t,x)$  и  $\mathbf{v}(t,x)$  — неизвестные матрицы такого же размера. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{w}(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial t} \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) + \mathbf{U}(t,x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial t}$$

И

$$\frac{\partial \mathbf{w}(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial x} \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) + \mathbf{U}(t,x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial x}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (29), в результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial t} \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) + \mathbf{U}(t,x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial x} \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) + \mathbf{A}\mathbf{U}(t,x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial x} - \\ - \mathbf{B}_1^* \mathbf{U}(t,x) \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) - \mathbf{U}(t,x) \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) \mathbf{B}_1. \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение следующим образом

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial t} - \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{B}_1^* \mathbf{U}(t,x) \right] \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) = -\mathbf{U}(t,x) \mathbf{C} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial t} + \mathbf{v}(t,x) \mathbf{B}_1 \right] + \mathbf{A}\mathbf{U}(t,x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial x}. \quad (30)$$

Поскольку

$$\mathbf{w}(t,x) \mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{w}(t,x),$$

то

$$\mathbf{U}(t,x) \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) \mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{U}(t,x) \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x),$$

и

$\mathbf{A}\mathbf{U}(t,x) \mathbf{C} = \mathbf{U}(t,x) \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) \mathbf{A}^* \mathbf{v}^{-1}(t,x)$ , то уравнение (30) примет вид

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial t} - \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{B}_1^* \mathbf{U}(t,x) \right] \mathbf{C}\mathbf{v}(t,x) = -\mathbf{U}(t,x) \mathbf{C} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial t} - \mathbf{v}(t,x) \mathbf{A}^* \mathbf{v}^{-1}(t,x) \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{v}(t,x) \mathbf{B}_1 \right]$$

Это равенство выполняется, если одновременно выполняются следующие два равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{B}_1^* \mathbf{U}(t,x), \\ \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{v}(t,x) \mathbf{A}^* \mathbf{v}^{-1}(t,x) \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{v}(t,x) \mathbf{B}_1. \end{cases} \quad (31)$$

Умножая второе уравнение системы (31) сперва на матрицу  $\mathbf{v}^{-1}(t,x)$  слева, потом на эту же матрицу справа, получим

$$\mathbf{v}^{-1}(t,x) \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial t} \mathbf{v}^{-1}(t,x) = \mathbf{A}^* \mathbf{v}^{-1}(t,x) \frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial x} \mathbf{v}^{-1}(t,x) - \mathbf{B}_1 \mathbf{v}^{-1}(t,x). \quad (32)$$

Дальше сделаем замену  $\mathbf{s}(t, x) = \mathbf{V}^{-1}(t, x)$ . Поскольку

$$\frac{\partial \mathbf{s}(t, x)}{\partial t} = -\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial t} \mathbf{V}^{-1}(t, x) \text{ и}$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}(t, x)}{\partial t} = -\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial t} \mathbf{V}^{-1}(t, x), \text{ то}$$

уравнение (32) примет вид  $\frac{\partial \mathbf{s}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{s}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{s}(t, x)$ . Таким

образом, система (31) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}_1^* \mathbf{U}(t, x), \\ \frac{\partial \mathbf{s}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{s}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{s}(t, x). \end{cases} \quad (33)$$

Уравнение (3) можно записать в симметрической форме.

Действительно, из условия  $\mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) = \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}$  следует, что

$$\mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}.$$

Это значит, что  $\frac{\mathbf{A}^* \partial \mathbf{R}(t, x)}{2 \partial x} = \frac{\partial \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}}{\partial x} \frac{\mathbf{A}}{2}$  и

$$\mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} = \frac{\mathbf{A}^* \partial \mathbf{R}(t, x)}{2 \partial x} + \frac{\mathbf{A}^* \partial \mathbf{R}(t, x)}{2 \partial x} =$$

$$= \frac{\mathbf{A}^* \partial \mathbf{R}(t, x)}{2 \partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}}{\partial x} \frac{\mathbf{A}}{2}.$$

Поэтому уравнение (3) можно переписать так

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} = \frac{\mathbf{A}^* \partial \mathbf{R}(t, x)}{2 \partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}}{\partial x} \frac{\mathbf{A}}{2} + \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) - \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F} \quad (34)$$

Уравнение (34) естественным образом порождает следующую блочную матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & -\mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \\ -\frac{\mathbf{A}}{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & \frac{\mathbf{A}^*}{2} & -\mathbf{B}^* \end{bmatrix} \quad (35)$$

размера  $3n \times 3n$ .

**Теорема 7.** С помощью матрицы (35) уравнение (34) можно представить таким образом

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

**Доказательство.** С помощью непосредственного вычисления находим

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & -\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^* \\ -\frac{\mathbf{A}}{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & \frac{\mathbf{A}^*}{2} & -\mathbf{B}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R} \\ -\frac{\mathbf{A}}{2} \\ -\mathbf{F} + \frac{\mathbf{A}^*}{2} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} - \mathbf{B}^*\mathbf{R} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R} \\ -\frac{\mathbf{A}}{2} \\ -\mathbf{F} + \frac{\mathbf{A}^*}{2} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} - \mathbf{B}^*\mathbf{R} \end{bmatrix} = \\ &= -\mathbf{R}\mathbf{B} + \mathbf{R}\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \frac{\mathbf{A}}{2} - \mathbf{F} + \frac{\mathbf{A}^*}{2} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} - \mathbf{B}^*\mathbf{R}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

### Список литературы:

1. Андреев Ю. А. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
2. Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф. Основы теории управления. — Киев, издательское объединение «Вища школа», 1975. — 328 с.
3. Егоров А. И. Уравнение Риккати. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 320 с.
4. Захар — Иткин М. Х. Методы численного решения граничных задач для матричных телеграфных уравнений. // Электричество — 1971. — Том 2 — с. 33—37.
5. Захар — Иткин М. Х. Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно — линейных преобразований. // УМН. — 1973. — Том XXVIII, вып.3 (171) — с. 83—120.
6. Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. — М.: Изд — во «Факториал», 1998. — 351 с.
7. Копец М. М. Оптимальное управление объектом, описываемым сингулярной системой линейных уравнений с частными производными. // «Математика и информационные технологии в современном мире», материалы международной заочной научно — практической конференции. — Новосибирск, 2011. — С. 5— 17.

8. Лионс Ж.—Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
9. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. — 480 с.
10. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978. — 551 с.
11. Bittanti S., Laub A. J., Willems J. C. The Riccati equation. New York: Springer — Verlag, 1991.
12. Curtain R. F., Pritchard A. J. Functional analysis in modern applied mathematics. — Academic press: London — New York — San Francisco. — 1977. — 330 p.
13. Lancaster P., Rodman L. Algebraic Riccati equation. — Oxford University Press. — 1995. — 504 p.
14. Riccati J. Animadversationes in aequationes differentiales secundi gradus. // Actorum eruditorum quae Lipsiae publicantur. — 1724. — Supplementa 8, — p. 66—73.

## 1.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

### ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ГАЗА НАД ЖИДКОСТЬЮ

*Ерунова Ирина Борисовна*

*доцент, канд. физ.-мат. наук, Национальный минерально-сырьевой  
университет «Горный», г. Санкт-Петербург*

*E-mail: [kaf\\_metro@nwpi.ru](mailto:kaf_metro@nwpi.ru)*

В работе исследуется процесс движения газа над жидкостью как задачи фазового перехода между жидкостью и газом с движущейся свободной границей раздела сред. Получены оценки скорости сходимости приближенного решения системы нестационарных термодинамических уравнений, уравнений движения вязкого газа и жидкости, границы раздела фаз к точному решению задачи.

Пусть жидкость и газ с коэффициентами теплопроводности  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , коэффициентами удельной теплоемкости  $c_1$  и  $c_2$  соответственно занимают в пространстве область

$$\Omega = \left\{ x \in R^3 : 0 < x_1 < l_1, \quad 0 < x_2 < l_2, \quad d_1 < x_3 < d_2 \right\}.$$

Область  $\Omega$  ограничена снизу границей

$$S_1 = \left\{ x \in R^3 : x_3 = d_1 \right\}$$

и сверху

$$S_2 = \left\{ x \in R^3 : x_3 = d_2 \right\}.$$

Граница раздела сред  $\Gamma$  не пересекается с  $S_1$  и  $S_2$ . Жидкость с постоянной плотностью  $\rho_1$  и динамической вязкостью  $\mu_1$  расположена в области  $\Omega_1$ , ограниченной снизу  $S_1$ , а сверху  $\Gamma$ . Газ с плотностью  $\rho_2(t, x)$ , с постоянной молекулярной вязкостью  $\mu_2$  занимает область  $\Omega_2$ , ограниченную снизу  $\Gamma$ , а сверху  $S_2$ .

Задача состоит в приближенном определении температуры  $\Theta(t, x)$  и вектора скорости движения сред  $\vec{v}(t, x)$ , давления жидкости  $p_1(t, x)$ , плотности газа  $\rho_2(t, x)$ , перемещения  $\vec{u}(t, x)$  свободной

границы  $\Gamma$  в направлении нормали  $\vec{n}$ , удовлетворяющих начальным и граничным условиям

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_1 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla \sigma_1(\vec{v}) &= \rho_1 \beta_1 \vec{g} \Theta, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ c_1 \rho_1 \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \lambda_1 \Delta \Theta + c_1 \rho_1 (\vec{v} \cdot \nabla) \Theta &= f_1(t, x), \quad x \in \Omega_1, \\ \Theta|_{S_1} &= \Theta_1, \quad \Theta|_{\Gamma} = \Theta_2, \quad \Theta|_{S_1} = \Theta_3, \quad \vec{v}|_{S_1} = 0, \quad [\vec{v}]|_{\Gamma} = 0, \\ [\vec{\tau} \sigma(\vec{v}) \vec{n}]|_{\Gamma} &= 0, \quad [\vec{n} \sigma(\vec{v}) \vec{n}]|_{\Gamma} = \sigma_0 H, \quad \vec{v}|_{S_2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь:  $H$  — удвоенная кривизна  $\Gamma$ ,

$\sigma_0$  — коэффициент поверхностного натяжения,

$\sigma_1(\vec{v})$  — тензор напряжений с элементами

$$\sigma_{ij} = -p_1 \delta_{ij} + 2\mu_1 S_{ij}(\vec{v}) \quad \text{и} \quad S_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_2(\vec{v}) \text{ — матрица}$$

с элементами  $\sigma_{ij} = \left( -p_2(\rho_2) + \left( \mu_0 - \frac{2}{3} \mu_2 \right) \operatorname{div} \vec{v} \right) \delta_{ij} + 2\mu_2 S_{ij}(\vec{v})$ ,

$p_2(\rho)$  — непрерывно дифференцируемая возрастающая функция  $\rho > 0$ ,

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_2 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla \sigma_2(\vec{v}) &= \rho_2 \beta_2 \vec{g} \Theta, \quad \frac{d\rho_2}{dt} + \rho_2 \cdot \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ c_2 \rho_2 \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \lambda_2 \Delta \Theta + c_2 \rho_2 (\vec{v} \cdot \nabla) \Theta &= f_2(t, x), \quad x \in \Omega_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$M \rho_1 \frac{d\vec{u}}{dt} \vec{n} = \left[ \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial n} \right]_{\Gamma}, \quad \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{\tau}|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Theta|_{t=0} &= \Theta_0(x), \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad p_1|_{t=0} = p_0(x), \\ \rho_2|_{t=0} &= \rho_0(x), \quad \vec{u}|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где:  $M$  — удельная теплота парообразования. Область  $\Omega$  может быть продолжена в направлении осей  $x_1$  и  $x_2$  с периодами  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. Предполагается, что  $\Theta, \vec{v}, p_1, \rho_2, \vec{u}$  периодические функции по переменным  $x_1$  и  $x_2$  с периодами  $l_1$  и  $l_2$ .

Разрешимость задачи о движении вязкого газа была изучена в [4, с. 365]. Разрешимость задачи об испарении жидкости была доказана в [2, с. 26]. Оценки скорости сходимости приближенного решения стационарной задачи о движении жидкости и газа были

получены в [3, с. 4]. В работе [1, с. 87] исследовалась полная система уравнений Навье-Стокса и Стефана в нестационарном случае, описывающая процесс испарения жидкости. В настоящей работе получены оценки скорости сходимости единственного приближенного решения к точному решению задачи (1)—(4).

Рассмотрим этапы решения задачи (1)—(4). Пусть  $T$  время испарения, выберем натуральное число  $N$ , обозначим шаг по времени  $k = \frac{T}{N}$ , а моменты по времени  $t_n = nk$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Процесс начинается с начальных условий (4),

$$\Theta^0 = \Theta_0(x), \quad \bar{v}^0 = \bar{v}_0(x), \quad p_1^0 = p_0(x), \quad \rho_2^0 = \rho_0(x), \quad \bar{u}^0 = 0,$$

начальная граница  $\Gamma|_{t=0} = \Gamma_0$  известна. Предположим, существует единственное приближенное решение  $\Theta^n, \bar{v}^n, p_1^n, \rho_2^n, \bar{u}^n$  в момент времени  $t_n$ . Задача состоит в определении нового приближенного решения в момент времени  $t_{n+1}$ .

Плотность газа  $\rho_2^{n+1}$  можно найти из уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (5)$$

с известными  $\bar{v}^n$  и  $\Gamma^n$ . Интегрируя уравнение (5), имеем

$$\rho(t_{n+1}, x) = \rho^n \exp\left(-\int_{t_n}^{t_{n+1}} \operatorname{div} \bar{v} dt\right) \text{ или } \rho^{n+1} = \rho^n \exp(-k \operatorname{div} \bar{v}^n).$$

Температура  $\Theta^{n+1}$  является решением линейной задачи в фиксированной области  $\Omega^n$

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \lambda_1 \Delta \Theta + c_1 \rho_1 (\bar{v}^n \cdot \nabla) \Theta = f_1, \quad x \in \Omega_1^n, \\ \Theta|_{S_1} = \Theta_1, \quad \Theta|_{\Gamma} = \Theta_2, \quad \Theta|_{S_2} = \Theta_3, \quad \Theta|_{t=0} = \Theta_0(x), \quad (6)$$

$$c_2 \rho_2^{n+1} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \lambda_2 \Delta \Theta + c_2 \rho_2^{n+1} (\bar{v}^n \cdot \nabla) \Theta = f_2, \quad x \in \Omega_2^n,$$

с известными  $\rho_2^{n+1}, \bar{v}^n, \Gamma^n$ .

Следующая задача состоит в определении приближенных  $\bar{v}^{n+1}$  и  $\rho_1^{n+1}$ , удовлетворяющих нестационарной системе уравнений Навье-Стокса в  $\Omega^n$ ,

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho_1 (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} - \nabla \sigma_1(\bar{v}) &= \rho_1 \beta_1 \bar{g} \Theta^{n+1}, \quad \nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad x \in \Omega_1^n, \\ \rho_2^{n+1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho_2^{n+1} (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} - \nabla \sigma_2(\bar{v}) &= \rho_2^{n+1} \beta_2 \bar{g} \Theta^{n+1}, \quad x \in \Omega_2^n, \\ \bar{v}|_{S_1} &= 0, \quad [\bar{v}]|_{\Gamma} = 0, \quad \bar{v}|_{S_2} = 0, \quad [\bar{\tau} \sigma(\bar{v}) \bar{n}]|_{\Gamma} = 0, \\ [\bar{n} \sigma(\bar{v}) \bar{n}]|_{\Gamma} &= \sigma_0 H, \quad \bar{v}|_{t=0} = \bar{v}_0(x), \end{aligned}$$

с заданными  $\rho_2^{n+1}, \Theta^{n+1}, \Gamma^n$ .

Наконец, новое приближенное перемещение  $\bar{u}^{n+1}$  границы  $\Gamma^n$  получается из уравнений

$$\begin{aligned} M \rho_1 \frac{d\bar{u}}{dt} \bar{n} &= \left[ \lambda \frac{\partial \Theta^{n+1}}{\partial n} \right]_{\Gamma^n}, \\ \frac{d\bar{u}}{dt} \bar{\tau} &= 0, \quad \bar{u}|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В анализе нестационарных задач (6)—(8) используется разностная схема Кренка-Николсона для переменной по времени. На каждом шаге итераций приближенные решения предлагаемых вариационных формулировок задач (6) и (7) получаются методом конечного элемента.

Рассмотрим непрерывные функции

$$\begin{aligned} \Theta_k(t), \bar{v}_k(t), p_{1k}(t), \rho_{2k}(t), u_k(t): \\ \Theta_k(t) &= \Theta^n + \frac{t-nk}{k} (\Theta^{n+1} - \Theta^n), \quad \bar{v}_k(t) = \bar{v}^n + \frac{t-nk}{k} (\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n), \\ p_{1k}(t) &= p_1^n + \frac{t-nk}{k} (p_1^{n+1} - p_1^n), \quad \rho_{2k}(t) = \rho_2^n + \frac{t-nk}{k} (\rho_2^{n+1} - \rho_2^n), \\ \bar{u}_k(t) &= \bar{u}^n + \frac{t-nk}{k} (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n), \quad t \in [nk, (n+1)k], \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned}$$

Существует единственное приближенное решение задачи (1)—(4) [1, с. 90]

$$(\Theta_k, \bar{v}_k, p_{1k}, p_{2k}, \bar{u}_k) \in C\left((0, T; W_2^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)) \times W_2^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)^3 \times \\ \times W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \times \left(W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^3.$$

Основным результатом работы является следующая теорема

**Теорема.** Пусть  $f_i \in L^2(0, T; L_2(\Omega_i))$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$(\Theta_0, \bar{v}_0, p_0, \rho_0, \bar{u}_0) \in \\ \in W_2^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \times \left(W_2^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)^3 \times W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \times \left(W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^3.$$

Если для точного решения задачи (1)—(4) выполняются условия  $\frac{d\Theta}{dt}, \frac{d^2\Theta}{dt^2} \in L^2\left(0, T; \left(W_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)^3\right)$ ,  $\frac{d\bar{v}}{dt}, \frac{d^2\bar{v}}{dt^2} \in L^2\left(0, T; \left(W_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)^3\right)$ ,

тогда существует положительное число  $k_0$  такое, что для любого

$k \in (0, k_0)$  справедливы неравенства

$$\max_{1 \leq n \leq N} \left( \|\Theta(t_n) - \Theta^n\|_{0, \Omega^{n-1}} + \|\bar{v}(t_n) - \bar{v}^n\|_{0, \Omega^{n-1}} \right) \leq b_1 k \\ \sum_{n=1}^N \left( \|\bar{v}(t_n) - \bar{v}^n\|_{1, \Omega^{n-1}} \left( \|p_1(t_n) - p_1^n\|_{0, \Omega_1^{n-1}}^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \|\rho_2(t_n) - \rho_2^n\|_{0, \Omega_2^{n-1}}^2 + \|\bar{u}(t_n) - \bar{u}^n\|_{0, \Gamma^{n-1}}^2 \right) \right) \leq b_2 k, \\ k \sum_{n=1}^N \|\Theta(t_n) - \Theta^n\|_{2, \Omega^n}^2 \leq b_3,$$

здесь постоянные  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  не зависят от  $k$ .

### Список литературы:

1. Ерунова И. Б. Об оценках скорости сходимости приближенного решения задачи об испарении жидкости // Сборник трудов III Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы управления информационными системами», 2009. - СПб. С. 87—91.
2. Ерунова И. Б., Ривкинд В. Я.. Исследование задачи об испарении жидкости // Вестник Ленингр. университета, 1991, вып. 2, № 8. С. 22—27.

3. Erunova I., Neittaanmaki P. Convergence estimates for approximation of the steady flow liquid and gas over a solid. Report 18, 1997. -Jyvaskyla: University of Jyvaskyla.-15 p.
4. Solonnikov V. A. and Tani A. Free boundary problem for a viscous compressible flow with surface for the stationary Navier-Stokes system // Partial differential equations, Warsaw, 1983, Vol. 10, P. 361—403.

### **1.3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

#### **ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА**

*Бунтова Елена Вячеславовна*

*доцент, канд.пед. наук, ФГБГУ ВПО СГСХА, г. Самара*

*Бунтова Оксана Сергеевна*

*абитуриент, ФГБОУ ВПО СГАУ, г. Самара*

*E-mail: [lena-buntova1@yandex.ru](mailto:lena-buntova1@yandex.ru)*

Задачи практики довольно часто приводят к решению основной задачи математической статистики — оценки числовых характеристик на основании экспериментальных данных. При этом возникает вопрос, как посредством соответствующим образом поставленных испытаний, определить, имеют ли место в действительности те условия, на основании которых сделаны априорные оценки.

Во многих учебниках и учебных пособиях по математической статистике [2, 3, 4, 8] представлен материал, который позволяет получить формализованное представление о применении математической статистики к реальному эксперименту.

Для бакалавров, магистров, аспирантов представляет интерес эксперимент — от появления идеи и проблем постановки эксперимента до получения результатов и обработки данных.

Таким образом, возникла необходимость выделить те вопросы математической статистики, которые позволят обосновать методику оценки погрешностей экспериментальных результатов, выявить особенности обработки ограниченного числа опытов.

Эксперимент — метод изучения явления, объекта, когда исследователь активно и целенаправленно воздействует на него путем создания искусственных условий или использует естественные условия, необходимые для выявления некоторых свойств данного явления или объекта [6].

В эксперименте свойства явлений и объектов изучаются с помощью измерений соответствующих величин, например физических. По способу получения результата выделяют прямые (непосредственные) и косвенные измерения. При прямых измерениях искомое

значение величины определяют соответствующим прибором, то есть происходит непосредственное сравнение с эталоном. Если искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, найденными прямыми измерениями, то этот вид измерений называют косвенным.

Неотъемлемой составляющей любого экспериментального исследования является оценка измерений. Вследствие неточности измерительных приборов, несовершенства органов чувств человека, неполноты знаний, трудности учета побочных явлений при повторении одного и того же измерения получаются разные числовые значения измеряемой величины. Кроме того, в основу любого экспериментального исследования, сопряженного с измерениями, заложена модель. Модель содержит физическое описание исследуемого объекта или процесса, которое позволяет составить его математическое описание. Неверно построенная модель, в которой не нашли отражения какие-то важные процессы или факторы, влияющие на результат измерений, также приводит к несоответствиям.

При практическом использовании результатов тех или иных измерений возникает вопрос о точности измерений, то есть степени приближения результатов измерения к некоторому действительному значению. Для количественной оценки используется понятие «погрешность измерений» или «ошибка».

Измеряемые в эксперименте величины, вычисляемые по полученным из модели рабочим формулам, содержат погрешности, которые носят название модельных погрешностей.

Случайные погрешности при повторных измерениях погрешности этого типа показывают свою случайную природу. Возникают они вследствие множества причин, совместное воздействие которых на каждое отдельное измерение невозможно учесть или заранее установить. Единственно возможный способ объективного учета случайных погрешностей состоит в определении их статистических закономерностей. Рассчитанные статистические оценки вносят в окончательный результат эксперимента.

Исключить случайные ошибки при измерении нельзя, однако применение метода теории ошибок позволяет более точно установить возможную ошибку окончательного результата измерений.

В зависимости от формы представления различают абсолютную, относительную и приведенную погрешности измерений. В зависимости от характера проявления, причин возникновения и возможностей устранения различают систематическую и случайную составляющую погрешности измерения, а также грубые погрешности (промахи) [5].

Обычно систематические ошибки и промахи считают устраненными и учитывают только случайные ошибки.

Рассмотрим погрешности прямых равноточных измерений на примере измерений в физике, метрологии.

При прямых измерениях числовые значения измеряемой величины  $x$  сразу получается из показаний прибора, при помощи которого выполняется измерение. Например, длина стержня при отсчете по шкале линейки.

Результат каждого прямого измерения включает случайную ошибку, которая зависит от большого числа случайных факторов. Если отклонения, вызываемые этими факторами, по абсолютной величине меньше чувствительности прибора, то они не обнаруживаются. В этом случае критерием точности измерения является цена наименьшего деления шкалы прибора или ее половины. Если же отклонения, вызванные случайными факторами, сравнимы по абсолютной величине с чувствительностью прибора, то они обнаруживаются приборами. При  $n$  измерениях одной и той же величины получаются результаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые могут отличаться друг от друга в пределах чувствительности данных измерений.

Среднее арифметическое из этих результатов

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

есть величина, наиболее близкая к истинному значению, которую называют средним значением. Следовательно, каждое измерение должно быть повторено несколько раз. В теории погрешностей доказывается, что при увеличении числа  $n$  среднее арифметическое стремится к истинному значению измеряемой величины.

Разности между средним значением  $x$  измеряемой величины и значениями  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , полученными при отдельных измерениях называются абсолютными ошибками

$$\Delta x_1 = \bar{x} - x_1, \Delta x_2 = \bar{x} - x_2, \dots, \Delta x_n = \bar{x} - x_n$$

и могут быть как положительными, так и отрицательными. Для определения средней абсолютной ошибки результата берут среднее арифметическое абсолютных значений отдельных ошибок, то есть

$$\bar{\Delta x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i.$$

Отношения

$$\frac{\Delta x_1}{x_1}, \frac{\Delta x_2}{x_2}, \dots, \frac{\Delta x_n}{x_n}$$

называют относительными ошибками отдельных измерений.

Отношение средней абсолютной ошибки результата к его среднему значению дает среднюю относительную ошибку результата измерений:  $E = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$ .

Принято относительные ошибки выражать в процентах  $E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$ .

Истинное значение измеряемой величины находится в интервале

$$\mu = \bar{x} \pm \Delta x.$$

Если точность прибора такова, что при любом числе измерений получается одно и то же число, лежащее между делениями шкалы, то данный метод оценки погрешности неприменим. В этом случае измерение проводится один раз и записывается в виде  $x = \bar{x} \pm \Delta x_{\text{пр}}$ , где  $x$  – искомый результат измерения;  $\bar{x}$  – средний результат, равный среднему арифметическому из двух значений, соответствующих соседним делениям шкалы, между которыми заключено остающееся неизвестным истинное значение измеряемой величины;  $\Delta x_{\text{пр}}$  – приборная погрешность, равная половине цены деления шкалы прибора.

Рассмотрим погрешность при косвенных измерениях. Измерения называются косвенными, если уравнение измерения имеет вид:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, a, b),$$

где  $x_1, x_2$  – результаты прямых измерений;  $a, b$  – физические константы и постоянные приборов;  $z$  – значения измеряемой величины.

При косвенных измерениях средняя абсолютная ошибка  $\Delta z$  может быть найдена по правилам дифференцирования

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \Delta a + \Delta b,$$
$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \Delta a + \Delta b.$$

Относительная ошибка находится по формуле  $E = \frac{\Delta z}{z}$ . Если учесть, что

$$d(\ln z) = \frac{dz}{z}, \Delta(\ln z) = \frac{\Delta z}{z}$$

Тогда

$$E = \frac{\Delta z}{z} = \Delta(\ln z).$$

Выполнив все измерения и вычисления окончательный результат записывают в виде  $\mu = \bar{x} \pm \Delta x$ ,  $E = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$ .

Следует помнить, что доверительный интервал не является исчерпывающей характеристикой точности результата. Нужна количест-

венная характеристика достоверности интервала, которая покажет на сколько можно быть уверенными в том, что истинное значение измеряемой величины окажется в пределах доверительного интервала. Такой характеристикой является доверительная вероятность  $\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ , где  $n$  – число измерений.

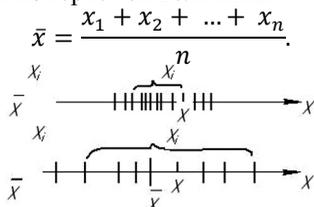
При определении какой либо величины количество измерений может быть большим или малым.

*Оценка точности и правильности при большом числе измерений [1].*

Важнейшими характеристиками случайных величин, наиболее часто используемыми на практике, являются среднее значение случайной величины, ее дисперсия, коэффициент вариации.

Предположим, что все измерения величины проделаны одним методом и с одинаковой тщательностью. Такие измерения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются равноточными.

В теории ошибок доказывается, что при выполнении нормального закона (закона распределения Гаусса) при  $n$  измерениях одинаковой точности среднее арифметическое из результатов, полученных при всех измерениях, является наиболее вероятным и наилучшим значением измеряемой величины



**Рис.1 Среднее арифметическое результатов распределения Гаусса**  
**Распределение результатов измерения относительно среднего значения**

Из теории ошибок известно, что плотность распределения случайных ошибок зависит от их величины и выражается формулой:

$$y_{x,\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-x_i)^2}{2\sigma^2}}, (-\infty < x < +\infty),$$

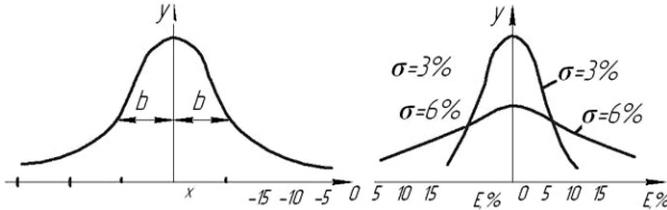
где:  $\sigma^2$  – дисперсия генеральной совокупности, которая характеризует степень разброса  $x_i$  вокруг  $\bar{x}$  (Рис.1).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n},$$

где:  $\sigma$  – стандартное отклонение, средняя квадратическая ошибка отдельного измерения

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n}}, n \rightarrow \infty.$$

Относительная средняя квадратическая ошибка измеряемая в процентах называется коэффициентом вариации:  $W = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$ .



**Рис.2 Кривые Гаусса**

На рис.2 показаны различные кривые Гаусса. Откуда видно, что максимум плотности распределения случайной ошибки соответствует среднему значению  $\bar{x}$  всех результатов измерений. От этой точки кривая симметрично опускается слева и справа, т.е. положительные и отрицательные ошибки одной величины встречаются одинаково часто. На кривой имеются две точки перегиба, расстояние которых от значения  $\bar{x}$  по оси абсцисс называется стандартным отклонением  $\sigma$ . Стандартное отклонение характеризует воспроизводимость метода измерения. Чем меньше  $\sigma$ , тем меньше разброс данных и тем более воспроизводим анализ. Рисунок показывает, что каждому значению  $\sigma$  соответствует своя кривая распределения ошибок. Так для кривой, имеющей  $\sigma = 3\%$ , ошибки, превышающие 9%, практически не встречаются, а для кривой, соответствующей  $\sigma = 6\%$ , также ошибки появляются довольно часто. Кривая Гаусса показывает также, что  $\sim 30\%$  всех результатов имеют величину отклонения от среднего значения  $\varepsilon_i = \bar{x} - x_i$ ,

превышающую  $\sigma$ ; около 5% результатов больше  $2\sigma$  и около 0,3% результатов больше  $3\sigma$ .

Следовательно, при большом числе измерений значение  $\sigma$  определяет границы достоверности всякого нового определения  $x_i$ . Можно сказать, что имеется 95% вероятности того, что этот результат окажется в границах

$$x - 2\sigma < x_i < \bar{x} + 2\sigma$$

и 99,7% вероятности того, что этот результат окажется в границах:

$$\bar{x} - 3\sigma < x_i < \bar{x} + 3\sigma.$$

Это явление получило название «правило 3 $\sigma$ ». Таким образом, средняя квадратичная ошибка определяет доверительный интервал.

Вероятность того, что новое значение измеряемой величины попадает в доверительный интервал, называется доверительной вероятностью, надежностью или коэффициентом надежности.

В лабораторном практикуме обычно задают величину  $\alpha = 0,95$ . Это означает, что при большом числе определений результаты каждых 95 определений из 100 будут попадать в доверительный интервал, равный  $x \pm 2\sigma$ .

Для характеристики случайной ошибки необходимо задать два числа: величину самой ошибки (доверительный интервал) и величину доверительной вероятности.

*Оценка точности и правильности при малом числе измерений [5].*

В лабораторном практикуме имеют дело не с генеральной совокупностью, а с небольшим количеством измерений ( $2 \leq n \leq 10$ ).

Для расчета точности измерений в этом случае пользуются методами математической статистики, разработанной для малого числа измерений. При этом полученные результаты рассматривают как случайную выборку из некоторой генеральной совокупности.

Оценку точности измерений и правильности производят с помощью следующих критериев.

Выборочное среднее — среднее арифметическое.

Единичные отклонения — отклонения отдельных измерений от среднего арифметического (абсолютная ошибка единичного измерения)  $\varepsilon_i = \bar{x} - x_i$ .

Алгебраическая сумма одиночных отклонений равна нулю  $\sum \varepsilon_i = 0$ .

Выборочная дисперсия для  $n$  найденных значений  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  случайной величины:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}.$$

Положительные значения корня квадратичного из дисперсии называется средней квадратической ошибкой отдельного измерения или выборочным отклонением:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}}.$$

Коэффициент вариации:  $\omega = \frac{\varepsilon}{\bar{x}} 100\%$ .

При оценке точности полученных результатов вычисляют также выборочную дисперсию среднего значения (среднего результата):

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}.$$

Средней квадратической ошибкой среднего арифметического или стандартным отклонением среднего результата:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

Доверительный интервал при заданной доверительной вероятности зависит от размера выборки, т.е. от количества проведенных опытов. В общем случае граница доверительного интервала при выбранном коэффициенте надежности  $\alpha$  выражается уравнением:

$$\bar{x} - t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где:  $t_{\alpha}$  – коэффициент Стьюдента.

Абсолютная ошибка:  $\varepsilon_{\alpha} = t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$ .

С уменьшением числа измерений  $n$  увеличивается доверительный интервал (при той же надежности) или при заданном доверительном интервале уменьшается надежность измерений. По мере увеличения числа измерений величина  $\varepsilon_{\alpha}$  стремится к значению  $2\sigma$  при  $\alpha = 0,95$  и к значению  $3\sigma$  при  $\alpha = 0,97$ .

Иными словами, коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha}$  с надежностью  $\alpha$  показывает во сколько раз разность между истинным и средним результатами больше стандартного отклонения среднего результата:

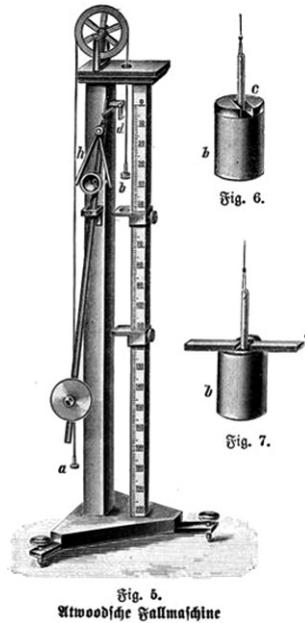
$$t_{\alpha} = \frac{|\mu - \bar{x}|}{S_{\bar{x}}}.$$

Значение  $t_{\alpha}$  для избранной надежности находят по таблице Стьюдента. Пользуясь формулой для нахождения доверительного интервала и таблицей Стьюдента, можно определить доверительные интервалы по выбранной надежности или, задавшись определенной точностью, рассчитать  $t_{\alpha}$  и по таблице оценить надежность выбранных доверительных интервалов. Кроме того, можно установить число параллельных измерений, необходимых для того, чтобы средний результат имел точность не ниже заданной.

Относительную ошибку среднего результата вычисляют с надежностью  $\alpha$  по формуле:  $\frac{\varepsilon_{\alpha}}{\mu} 100\%$  или  $\frac{\varepsilon_{\alpha}}{\bar{x}} 100\%$ .

Таким образом, значения  $\bar{x}$ ,  $\bar{x} \pm \varepsilon_\alpha$ ,  $\alpha$  полностью определяет точность (воспроизводимость и правильность) измерений.

Рассмотрим применение статистической обработки результатов измерений при изучении законов равноускоренного движения на машине Атвуда [7].



**Рис.3** Машина Атвуда

Для равноускоренного движения грузов, проходящих высоту  $h$  за время  $t$  с ускорением  $a$  в скалярном виде справедливо выражение

$$h = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Если тело начинает двигаться из состояния покоя, то есть его начальная скорость  $v_0 = 0$ , то вышеприведенное выражение принимает вид:

$$h = \frac{at^2}{2}.$$

Выразим из этой формулы ускорение  $a$ , с которым падает груз:

$$a = \frac{2h}{t^2}.$$

Эта формула является расчетной формулой и позволяет вычислить ускорение  $a$  для известного времени падения грузов с высоты  $h$ .

Результаты измерений и вычислений заносят в таблицу [2].

**Таблица 1**

**Вычисление ускорения при известном времени падения грузов**

№	h, м	t, с	a, м/с <sup>2</sup>	a <sub>ср</sub> , м/с <sup>2</sup>	Δa, м/с <sup>2</sup>	Δa <sub>ср</sub> , м/с <sup>2</sup>
1	1,8	3,44	0,27	0,27	0	0,01
2	1,5	3,38	0,26	0,27	-0,01	0,01
3	1,3	3,10	0,27	0,27	0	0,01
4	1,1	2,89	0,26	0,27	-0,01	0,01
5	0,9	2,57	0,27	0,27	0	0,01
6	0,7	2,27	0,27	0,27	0	0,01

Окончательный результат представляют в виде

$$a = \bar{a} \pm \Delta \bar{a}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, a = 0,27 \pm 0,01 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Абсолютная ошибка:

$$\varepsilon_a = 0,00442.$$

Проведенные вычисления:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\sum a_i n_i}{n},$$

**Таблица 2**

**Статистический ряд распределения случайной величины (ускорения)**

$a_i$	0,26	0,27
$n_i$	2	4

$$a_{\text{ср}} = \frac{0,26 \cdot 2 + 0,27 \cdot 4}{6} = \frac{1,6}{6} \approx 0,27,$$

Единичные отклонения

$$\varepsilon = \Delta a = a_{\text{ср}} - a_i, \Delta a = 0,27 - 0,27 = 0, \Delta a = 0,26 - 0,27 = -0,01.$$

Оценивают точность полученных результатов и вычисляют выборочную дисперсию среднего значения (среднего результата):

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}, S_{\bar{x}}^2 = \frac{(0,27 - 0,26)^2 + (0,27 - 0,27)^2}{6 \cdot 5} = 3 \cdot 10^{-5}.$$

Средней квадратической ошибкой среднего арифметического или стандартным отклонением среднего результата:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} = 0,0017.$$

Граница доверительного интервала при выбранном коэффициенте надежности  $\alpha = 0,95$ :

$$\bar{x} - t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}},$$
$$0,26558 < \mu < 0,27442,$$

где:  $t_{\alpha} = 2,6$  – коэффициент Стьюдента.

Абсолютная ошибка:

$$\varepsilon_{\alpha} = t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} = 2,6 \cdot 0,0017 = 0,00442.$$

В науке и технике измерения занимают центральное место. Прогресс в этих областях связан с повышением их точности. Из-за неизбежности погрешностей измеренное значение не соответствует в точности истинному значению. Чтобы результат измерения можно было далее использовать, необходимо указывать значения погрешностей измерения.

### Список литературы:

1. Бунтова Е. В. Статистическая обработка результатов измерений: учебное пособие. Самара: «Книга», 2011. — 87 с.
2. Бунтова О. С. Статистическая обработка результатов измерений: доклад на 31-й межвузовской студенческой научно-технической конференции ФГБОУ ВПО «Самарский государственный архитектурно-строительный университет», 2012. — 21 с.
3. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учебное пособие. М.: Высшая школа, 2007. — 480 с.
4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. М.: Высшая школа, 1977. — 479 с.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. — 543 с.
6. Кравченко Н. С. Методы обработки результатов измерений и оценки погрешности в учебном лабораторном практикуме: учебное пособие. Томск: Из-во Томского политехнического университета, 2011.— 88 с.
7. Князев Б. А. Начало обработки экспериментальных данных: учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.– 93 с.
8. Миронова Т. Ф. Физика. Лабораторный практикум: учебное пособие. Кинель: РИЦ СГСХА, 2007.— 130 с.
9. Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Айрис-пресс, 2004. — 256 с.

## 1.4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

### О МАЛЫХ МОДЕЛЯХ В ПОЗИТИВНЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ЙОНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ

*Ешкеев Айбат Рафхатович*

*д-р физ.-мат. наук, профессор КарГУ  
им. Е. А. Букетова, г. Караганда, Казахстан  
E-mail: [modth1705@mail.ru](mailto:modth1705@mail.ru)*

В работе [11] была доказана теорема, связанная с понятием простой модели, а именно: модель  $A$  теории  $T$  проста тогда и только тогда, когда модель  $A$  счетна и атомна. Естественным обобщением понятия простой модели является понятие алгебраически простой модели. Напомним из [7], что модель  $A$  теории  $T$  называется алгебраически простой, если она изоморфно вкладывается в любую модель теории  $T$ . В [7] была поставлена задача нахождения подходящего понятия атомности для алгебраически простой модели. Следующее понятие определяет новый вид атомных моделей  $\Delta$  – РМ — теорий. Пусть  $L$  язык первого порядка.  $At$  — есть множество атомарных формул данного языка.  $V^+(At)$  — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных.  $Q(V^+(At))$  — есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ( $\forall$  и  $\exists$ ) к  $V^+(At)$ . Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству  $Q(V^+(At))=L^+$ . Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны.  $V(L^+)$  — это множество всевозможных булевых комбинаций формул из  $L^+$ . Следуя [9], [8] определим  $\Delta$ -морфизмы между структурами. Пусть  $M$  и  $N$  структуры языка  $L$ ,  $\Delta \subseteq V(L^+)$ . Отображение называется  $\Delta$ -гомоморфизмом (символически  $h: M \rightarrow_{\Delta} N$ ), если для любого  $\phi(\bar{x}) \in \Delta$ ,  $\forall \bar{a} \in M$  из того, что  $M \models \phi(\bar{a})$ , следует, что  $N \models \phi(h(\bar{a}))$ . Следуя [9], [8] модель  $M$  называется началом в  $N$ , и мы говорим, что  $M$  продолжается в  $N$ , при этом  $h(M)$  называется продолжением  $M$ . Если при этом верно и обратное, т. е. для любого

$\varphi(\bar{a}) \in \Delta, \forall \bar{a} \in M \quad M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(h(\bar{a}))$ , то говорят, что отображение  $h$  погружает  $M$  в  $N$  (символически  $h: M \hookrightarrow_{\Delta} N$ ). В дальнейшем мы будем использовать термин  $\Delta$ -продолжение и  $\Delta$ -погружение. В рамках этого определения ( $\Delta$ -гомоморфизма), легко заметить, что изоморфное вложение и элементарное вложение являются  $\Delta$ -погружениями, когда  $\Delta = B(At)$  и  $\Delta = L$ , соответственно.

**Определение 1.**

(универсальная область) [9], [8] Пусть  $\kappa$  относительно большой кардинал (как минимум  $\kappa > |\Delta|$ ), и  $U$  структура языка  $L$ . Тогда  $U$  является  $\kappa$ -универсальной областью, если она удовлетворяет следующим свойствам:

- 1)  $\kappa$ -однородность: Пусть  $f: U \rightarrow U$  частичный эндоморфизм  $U$ , и предположим, что  $|dom(f)| < \kappa$ . Тогда  $f$  расширяется до автоморфизма  $U$ .
- 2)  $\kappa$ -компактность: Пусть  $\Gamma \subset \Delta$  такое, что  $|\Gamma| < \kappa$  и предположим, что каждое конечное подмножество множества  $\Gamma$  реализуемо в  $U$ . Тогда  $\Gamma$  реализуемо в  $U$ .

**Определение 2.**

Модель  $M$  теории  $T$  называется  $\Delta$ -позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого  $\Delta$ -гомоморфизма  $f: M \rightarrow_{\Delta} N$  и каждого  $\bar{a} \in M$  и  $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta: N \models \exists \bar{y} \varphi(f(\bar{a}), \bar{y}) \Rightarrow M \models \exists \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$ . Класс всех  $\Delta$  — позитивно экзистенциально замкнутых моделей теории  $T$  обозначим через  $E_T^+$ ; под  $E_T$  мы понимаем класс экзистенциально замкнутых теории  $T$ .

**Определение 3.**

( $\Delta$ -JEP - свойство совместного вложения) Говорим, что теория  $T$  допускает  $\Delta$ -JEP, если для любых двух  $A, B \in Mod T$  существует  $C \in Mod T$  и  $\Delta$ -гомоморфизмы  $h_1: A \rightarrow_{\Delta} C, h_2: B \rightarrow_{\Delta} C$ .

**Определение 4.**

( $\Delta$ -AP — свойство амальгамы) Говорим, что теория  $T$  допускает  $\Delta$ -AP, если для любых  $A, B, C \in Mod T$  таких, что  $h_1: A \rightarrow_{\Delta} C, g_1: A \rightarrow_{\Delta} B$ , где:  $h_1, g_1$  —  $\Delta$ -гомоморфизмы, существует  $D \in Mod T$  и  $h_2: C \rightarrow_{\Delta} D, g_2: B \rightarrow_{\Delta} D$ , где  $h_2, g_2$  —  $\Delta$ -гомоморфизмы, такие, что  $h_2 \circ h_1 = g_2 \circ g_1$ .

**Определение 5.**

а) Теория называется  $\Delta$ -позитивной йонсоновской ( $\Delta$ -PJ) теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) имеет бесконечную модель;
- 2) позитивно  $\forall \exists$ -аксиоматизируема;
- 3) допускает  $\Delta$ -JEP;
- 4) допускает  $\Delta$ -AP.

б) Теория называется  $\Delta$ -позитивной робинсоновской ( $\Delta$ -PR) теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) имеет бесконечную модель;
- 2) позитивно  $\forall$ -аксиоматизируема;
- 3) допускает  $\Delta$ -JEP;
- 4) допускает  $\Delta$ -AP.

В данной статье везде  $\Delta = \mathbf{B}^+(At)$ .

Следующий абзац является краеугольным в данной статье. Сейчас мы определим понятие семантической модели для произвольной  $\Delta$ -PJ-теории. В том случае, если рассматриваемая  $\Delta$ -PJ-теория  $T$  является йонсоновской, то её семантической моделью является  $\omega^+$ -однородная универсальная модель  $T$ , как в [3]. В противном случае, её семантической моделью является универсальная область  $U$ , являющаяся моделью теории  $T$ . Соответственно определяется в каждом из этих случаев понятие центра. Напомним определения основных понятий  $\Delta$ -PJ-теории для не йонсоновского случая.

**Определение 6.**

Центром  $\Delta$ -PJ-теории  $T$  называется теория  $T_{\Delta}^* = Th_{\Delta}(U)$ , где  $U$ - $U$ -универсальная область данного языка  $L$ , являющаяся моделью данной теории  $T$ , которую будем называть семантической моделью  $\Delta$ -PJ-теории  $T$ .

**Определение 7.**

$\Delta$ -PJ-теория  $T$  называется  $\Delta$ -PJ-совершенной, если её семантическая модель  $U$  насыщена в своей мощности для всех позитивных  $\Delta$ -типов ( $\Delta$ -тип называется позитивным, если в формулах, входящих в этот тип, бескванторная часть позитивна).

**Определение 8.**

$\varphi \in \Gamma^+ \Leftrightarrow \varphi \in L^+ \cap \Gamma$ , где  $\Gamma$  - вид формулы  $\varphi$ .

**Определение 9.**

Модель  $A$   $\Delta$ -PJ-теории  $T$  называется  $h$ - $\Delta$ -алгебраически простой, если для любой модели  $B$   $\Delta$ -PJ-теории  $T$  существует  $h$ - $\Delta$ -погружение модели  $A$  в  $B$ . Следующая договоренность является очень важной. Фактически, мы будем говорить о семантическом аспекте  $\Delta$ -PJ-теории. Если  $\Delta$ -PJ-теория  $T$  является йонсоновской, то с  $\text{Mod}T$  мы работаем как с классом моделей некоторой йонсоновской теории. Если же  $\Delta$ -PJ-теория  $T$  не является йонсоновской, то в качестве  $\text{Mod}T$  мы будем рассматривать класс её позитивно экзистенциально замкнутых моделей  $E_T^+$ . Такой подход для класса  $E_T$  — класса экзистенциально замкнутых моделей произвольной универсальной теории  $T$  был рассмотрен в [10]. Так как относительно йонсоновских теорий возможны два случая: совершенный и несовершенный, то мы будем

придерживаться следующего. Хорошо известно из [3], [4], что если йонсоновская теория  $T$  совершенна, то класс её экзистенциально замкнутых моделей  $E_T$  элементарен и совпадает с  $\text{Mod}T^*$ , где  $T^*$  - её центр. В противном случае, т.е. если теория  $T$  несовершенна, мы поступаем как в [10], т. е. вместо  $\text{Mod}T$  работаем с классом  $E_T^+$ . Когда рассматривается произвольная  $\Delta$ -PJ-теория  $T$ , то класс  $E_T^+$  рассматривается как расширение класса  $E_T$  (оба класса всегда существуют), и в зависимости от совершенности и несовершенности теории  $T$  теоретико-модельные свойства класса представляют особый интерес. В данной статье рассматриваемые  $\Delta$ -PJ-теории являются  $\Delta$ -PJ-совершенными, что является естественным обобщением совершенности в йонсоновском случае. В дальнейшем  $\Sigma^+$  - есть множество позитивных экзистенциальных формул.

**Определение 10.**

[7]  $\Delta$ -PJ теория  $T$  называется полной для  $\Gamma$ , если  $T = \text{Th}_\Gamma(A)$  для некоторой модели  $A$  теории  $T$ .

**Определение 11.**

$[7](A, a_0, \dots, a_{n-1}) \Rightarrow_\Gamma (B, b_0, \dots, b_{n-1})$  означает, что для каждой формулы  $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$  из  $\Gamma$ , если  $A \models \varphi(\bar{a})$ , то  $B \models \varphi(\bar{b})$ .

2.  $(A, \bar{a}) \equiv_\Gamma (B, \bar{b})$  означает, что  $(A, \bar{a}) \Rightarrow_\Gamma (B, \bar{b})$  и  $(B, \bar{b}) \Rightarrow_\Gamma (A, \bar{a})$ .

**Определение 12.**

[7] Формула  $\varphi(x_0, \dots, x_n)$  называется полной для  $\Gamma$ -формул, если  $\varphi$  совместна с  $T$  и для каждой формулы  $\psi(x_0, \dots, x_n)$  из  $\Gamma$ , имеющей не более свободных переменных чем  $\varphi$ , либо  $T \models \forall \bar{x}(\varphi \rightarrow \psi)$  либо  $T \models \forall \bar{x}(\varphi \rightarrow \neg \psi)$ .

**Определение 13.**

[7] Модель  $A$  называется  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$ -атомной моделью  $\Delta$ -PJ-теории  $T$ , если  $A$  является моделью  $\Delta$ -PJ-теории  $T$  и для каждого  $n$ , каждый  $n$ -кортеж элементов из  $A$  удовлетворяет в  $A$  некоторую формулу из  $\Gamma_1$ , полную для  $\Gamma_2$ -формул.

**Определение 14.**

[7] Модель  $A$  называется  $\Gamma$ -nice моделью  $\Delta$ -PJ-теории, если - счетная модель, и для каждой модели  $B$  теории  $T$ , каждого  $n \in \omega$ , и всех  $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ ,  $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ , если  $(A, a_0, \dots, a_{n-1}) \Rightarrow_\Gamma (B, b_0, \dots, b_{n-1})$ , то для каждого  $a_n \in A$  существует  $b_n \in B$  такой, что  $(A, a_0, \dots, a_n) \Rightarrow_\Gamma (B, b_0, \dots, b_n)$ . В рамках выше указанных определений в [8] получены следующие результаты.

*Теорема 1.* [1] Пусть  $T$  —  $\Delta$ -PJ-совершенная  $\Delta$ -PJ-теория, полная для  $\Sigma^+$ -предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $T$  имеет  $h$ - $\Delta$ -алгебраически простую модель;

2)  $T_{\Delta}^*$  имеет  $(\Sigma^+, \Sigma^+)$ -атомную модель.

*Теорема 2.* [1] Пусть  $T$  -  $\Delta$ -PJ-совершенная  $\Delta$ -PR-теория, полная для  $\forall \exists^+$ -предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

1)  $A$  - счетная и  $(\Sigma^+, \Sigma^+)$ -атомная модель  $T_{\Delta}^*$ ;

2)  $A$  — счетная и  $\Delta$ -позитивно экзистенциально замкнутая  $\Sigma^+$ -модель  $T$ . Если  $\Gamma$  — множество формул, то  $t_{\Gamma}^A(\bar{a}) = \{\varphi(\bar{x}) \mid \varphi \in \Gamma, A \models \varphi(\bar{a})\}$  называется  $\Gamma$ -типом  $\bar{a}$  в  $A$ .

**Определение 15.**

$A$  называется минимальной моделью теории  $T$ , если  $A$  является моделью теории  $T$  и не существует собственной подструктуры  $A$ , являющейся моделью теории  $T$ .

*Теорема 3.* [1] Пусть  $T$  —  $\Delta$ -PJ-совершенная  $\Delta$ -PR-теория, полная для  $\Sigma^+$ -предложений. Тогда следующие условия эквивалентны: 1)  $T$  имеет минимальную  $h$ - $\Delta$ -алгебраически простую модель; 2)  $T_{\Delta}^*$  имеет только одну  $h$ - $\Delta$ -алгебраически простую модель, которая  $(\Sigma^+, \Sigma^+)$ -атомная.

**Определение 16.**

Модель  $A$   $\Delta$ -PM-теории  $T$  называется  $\Delta$ -финитно почти-слабо  $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ -атомной моделью  $T$ , если для любого  $\bar{a} \in A$  выполняется одно из следующих:

1) существует  $\psi(\bar{x}) \in \Sigma_{\alpha+1}^+$  такая, что  $A \models \psi(\bar{a})$  и  $\psi(\bar{x})$  порождает  $t_{\Sigma_{\alpha+1}^+}^A(\bar{a})$ ;

2) существуют  $k < \omega$ ,  $\psi_1(\bar{x}), \psi_2(\bar{x}), \dots, \psi_k(\bar{x}) \in \Sigma_{\beta+1}^+$ , такие, что:

а) каждая  $\psi_i(\bar{x})$  порождает  $t_{\Sigma_{\alpha+1}^+}^A(\bar{a})$ ,  $1 \leq i \leq k$ ;

б)  $T$  совместна  $\psi_i(\bar{x})$ ,  $1 \leq i \leq k$ ;

в) если  $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma_{\beta+1}^+$ ,  $\varphi(\bar{x})$  совместна с  $T$  и  $\varphi(\bar{x})$  порождает  $t_{\Sigma_{\alpha+1}^+}^A(\bar{a})$ , то  $T \vdash \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{x})$  для некоторого  $\psi_i(\bar{x})$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

В связи с этим определением в классе счетных моделей  $\Delta$ -PM-теории получен следующий результат, связанный с проблемой алгебраической простоты и который обобщает результат (лемма 14 из [2]).

*Лемма 1.* Если  $\beta \geq \alpha$ ,  $A$  — счетная  $\Delta$ -финитно почти-слабо  $(\Sigma^+_{\beta+1}, \Sigma^+_{\alpha+1})$  — атомная модель  $T$ , то  $A$  является хорошей почти-слабо  $(\Sigma^+_{\beta+1}, \Sigma^+_{\alpha+1})$  — атомной моделью  $T$ .

Доказательство. Данное доказательство верно и в том случае, если теория  $T$  не является йонсоновской. Пусть  $\bar{a}^\omega = \langle a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$  — элементы из  $A$ .

1 СЛУЧАЙ.  $A$  является слабо  $(\Sigma^+_{\beta+1}, \Sigma^+_{\alpha+1})$  - атомной моделью.

Тогда пусть — такие формулы из  $\Sigma^+_{\alpha+1}$ , что  $A \models \psi_n(\bar{x}^{-n})$  и  $\psi_n(\bar{x}^{-n})$  порождают  $t^A_{\Sigma^+_{\alpha+1}}(\bar{a})$ ,  $1 \leq n < \omega$ . Легко понять, что  $T \vdash \psi_n(\bar{x}^{-n}) \leftrightarrow \exists^+ x_{n+1}(\bar{x}^{-n+1})$ ,  $1 \leq n < \omega$ . Ясно теперь, что в силу произвольности  $\bar{a}^\omega$   $A$  — хорошая почти-слабо  $(\Sigma^+_{\beta+1}, \Sigma^+_{\alpha+1})$  - атомная модель теории  $T$ , а следовательно, и хорошая почти-слабо  $(\Sigma^+_{\beta+1}, \Sigma^+_{\alpha+1})$  атомная модель теории  $T$ , т. к.  $\beta \geq \alpha$ .

2 СЛУЧАЙ.  $A$  не является слабо  $(\Sigma^+_{\beta+1}, \Sigma^+_{\alpha+1})$  - атомной моделью теории  $T$ . В этом случае существует такое  $n < \omega$ , что для  $\bar{a}^{-n}$  не выполняется условие 1) определения 16. Нетрудно убедиться, что тогда для всех  $m \geq n$   $\bar{a}^{-m}$  не удовлетворяют условию 1) определения 16. Поэтому существуют такие  $k_m < n$ ,  $\Sigma^+_{\beta+1}$  - формулы  $\psi_i^m(\bar{x}^{-m})$ ,  $n \leq m < \omega$ ,  $1 \leq i \leq k_m$ , совместные с  $T$ , что для каждого  $m$  ( $n \leq m < \omega$ ) имеет место:

а)  $\psi_i^m(\bar{x}^{-m})$  порождает  $t^m = t^A_{\Sigma^+_{\alpha+1}}(\bar{a}^{-m})$ ,  $1 \leq i \leq k_m$ ;

б)  $\psi_j^m(\bar{x}^{-m}) \in \Sigma^+_{\beta+1}$  если совместна с  $T$  и порождает  $t^m$ , то  $T \vdash \varphi(\bar{x}^{-m}) \leftrightarrow \psi_i^m(\bar{x}^{-m})$  для некоторого  $1 \leq i \leq k_m$ . Ясно, что для каждого  $m$ ,  $n \leq m < \omega$ , и каждого  $j$ ,  $1 \leq j \leq k_{m+1}$ , существует  $i$  такое,  $1 \leq i \leq k_m$ , что верно  $T \vdash \psi_i^m(\bar{x}^{-m}) \leftrightarrow \exists^+ x_{m+1} \psi_j^{m+1}(\bar{x}^{-m+1})$ . Теперь на множестве

$\left\{ \psi_i^m(\bar{x}^{-m}) : n \leq m < \omega, 1 \leq i \leq k_m \right\}$  введем бинарное отношение  $R$  следующим образом:

$$\left\langle \psi_i^m(\bar{x}^{-m}), \psi_j^k(\bar{x}^{-k}) \right\rangle \in R \Leftrightarrow m+1 = k \ \& \ T \vdash \neg \psi_i^m(\bar{x}^{-m}) \leftrightarrow \exists^+ \psi_j^{m+1}(\bar{x}^{-m+1})$$

. По теореме Кенига о счетных графах [10], существуют такие

формулы  $\psi_{i_m}^m(\bar{x}^{-m})$ ,  $n \leq m < \omega$ ,  $1 \leq i \leq k_m$ , что  $\langle \psi_{i_m}^m(\bar{x}^{-m}), \psi_{i_{m+1}}^{m+1}(\bar{x}^{-m}) \rangle \in R$ , для всех  $n \leq m < \omega$ . Пусть теперь  $\Phi_m(\bar{x}^{-m}) \psi_{i_m}^m(\bar{x}^{-m})$ , если  $n \leq m < \omega$ , и  $\Phi_m(\bar{x}^{-m}) \exists^+ x_{m+1}, \dots, x_n \psi_{i_m}^n(\bar{x}^{-m})$ , если  $1 \leq m < n$ . Ясно, что  $A$  является хорошей почти-слабо  $(\Sigma_{\beta+1}^+, \Sigma_{\alpha+1}^+)$ - атомной моделью теории  $T$ .

В работе [7] исследуются связи между алгебраической простотой и различными видами атомности. В данной статье рассмотрено некоторое обобщение этой связи. Пусть  $T$   $\Delta$ -PJ-теория. Модель  $A$  теории  $T$  называется  $h$ - $\Delta$ -алгебраически простой, если для любой модели  $B$  теории  $T$  существует  $h$  -  $\Delta$ -погружение модели  $A$  в  $B$ . Класс всех  $\Delta$ -позитивно экзистенциально замкнутых моделей теории  $T$  обозначим  $E_T^+$ . Класс всех  $h$ - $\Delta$ -алгебраически простых моделей теории  $T$  обозначим  $AP_T^{h-\Delta}$ . Пусть  $E^+ AP_T^{h-\Delta} = E_T^+ \cap AP_T^{h-\Delta} = E^+ T \cap AP_T^{h-\Delta}$ .  $T$  назовем позитивно предмодельно полной, если  $E^+ AP_T^{h-\Delta} = \emptyset$ . Формулу  $\varphi(\bar{x}) \in \Gamma_1$  будем называть почти атомной в теории  $T$ , если для любой формулы  $\psi(\bar{x}) \in \Gamma_2$  из совместности  $T \cup \{\varphi \wedge \psi\}$  следует, что  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ , где  $\Gamma_1, \Gamma_2$ - виды формул. Модель  $A$  теории  $T$  называется почти  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$ - атомной, если любой кортеж элементов из этой модели удовлетворяет некоторой почти атомной  $\Gamma_1$ -формуле в теории  $T$ . Получен следующий результат. Пусть  $\Delta = B^+(At)$ . Достаточность такого  $\Delta$  для нашего случая, следует из работы [9].

*Теорема 4.* Пусть  $T$ - позитивно предмодельно полная,  $\exists$ -полная  $\Delta$  - PJ-теория, которая йонсоновская. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) модель  $A \in E^+ AP_T^{h-\Delta}$  ;
- 2) модель  $A$  - счетная почти  $(\Sigma^+, \Sigma^+)$ - атомная, где  $\Sigma^+$ - множество всех позитивных экзистенциальных формул.

*Доказательство.* Пусть модель  $A \in E^+ AP_T^{h-\Delta}$ . Так как модель  $A$   $h$ - $\Delta$ -алгебраически проста (т.е.  $h$ - $\Delta$ -погружается в любую модель данной теории) и  $\Delta$ -позитивно экзистенциально замкнута, то она счетна и в классе  $\text{Mod}T$  нет конечных моделей. Это следует из следующего замечания. Так как согласно [9] любая модель из  $\text{Mod}T$  продолжается в некоторую  $\Delta$ -позитивную экзистенциально замкнутую модель, то последняя модель в силу своего определения не может быть конечной. В этом случае в силу транзитивности отношения на  $\text{Mod}T$ , а именно, это отношение между двумя моделями эквивалентно определению быть

экзистенциально замкнутой моделью. Легко понять, что оно переносится на позитивно экзистенциально замкнутые формулы. Таким образом, из этого следует, что  $\text{Mod}T = E_T$ . А  $E_T \cong \text{Mod}T^*$ . Тогда любая модель из  $T$  лежит в  $E_T^+$ . Тогда по теореме 13 из [2] мы имеем, что она хорошая почти-слабо  $(\Sigma^+, \Sigma^+)$  — атомная, а значит и почти  $(\Sigma^+, \Sigma^+)$  — атомная. В обратную сторону следует из леммы 12 из [2] при соответствующих позитивных заменах рассматриваемых в этой лемме понятий. Теперь мы рассмотрим несчетно категоричные  $\Delta$  – PJ- теории. Дадим следующие определения.

**Определение 17.**

Формула  $\varphi(\bar{x})$  называется  $\Delta^+$  — формулой относительно теории  $T$ , если существуют позитивно-экзистенциальные формулы  $\psi_1(\bar{x})$  и  $\psi_2(\bar{x})$  совместные с  $T$  такие, что  $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_1)$  и  $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_2)$ .

**Определение 18.**

Мы будем говорить, что теория  $T$  допускает  $R^+$ , если для любой позитивно экзистенциальной формулы  $\varphi(\bar{x})$  совместной с  $T$  существует формула  $\psi(\bar{x}) \in \Delta^+$  совместна с  $T$  такая, что  $T \models \psi \rightarrow \varphi$ .

**Определение 19.**

Счетная модель теории  $T$  называется счетно алгебраически универсальной моделью, если в неё  $\Delta$ -погружаются все счетные модели данной теории.

**Определение 20.**

Модель  $A$  является  $\Delta$ -алгебраически простой моделью теории  $T$ , если  $A$  является моделью теории  $T$  и  $A$  может быть  $\Delta$ -погружена в каждую модель теории  $T$ .

**Определение 21.**

$\Delta$ -PJ теория называется универсальной если её аксиомы позитивно-универсальны.

**Определение 22.**

[8, 7.5].  $\Delta$  – PJ-теория  $T$  является  $\Gamma$ -полной, если она равна  $\text{Th}_\Gamma(M)$  для некоторой структуры  $M$  языка теории  $T$ , где  $\Gamma$ —это множество формул. Следующий результаты содержатся в [7].

*Теорема 5.* [7] Пусть  $T$ -универсальная теория полная для экзистенциальных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда  $T$  имеет алгебраически простую модель, которая  $(\Sigma, \Delta)$  - атомная.

*Теорема 6.* [7] Пусть  $T$ - $\forall\exists$ -теория полная для экзистенциальных предложений, допускающая R1. Тогда следующие условия эквивалентны:

1)  $T$  имеет алгебраически простую модель,  
 2)  $T$  имеет  $(\Sigma, \Delta)$ -атомную модель,  
 3)  $T$  имеет  $(\Delta, \Sigma)$ -атомную модель,  
 4)  $T$  имеет  $\Delta$ -nice алгебраически простую модель,  
 5)  $T$  имеет единственную алгебраически простую модель. где условие  $R1$  следующее: если для любой экзистенциальной формулы  $\varphi(\bar{x})$  совместной с  $T$  существует формула  $\psi(\bar{x}) \in \omega$  совместна с  $T$  такая, что  $T \models \psi \rightarrow \varphi$ , а формула  $\varphi(\bar{x})$  называется  $\Delta$ -формулой относительно теории  $T$ , если существуют экзистенциальные формулы  $\psi_1(\bar{x})$  и  $\psi_2(\bar{x})$  такие, что  $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_1)$  и  $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_2)$ . Как следствие можно получить следующие результаты относительно  $\Delta$ -PJ теории.

*Теорема 7.* Пусть  $T$  — универсальная  $\Delta$  — PJ теория полная для позитивных экзистенциальных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда  $T$  имеет  $\Delta$ -алгебраически простую модель, которая  $(\Sigma, \Delta)$ -атомная.

*Теорема 8.* Пусть  $T$  —  $\Delta$  — PJ теория полная для позитивно экзистенциальных предложений, допускающая  $R_1$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $T$  имеет  $\Delta$ -алгебраически простую модель,
- 1)  $T$  имеет  $(\Sigma, \Delta^+)$  — атомную модель,
- 2)  $T$  имеет единственную  $\Delta$ -алгебраически простую модель.

**Определение 23.**

Пусть  $A, B \in (E_T)^+$  и  $A \stackrel{C}{\neq} B$ . Тогда  $B$  называется  $\Delta$ -алгебраически простым модельным расширением  $A$  в  $(E_T)^+$ , если для любой модели  $C \in (E_T)^+$  из того, что  $A$   $\Delta$ -погружается в  $C$  следует, что  $B$   $\Delta$ -погружается в  $C$ . Следующий классический результат М. Морли описывает  $\omega_1$ -категоричные теории на языке простых расширений.

*Теорема 9.* [1, 38.7] Полная теория  $T$   $\omega_1$ -категорична тогда и только тогда, когда любая её счетная модель имеет простое собственное элементарное расширение.

*Лемма 2.* [3]. Пусть  $T$  произвольная теория.

- 1) Модель  $M$  теории  $T$   $\alpha$ -однородна для  $T$  тогда и только тогда, когда  $M$   $\beta$ -однородна для всех  $\beta \leq \alpha$ .
- 2) Модель  $M$  теории  $T$   $\alpha$ -универсальна для  $T$  тогда и только тогда, когда  $M$   $\beta$ -универсальна для всех  $\beta \leq \alpha$ .

*Лемма 3.* [3]. Семантическая модель  $C$  йонсоновской теории  $T$  является  $T$ -экзистенциально замкнутой. Следующий результат является обобщением теоремы 9.

*Теорема 10.* Пусть  $T$  — универсальная  $\Delta$  – PJ теория полная для для позитивных экзистенциональных предложений, для которой выполняется  $R^+_1$  и  $\Delta = V(At)$ . Тогда следующие условия эквивалентны: 1)  $T^* \omega_1$ -категорична, 2) любая счетная модель из  $(E_T)^+$  имеет  $\Delta$ -алгебраически простое модельное расширение в  $(E_T)^+$ .

*Доказательство.* Теория  $T$  является йонсоновской в обычном случае. В этом случае под  $T^* = Th(C)$ , где  $C$  —  $T$ -универсальная  $T$ -однородная модель теории  $T$ . 1)  $\Rightarrow$  2) Если  $T^* \omega_1$  — категорична, то она совершенна в силу теоремы Морли о несчетной категоричности. Тогда в силу критерия совершенности [4] йонсоновской теории мы имеем, что теория  $T^*$  модельно полна и  $Mod T^* = E_T$ . В этом случае следует, что  $E_T = (E_T)^*$ . Если теория  $T^*$  модельно полна, то любое  $\Delta$ -погружение является изоморфным вложением. А в силу модельной полноты  $T^{*-}$  элементарным. Так как  $T^*$  — полная теория, то, применяя к ней теорему 7., получаем требуемое. 2)  $\Rightarrow$  1) Применяя лемму 2 к семантической модели  $C$  теории  $T$  (она существует так как  $T$  — йонсоновская теория), получим, что модель  $C \omega$  — универсальная. Её мощность, вообще говоря, больше чем счетная. Поэтому рассмотрим её счетную элементарную подмодель  $D$ . В силу того, что  $C$  экзистенциально замкнута в силу леммы 3, её элементарная подмодель  $D$  тоже экзистенциально замкнута. Отсюда имеем, что она счетно-алгебраически универсальна. Теперь остается применить теорему 7., согласно которой теория  $T$  имеет  $\Delta$ -алгебраически простую модель  $A_0$ . Определим по индукции  $A_{\delta+1}$ , которая будет  $\Delta$ -алгебраически простым модельным расширением модели  $A_\sigma$  и  $A_\lambda = U\{A_\delta | \delta < \lambda\}$ . Тогда пусть  $A_\lambda = U\{A_\delta | \delta < \omega_1\}$ . Предположим, что  $V \models T$  и  $card V = \omega_1$ . Для того чтобы показать, что  $V \approx A$ , разложим  $V$  в цепь  $\{B_\delta | \delta < \omega_1\}$  счетных моделей. В силу йонсоновости теории  $T$  это возможно. Определим функцию  $g : \omega_1 \rightarrow \omega_1$  и цепь  $\{f_\delta : A_{g\delta} \rightarrow B_\delta | 0 < \delta < \omega_1\}$   $\Delta$ -погружений индукцией по  $\delta$ :

1.  $g0=0$  и  $f_0: A_0 \rightarrow B_0$ .
2.  $g\lambda = \bigcup \{g\delta | \delta < \lambda\}$  и  $f_\lambda = \bigcup \{f_\delta | \delta < \lambda\}$
3.  $f_{\delta+1}$  равна объединению цепи  $\{f_\delta^\gamma | \gamma < p\}$ , которая определяется индукцией по  $\gamma$ .
4.  $f_{\delta+1}^0 = f_\delta, f_{\delta+1}^\lambda = \bigcup \{f_{\delta+1}^\gamma | \gamma < \lambda\}$ .
5. Предположим, что  $f_1^\gamma : A_{g\delta+1} \rightarrow B_{\delta+1}$ . Если  $f_{\delta+1}^\gamma$  — отображение на, то  $p=\gamma$ . В противном случае в силу  $\Delta$ -алгебраической простоты  $A_{g\delta+\gamma+1}$  можно продолжить  $f_{\delta+1}^\gamma$  до  $f_{\delta+1}^{\gamma+1} : A_{g\delta+\gamma+1} \rightarrow B_{\delta+1}$ .
6.  $g(\delta+1) = g\delta + p$ .

Ясно, что  $f = \bigcup \{f_\delta \mid \delta \prec \omega_1\}$  отображает  $\Delta$ -погружает  $A$  в  $B$ . Теперь осталось применить теорему 8. Так как  $B$  — произвольная модель теории  $T$ , а  $A$  — единственная  $\Delta$ -алгебраически простая и позитивно экзистенциально замкнутая модель в силу условия и построения, то отсюда следует, что  $(E_T)^*$  в несчетной мощности имеет единственную модель, значит семантическая модель теории  $T$  насыщена, то есть йонсоновская теория  $T$  совершенна. Отсюда следует, что  $\text{Mod} T^* = (E_T)^*$ . Следовательно,  $T^*_{\omega_1}$  — категорична.

### Список литературы:

1. Ешкеев А. Р. О некоторых видах атомности среди счетных моделей в классе  $E+T$  для  $\Delta$  – PJ-теорий и  $\Delta$  – PR-теорий // Математический журнал. Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27). — С. 27—34.
2. Ешкеев А. Р., Мустафин Т. Г.  $\alpha$ -алгебраические простые модели и виды атомных моделей теории Теория алгебраических структур: Сб. научн. труд.-Караганда, 1985. — С. 30—39.
3. Ешкеев, А. Р. Оспанов Р. М., Йонсоновские теории и их компаньоны// Материалы 10-ой Межвузовской конференции по математике и механике. Т. 1., Алматы, 2005, — С. 85—90
4. Ешкеев А. Р., Оспанов Р. М., Связь йонсоновских теорий с теоремой Линдстрема // Труды V- Казахско-Французского коллоквиума по теории моделей. Сборник научных трудов, Караганда: Изд-во КарГУ, 2001, — С. 65—75.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей М: Мир 1977, 614 с.
6. Сакс. Дж. Теория насыщенных моделей. М.: Мир, 1976.
7. Baldwin J. T., Kieker D. W. Algebraically prime models Annals of Mathematical Logic 20 .1981, p. 289—330
8. Ben-Yaacov I. Compactness and independence in non first order frameworks. Bulletin of Symbolic logic, volume 11 (2005), no. 1, p. 28—50.
9. Ben-Yaacov. I. Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic 3 (2003), no. 1, p. 85—118.
10. Pillay A. Forking in the category of existentially closed structures Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry (A. Macintyre, ed), Quaderni di Matematica, vol.6, University of Naples, 2000.
11. Vaught R., Denumerable models of complete theories in Infinitistic Methods Pergamon. London. P. 303-321

## 1.5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

### О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

*Карданова Муслимат Луиановна*

*ассистент кафедры вычислительной математики*

*КБГУ, г. Нальчик*

*E-mail: [muslimat.kardanova@mail.ru](mailto:muslimat.kardanova@mail.ru)*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (регистрационный номер НИР: 1.6197.2011).*

Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником встречаются при описании различных процессов, в которых учитываются эффекты памяти [2].

**Цель работы:** Получение априорных оценок для решения первой краевой задачи уравнения теплопроводности с нелокальным интегральным источником в дифференциальной и разностной формах.

**1. Постановка задачи и априорная оценка.** В прямоугольнике  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  рассматривается первая краевая задача

$$u_t = (k(x)u_x)_x - q(x) \int_0^t u(x, \tau) d\tau + f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где:  $0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2, q(x) \geq 0$ .

Умножим уравнение (1) на  $u(x, t)$  и проинтегрируем по переменной  $x$  от 0 до  $l$ . Тогда получим

$$\int_0^l u_t(x, t) u(x, t) dx = \int_0^l (k(x)u_x)_x u(x, t) dx - \int_0^l q(x) u(x, t) \int_0^t u(x, \tau) d\tau dx + \int_0^l f(x, t) u(x, t) dx. \quad (4)$$

Преобразуем с учетом граничных условий слагаемые равенства (4):

$$\int_0^l u_t(x, t) u(x, t) dx = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2, \quad (5)$$

$$-\int_0^l (k(x)u_x)_x u(x, t) dx = \int_0^l k(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \geq c_1 \|u_x\|_0^2, \quad (6)$$

где:  $\|u\|_0^2 = \int_0^l u^2 dx$ .

$$\int_0^l q(x) u(x, t) \int_0^t u(x, \tau) d\tau dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l q(x) \left(\int_0^t u(x, \tau) d\tau\right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \sqrt{q} \int_0^t u(x, \tau) d\tau \right\|_0^2. \quad (7)$$

В силу равенства  $u(x, t) = \int_0^x u_s ds$  имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^l u(x, t) f(x, t) dx \\ &= \int_0^l f(x, t) \int_0^x u_s(s, t) ds dx = \int_0^l u_s(s, t) ds \int_s^l f(x, t) dx \\ &\leq \int_0^l |u_x| dx \int_0^l |f| dx \\ &\leq \varepsilon \left( \int_0^l |u_x| dx \right)^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \left( \int_0^l |f| dx \right)^2 \leq \\ &\leq \varepsilon l \|u_x\|_0^2 + \frac{l}{4\varepsilon} \|f\|_0^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Из равенства (4) с учетом (5)—(8) получаем неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_0^2 + c_1 \|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \sqrt{q} \int_0^t u(x, \tau) d\tau \right\|_0^2 \leq \varepsilon l \|u_x\|_0^2 + \frac{l}{4\varepsilon} \|f\|_0^2,$$

которое при  $\varepsilon = \frac{c_1}{2l}$  принимает вид

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|u\|_0^2 + \left\| \sqrt{q} \int_0^t u(x, \tau) d\tau \right\|_0^2 \right) + \frac{c_1}{2} \|u_x\|_0^2 \leq \frac{l^2}{2c_1} \|f\|_0^2. \quad (9)$$

Проинтегрируем неравенство (9) по  $\tau$  от 0 до  $t$ :

$$\|u(x, \tau)\|_0^2 + \left\| \sqrt{q} \int_0^t u(x, \tau) d\tau \right\|_0^2 + c_1 \int_0^t \|u_x(x, \tau)\|_0^2 d\tau \leq$$

$$\leq \frac{l^2}{c_1} \int_0^t \|f(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 \quad (10)$$

Из априорной оценки (10) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)—(3) от входных данных.

**2. Разностная схема.** Введем пространственную сетку  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih\}_{i=0}^{N_1}$  и сетку по времени  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau\}_{j=0}^{N_2}$  с шагами  $h = l/N_1$  и  $\tau = T/N_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } y_i^j &= y(x_i, t_j), \quad y_{\bar{x},i}^j = (y_i^j - y_{i-1}^j)/h, \quad y_{x,i}^j = \\ &= (y_{i+1}^j - y_i^j)/h \\ (ay_{\bar{x}})_{x,i}^j &= (a_{i+1}y_{i+1}^j - (a_{i+1} + a_i)y_i^j + a_i y_{i-1}^j)/h^2, \\ a_i &= k(x_i - 0,5h), \quad d_i = q(x_i), \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_j + 0,5\tau), \quad y_t \\ &= (y_i^{j+1} - y_i^j)/\tau \\ y_i^{(\sigma)} &= \sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma)y_i^j, \quad 0 \leq \sigma \leq 1. \end{aligned}$$

Дифференциальной задаче (1)-(3) поставим в соответствие разностную схему

$$y_t = (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x - d \sum_{s=0}^j (\sigma y^{s+1} + (1 - \sigma)y^s)\tau - d(\sigma - 1)y^{(\sigma)}\tau + \varphi, \quad (11)$$

$$y_0^{j+1} = 0, \quad y_N^{j+1} = 0, \quad (12)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i). \quad (13)$$

Разностная схема (11)—(13) имеет порядок аппроксимации  $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$ , где  $m_\sigma = 2$  при  $\sigma = \frac{1}{2}$  и  $m_\sigma = 1$  при  $\sigma \neq \frac{1}{2}$  [3].

### Результаты работы.

**Теорема.** Пусть  $0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2$ , тогда условия  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ , достаточно для абсолютной устойчивости разностной схемы (11)—(13), и для ее решения справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|y\|_0^2 + c_1 \sum_{j'=0}^j \|\sigma y_{\bar{x}}^{j'+1} + (1 - \sigma)y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \\ \leq \frac{1}{c_1} \sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2, \quad (14) \end{aligned}$$

где:  $\|y\|_0^2 = \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h$ ,  $\|y\|_0^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 h$ .

**Доказательство.** Умножим уравнение (11) на  $y^{(\sigma)}h$  и просуммируем по  $i$  от 1 до  $N - 1$ . Тогда получим

$$(y_t, y^{(\sigma)}) - \left( (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)} \right) + \left( d \sum_{s=0}^j (\sigma y^{s+1} + (1 - \sigma)y^s)\tau, y^{(\sigma)} \right) = \\ = -(\sigma - 1)\tau \|\sqrt{d}y^{(\sigma)}\|_0^2 = (\varphi, y^{(\sigma)}), \quad (15)$$

где  $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ .

Преобразуем слагаемые равенства (15):

$$(y_t, y^{(\sigma)}) = \frac{1}{2} (\|y\|_0^2)_t + \tau \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \|y_t\|_0^2, \quad (16)$$

$$- \left( (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)} \right) = (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}) \geq c_1 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2, \quad (17)$$

$$\left( d \sum_{s=0}^j (\sigma y^{s+1} + (1 - \sigma)y^s)\tau, y^{(\sigma)} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left( \|\sqrt{d} \sum_{s=0}^j (\sigma y^{s+1} + (1 - \sigma)y^s)\tau\|_0^2 \right)_t + \frac{\tau}{2} \|\sqrt{d}y^{(\sigma)}\|_0^2, \quad (18)$$

$$(\varphi, y^{(\sigma)}) = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i h \sum_{k=1}^i y_{\bar{x},k,h}^{(\sigma)} = \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x},k,h}^{(\sigma)} \sum_{k=i}^{N-1} \varphi_k h \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{N-1} |y_{\bar{x},k}^{(\sigma)}| h \sum_{k=1}^{N-1} |\varphi_k| h \leq \varepsilon \left( \sum_{i=1}^{N-1} |y_{\bar{x},k}^{(\sigma)}| h \right)^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^{N-1} |\varphi_i| h \right)^2 \leq \\ \leq \varepsilon \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (19)$$

Подставляя (16)—(19) в равенство (15) получим

$$\frac{1}{2} \left( \|y\|_0^2 + \|\sqrt{d}v\|_0^2 \right)_t + \tau \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \|y_t\|_0^2 + \tau \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \|\sqrt{d}y^{(\sigma)}\|_0^2 + \\ + c_1 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq \varepsilon \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2, \quad (20)$$

где:  $v_i^{j+1} = \sum_{s=0}^j (\sigma y^{s+1} + (1 - \sigma)y^s)\tau$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$ ,  $v_i^0 = 0$ .

Из (20) при  $\varepsilon = \frac{c_1}{2}$ , следует неравенство

$$\left( \|y\|_0^2 + \|\sqrt{d}v\|_0^2 \right)_t + \tau(2\sigma - 1) \|y_t\|_0^2 + \tau(2\sigma - 1) \|\sqrt{d}y^{(\sigma)}\|_0^2 + \\ + c_1 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq \\ \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_0^2 \quad (21)$$

Умножив неравенство (21) на  $\tau$  и просуммировав по  $j'$  от 0 до  $j$ , в силу условия  $\sigma \geq 1/2$ , получим априорную оценку (14).

Разностная схема (11)–(13) была запрограммирована на языке MatLab. Численные результаты работы программы для тестового примера при различных  $\sigma$ ,  $h$ , и  $\tau$  приведены в таблице 1. Тестовый пример был подобран так, чтобы функция  $u(x, t) = e^{xt} + \sin xt$ , была решением задачи (1)–(3), где  $k(x) = 2 - \sin 3x$ ,  $q(x) = x(1 - \cos(3x))$ ,  $l = 1$ ,  $T = 1$ .

Согласно теореме разностная схема (11)–(13) абсолютно устойчива при  $\sigma \geq \frac{1}{2}$  и имеет порядок аппроксимации  $O(h^2 + \tau^2)$  при  $\sigma = \frac{1}{2}$ , и порядок  $O(h^2 + \tau)$  при  $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ . Устойчивость и сходимость для случая  $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$  требует дальнейшего исследования.

**Таблица 1**

**Результаты работы программы для тестового примера**

$\sigma = 1$		$\ y - u\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
$h, \tau = 0,1$		$8,9 \cdot 10^{-3}$
$h, \tau = 0,01$		$9,1 \cdot 10^{-4}$
$h, \tau = 0,001$		$9,1 \cdot 10^{-5}$
$\sigma = 0,5$		$\ y - u\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
$h, \tau = 0,1$		$1,6 \cdot 10^{-3}$
$h, \tau = 0,01$		$1,6 \cdot 10^{-5}$
$h, \tau = 0,001$		$1,6 \cdot 10^{-7}$
$\sigma = 0,75$		$\ y - u\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
$h = 0,1$	$\tau = 0,01$	$1,3 \cdot 10^{-3}$
$h = 0,1$	$\tau = 0,1$	$5,3 \cdot 10^{-3}$
$h = 0,01$	$\tau = 0,0001$	$1,3 \cdot 10^{-5}$
$h = 0,01$	$\tau = 0,01$	$4,6 \cdot 10^{-4}$

**Список литературы:**

1. Алиханов А. А., Нелокальные краевые задачи в дифференциальных и разностных трактовках // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 7. С. 924–931.
2. Кожанов А. И., Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 5. С. 1062–1073.
3. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. — 735 с.

## 1.6. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

### ГЕНЕРАЦИЯ N-ОЙ ПЕРЕСТАНОВКИ В ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ

*Броницкая Наталья Анатольевна*

*канд. физ.-мат. наук, ННУ им. В. А. Сухомлинского, г. Николаев*

*E-mail: [natbron@mail.ru](mailto:natbron@mail.ru)*

*Дармосюк Валентина Николаевна*

*канд. физ.-мат. наук, ННУ им. В. А. Сухомлинского, г. Николаев*

*Бережецкая Виктория Геннадиевна*

*студентка, ННУ им. В. А. Сухомлинского, г. Николаев*

В математике и ее приложениях часто приходится иметь дело с различного рода множествами и подмножествами: устанавливать связь между элементами каждого, определять число множеств или их подмножеств, обладающих заданным свойством. Задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств, относятся к комбинаторным задачам. В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: перестановки, размещения, сочетания.

В последнее время возросла роль вычислений **комбинаторного** характера в прикладных задачах. Комбинаторные вычисления обычно предусматривают трудоемкие расчеты. Программная реализация таких вычислений позволяет их упростить и, наряду с тем, способствует лучшему пониманию учащимися языка программирования и принципов алгоритмизации.

Многие прикладные задачи сводятся к нахождению оптимального решения среди очень большого конечного числа вариантов. В большинстве случаев единственный способ отыскать решение состоит в переборе всех возможных вариантов и сравнении их между собой. Исходя их выше сказанного, необходимо уметь строить алгоритмы перебора различных комбинаторных объектов – последовательностей, перестановок, подмножеств и т. д. [1]

Перебор, рекурсия, перебор с отходом назад и т. п. — этими понятиями должен хорошо владеть каждый программист.

Кроме того, переборные задачи составляют значительную долю всех олимпиад по информатике и математике.

Схема перебора всегда будет одинакова [1]:

- во-первых, надо установить порядок на элементах, подлежащих перечислению (в частности, определить, какой из них будет первым, а какой последним);
- во-вторых, научиться переходить от произвольного элемента к непосредственно следующему за ним (т. е. для заданного элемента  $x_1$  строить такой элемент  $x_2$ , что  $x_1 < x_2$  и между  $x_1$  и  $x_2$  нет других элементов).

Наиболее естественным способом упорядочения составных объектов считается лексикографический порядок, принятый в любом словаре (сначала сравниваются первые буквы слов, потом вторые и т. д.). А вот процедуру получения следующего элемента каждый раз приходится изобретать заново.

Лексикографический порядок это естественный способ упорядочивания последовательностей на основе сравнения индивидуальных символов.

Существует много методов, приемов и алгоритмов для нахождения (построения) следующей в лексикографическом порядке перестановки. Перестановка – это упорядоченный набор элементов, в котором порядок имеет значение. Как известно количество различных перестановок из  $n$  элементов равно в точности  $n!$ .

Наиболее известны два алгоритма генерации перестановок — рекурсивный и алгоритм лексикографического порядка перестановок. Стандартная библиотека шаблонов STL языка программирования C++ содержит реализованный алгоритм нахождения следующей в лексикографическом порядке перестановки `next_permutation` [4], который упрощает написание некоторых программ. Но каждая комбинаторная задача требует индивидуального подхода, когда возникает необходимость найти особенный алгоритм на основе уже известных.

Рассмотрим комбинаторную задачу, которая предлагалась на Всеукраинской студенческой олимпиаде по программированию, I этап, Тренировочный турнир, 19 апреля 2012 г. и вызвала значительные затруднения у участников олимпиады. Ее особенностью является то, что нужно генерировать не обычную (в общепринятом понимании) наименьшую лексикографически перестановку, а удовлетворяющую дополнительному условию — состоящую из двух чередующихся множеств с разным количеством элементов. Этот факт несколько затрудняет использование общеизвестных алгоритмов, но при этом побуждает к поиску других путей решения. Они должны быть к тому же оптимальными, поскольку в задаче предполагается применение алгоритма не один раз, а некоторое количество  $T$  тестовых случаев при ограничении времени в 1 с.

**Троллинг.** [5] В языке троллей 5 согласных звуков {h, k, m, r, t} и 3 гласных {a, o, u}. Каждое слово начинается с согласной буквы, при этом в слове не может быть подряд две гласные или согласные.

$N$  троллей по очереди называют самое короткое слово, которое еще не назвал никто из предыдущих троллей. Если вариантов несколько, то тролль выбирает наименьшее лексикографически. Лексикографический порядок  $h < k < m < r < t < a < o < u$ . При этом слова сравнивают сначала по первой букве. Если первые буквы одинаковые, то по второй и т. д.

Найти слово, которое назовет  $N$ -ый тролль.

**Формат входных данных.** В первой строке содержится единственное число  $1 \leq T \leq 100$ , количество тестовых случаев. В каждой из последующих  $T$  строк содержится одно число  $1 \leq N \leq 1000000000 (1e9)$  — количество троллей.

Для каждого числа  $N$  из входных данных выведите в отдельной строке ответ на задачу в соответствии с форматом, показанным в примере.

**Примеры.**

Входные данные	Результат работы
3	Case #1: ha
6	Case #2: tut
95	Case #3: muhomor
13934	

**Примечание.** Порядок слов такой:  $h, k, m, r, t, ha, ho, hu, ka, ko, \dots$

Предложенную задачу нельзя решать полным перебором, учитывая ограничения в условии, а нужно искать оптимальные пути решения. Нами предлагается следующий алгоритм решения этой задачи, не содержащее переборов вообще и для каждого тестового случая работающий за  $O(k)$ , где  $k$  — длина искомого слова ( $1 \leq k \leq 15$ ).

Для решения задачи нужно выяснить *длину*  $k$  слова названного  $N$ -м тролем и *номер* искомого  $k$ -буквенного слова в лексикографическом порядке среди всех слов с соответствующим количеством символов.

Количество  $k$ -символьных слов ищем по формуле размещений с повторениями  $\bar{A}_n^k = n^k$ . На первое место можно выбрать букву пятью способами (множество согласных букв по условию задачи содержит 5 символов), на второе — тремя (множество гласных букв по условию задачи содержит 3 символа), на третье — снова пятью (символы могут повторяться), на четвертое — тремя и т. д. Таким образом, мы подсчитываем и храним в массиве количество  $k$ -буквенных слов: 1-буквенных — 5, 2-буквенных —  $5 \times 3 = 15$ , 3-буквенных —  $5 \times 3 \times 5 = 75$ , 4-буквенных —  $5 \times 3 \times 5 \times 3 = 225$  и т. д. По условию задачи максимальное количество троллей — 1000000000, тогда максимальная длина слова, сказанного последним троллем слова — 15 символов,  $1 \leq k \leq 15$ .

Выполняя описанные умножения до тех пор, пока не превысим заданное значение  $N$ , мы одновременно накапливаем сумму полученных результатов и считаем их количество таким образом устанавливая *количество символов в слове*, сказанном  $N$ -ным троллем, при этом вычитаем полученные результаты из  $N$  для *вычисления номера* искомого  $k$ -буквенного слова в лексикографическом порядке среди всех слов с соответствующим количеством символов.

После определения длины  $k$  искомого слова применяем следующий алгоритм:

1. Количество  $k$ -буквенных слов записываем в переменную  $x$ .
2. Повторяем следующий пункт ровно  $k-1$  раз.
3.  $x$  делим на 5 (для нечетного шага) или на 3 (для четного шага) и по остатку определяем искомую согласную (гласную) букву, а частное снова запоминаем в  $x$ .
4. Последнюю букву получаем как последнее частное, которое хранится в  $x$ , но нужно учитывать четность шага для определения будет ли эта буква гласной или согласной.

При делении на 5 остатки получаем в пределах [0;4] и из соответствующей строки "thkmrt" выводим согласную букву по описанному выше остатку. Аналогично с делением на 3 и строкой "uaou".

Теперь приводим код программы на языке программирования C++. В программе используется контейнер *string* стандартной библиотеки шаблонов STL, хотя можно рассматривать и константный массив символов.

```
int main()
{
    string g="uaou";
    string p="thkmrt";
    int T;
    cin>>T;
    for(int j=0;j<T;j++)
    {
        int sum=0,n;
        cin>>n;
        int x=1,k=0; bool f=true;
        while(sum<n)
        {
            if(f)x*=5;else x*=3;
            f=!f;
            sum+=x;
            k++;
        }
        n=n-sum+x;
```

```

f=false;
cout<<"Case #"<<j+1<<" ";
for(int i=1;i<k;++i)
{
if(!f){x/=5.0;cout<<p[ceil((double)n/(double)(x))];n%=(x);}
else{x/=3.0;cout<<g[ceil((double)n/(double)(x))];n%=(x);}
f=!f;
}
if(!f)cout<<p[n]<<endl;else cout<<g[n]<<endl;
}
}

```

Комбинаторная математика уже достаточно давно занимает видное место среди математических дисциплин, но между тем не теряет своей актуальности и сегодня. Комбинаторные задачи предоставляют богатый материал для изучения основных конструкций, методов и приемов программирования, позволяющих показать не только красоту математики, но и возможности новых компьютерных технологий при решении практических математических задач. Выполнять вычисления на дискретных конечных математических структурах можно с помощью комбинаторных алгоритмов, которые рассматриваются на стыке программирования и математики. Как известно, эффективные комбинаторные алгоритмы находят применение во многих областях нечисленной обработки информации, особенно в дискретной оптимизации и исследовании операций. Так при решении описанной в статье задачи использовался расширенный алгоритм нахождения перестановки в лексикографическом порядке по ее номеру, использующий поочередно два разных множества с разным количеством элементов. Данный алгоритм может быть модифицирован для произвольного количества множеств и их элементов.

### Список литературы:

1. Булычев В. А. Методы программирования: переборные алгоритмы [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://algotist.manual.ru/maths/combinat/sequential.php> (дата обращения: 06.05.2012)
2. Липский В. Комбинаторика для программистов. — М.: Мир, 1988. — 213 с.
3. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. — М.: Мир, 1980. — 476 с.
4. Information on the C++ language [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: [http://www.cplusplus.com/reference/algorithm/next\\_permutation](http://www.cplusplus.com/reference/algorithm/next_permutation) (дата обращения: 07.05.2012)
5. I этап Всеукраинской студенческой олимпиады по программированию. Южный регион [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://ejudge.crimea.edu> (дата обращения: 19.04.2012) ю

## СЕКЦИЯ 2.

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

#### 2.1. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

##### АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ВИДИМОСТИ ОБЪЕКТОВ НА ПЛАНЕ

*Лукоянов Сергей Владимирович*

*ассистент, ФГБОУ ВПО АГТУ, г. Астрахань*

*E-mail: [Lsv\\_x@mail.ru](mailto:Lsv_x@mail.ru)*

*Белов Сергей Валерьевич*

*канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой Автоматизированные системы обработки информации и управление, ФГБОУ ВПО АГТУ, г. Астрахань*

При создании проекта видеонаблюдения все трудности ложатся на плечи человека, который может быть не достаточно квалифицированным специалистом, способного допустить серьезные ошибки. Поэтому остается актуальной разработка системы, способной самостоятельно без участия человека или с минимальным его участием, с учетом огромного множества факторов и требований к установке камер, различного рода рекомендаций, основанных на опыте большого числа экспертов, утвержденных в регламентах министерства внутренних дел РФ. В процессе проектирования системы видео наблюдения, крайне важно учитывать взаимное расположение объектов на плане. Любую поверхность территории можно задать функцией  $z = f(x, y)$ . Кроме этого любой объект на плоскости можно задать аналогичной функцией. Для каждого типа объекта (элементы природы или ландшафта, а также столб, стена, стол, стул, любой другой искусственный предмет) можно задать шаблон, при котором достигается оптимальная его наблюдаемость  $z = f_{sh}(x, y, x_i, y_i)$  с центром в точке  $(x_i, y_i)$  [1, с. 39—47]. В шаблоне необходимо учитывать:

- если на пути видимости располагается, какой либо предмет с заданным коэффициентом прозрачности, то территория, которую закрывает объект, считается невидимой.
- если объект закрыт другим объектом не полностью, то видимость такого объекта определяется на основе коэффициента допустимого закрытия, заданной экспертно для каждого типа объектов.
- если объем предмета меньше шаблона, заданного для данного предмета, то таким предметом можно пренебречь, т. е. за ним не спрятаться.

Расчеты при проектировании в трехмерной системе координат более точные, но при большом количестве объектов на плане сильно увеличивают время проводимых расчетов, поэтому, если не требуется особая точность целесообразно проводить расчет в двух мерной системе координат [2, 113—118].

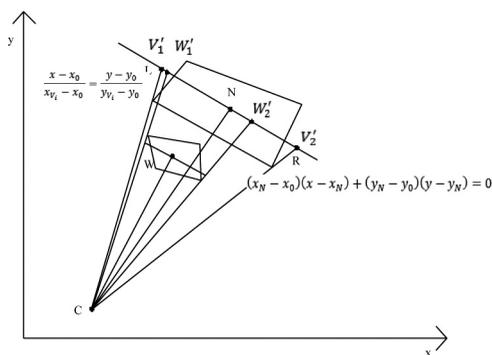
Опишем алгоритм расчета относительного закрытия объекта в системе видеонаблюдения.

Его входными параметрами будут:

- объект и координаты его узловых точек;
- точка обзора;
- другие объекты в зоне наблюдения.

Пусть объекты на плане будут заданы сколь угодно сложными многоугольниками.

Тогда  $V$  — это объект коэффициент видимости которого необходимо определить.  $W$  — это объект или объекты которые закрывают объект  $V$ , на который направлен фокус выбранной камеры в данной точке наблюдения.



**Рисунок 1. Проекция объекта  $W$  на прямую  $r$ .**

Пусть  $C$  — это точка расположения камеры,  $CT$  — центральная точка объекта.

1. Определение центральной точки наблюдаемого объекта.

Пусть  $CT$  — центральная наблюдаемого точка объекта, тогда ее координаты будут находиться по следующим формулам.

$$CT_x = \frac{|\max X - \min X|}{2} + \min X,$$

$$CT_y = \frac{|\max Y - \min Y|}{2} + \min Y,$$

где:  $\max X = \max_{x_i \in V} \{x_i\}$ ,  $\min X = \min_{x_i \in V} \{x_i\}$ ,  $\max Y = \max_{y_i \in V} \{y_i\}$ ,  $\min Y = \min_{y_i \in V} \{y_i\}$ ,  $i \in [1..n]$ .

2. Построение проектирующей прямой  $p$ , которая проводится через центральную точку объекта, таким образом, что точка  $N$  принадлежит прямой  $p$  и линия  $CN$  перпендикулярна прямой  $p$ .  $p: N \in p$  и  $CN \perp p$

3. Нахождение проекции точек объекта на прямую  $p$ .

Пусть  $V_i$  — точка объекта, тогда  $V_i'$  определяется, как точка пересечения прямых  $CV_i'$  и  $p$ .  $CV_i' \cap p$ , где  $i \in [1..n]$  — некая точка рассматриваемого объекта, а  $n$  количество всех точек объекта.

Для этого необходимо найти решение системы уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{x_{V_i} - x_0} = \frac{y - y_0}{y_{V_i} - y_0}, \\ (x_N - x_0)(x - x_N) + (y_N - y_0)(y - y_N) = 0. \end{cases}$$

Из которого, после преобразования, получаем:

$$\begin{cases} (y_{V_i} - y_0)x + (x_0 - x_{V_i})y = x_0 y_{V_i} - y_0 x_{V_i}, \\ (x_N - x_0)x + (y_N - y_0)y = x_N^2 + y_N^2 - x_0 x_N - y_0 y_N \end{cases}$$

Методом Крамера рассчитываются координаты точек пересечения с проекционной прямой  $p$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{V_i} - y_0 & x_0 - x_{V_i} \\ x_N - x_0 & y_N - y_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_0 y_{V_i} - y_0 x_{V_i} & x_0 - x_{V_i} \\ x_N^2 + y_N^2 - x_0 x_N - y_0 y_N & y_N - y_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_{B_i} - y_0 & x_0 y_{B_i} - y_0 y_{B_i} \\ x_N - x_0 & x_N^2 + y_N^2 - x_0 x_N - y_0 y_N \end{vmatrix}$$

$$x'_{V_i} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$y'_{V_i} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Необходимо задать прямую  $p$  в параметрической форме, чтобы иметь возможность определять принадлежность отрезку проекции наблюдаемого объекта проекции других объектов. Пусть  $V_i$  точка объекта,  $V'_i$  определяется как точка пересечения прямой  $CV_i \cap p$ .

Среди проекций  $V_i$  находим крайние точки, такие чтобы проекции всех других точек наблюдаемого объекта лежали внутри полученного отрезка  $\forall i \in [1, n] \rightarrow V_i \in [V_L, V_R]$ , где  $L, R \in [1, n]$ .

Получив крайние точки объекта возможно построить уравнение прямой  $p$  в параметрическом виде. Граничные параметры объекта будут заданы проекциями крайних точек рассматриваемого объекта на параметрическую прямую  $p$ .

$$\begin{cases} x = x_{V'_L} + (x_{V'_R} - x_{V'_L})t, \\ y = y_{V'_L} + (y_{V'_R} - y_{V'_L})t, \end{cases}$$

где  $x_{V'_L}$  и  $y_{V'_L}$  — координаты проекции крайней левой точки  $L$ , рассматриваемого объекта, заданная с параметром прямой  $t=0$ ;  $x_{V'_R}$  и  $y_{V'_R}$  — координаты проекции крайней правой точки  $R$ , рассматриваемого объекта, заданная с параметром  $t=1$ .

Пусть  $t = pr(x, y)$  есть решение системы. Нетрудно видеть, что для  $\forall V_i \in [1, \dots, n]$  выполняется следующее свойство  $t = pr(x, y) \in [0, 1]$ .

#### 4. Нахождение теней остальных объектов.

Под тенью объекта будет пониматься та часть проекции на прямую  $p$ , которая лежит внутри отрезка  $V'_L, V'_R$ .

4.1. Тенью группы объектов назовем объединение теней входящих в это множество объектов.

Тенью объекта является отрезок, который можно задавать картежом состоящего из 2 параметров  $\langle t_L, t_L \rangle$

$$t_L = pr(x'_L, y'_L),$$

$$t_R = pr(x'_R, y'_R).$$

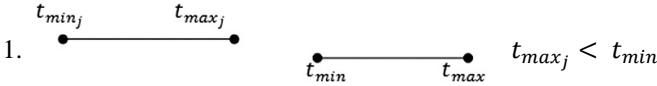
Пусть имеется множество теней объектов и требуется найти тень группы этих объектов.

Построение множества теней группы объектов  $M$ . Инициализация множества теней  $M: = \emptyset$ .

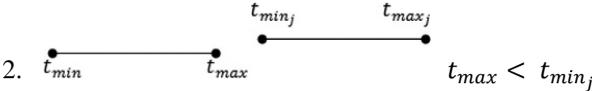
Для каждого нового добавляемой тени  $\langle t_{min}, t_{max} \rangle$  необходимо выполнить следующие действия.

Рассмотрим все возможные варианты пар картежей ( $\langle t_{min}, t_{max} \rangle, \langle t_{min_j}, t_{max_j} \rangle$ ), где  $\langle t_{min_j}, t_{max_j} \rangle \in M$ .

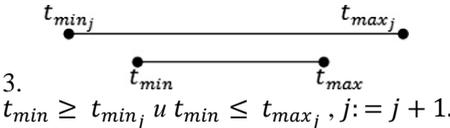
Возможно, шесть вариантов размещения теней относительно друг друга.



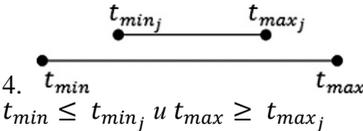
В этом случае тени не пересекаются, и следует перейти к рассмотрению следующего объекта  $j := j + 1$ . В этом случае прерываться рассмотрение и происходит переход к следующему этапу.



В этом случае тени также не пересекаются, и следует перейти к рассмотрению следующего объекта  $j := j + 1$ . В этом случае прерываться рассмотрение и происходит переход к следующему этапу.

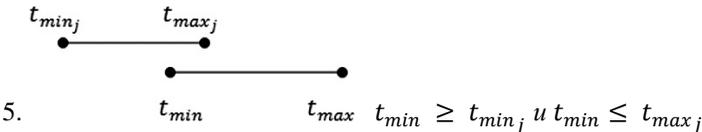


В этом случае новая тень уже содержится в рассматриваемой группе теней, поэтому добавления не происходит.



В этом случае рассматривается большая тень, поэтому следует исключить тень, которая была раньше и поставить во множество  $M$  ту тень, которая включает в себя тень, находящуюся во множестве  $M$ .

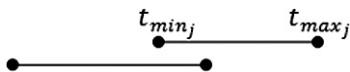
$$M := M \setminus \langle t_{min_j}, t_{max_j} \rangle, j := j + 1.$$



В этом случае необходимо расширить тень влево и удалить тень, которая находилась во множестве  $M$  ранее.

$$M := M \setminus \langle t_{min_j}, t_{max_j} \rangle, j := j + 1.$$

Повторить проверку элементов.



6.  $t_{min}$   $t_{max}$   $t_{max} \geq t_{min_j}$  и  $t_{max} \leq t_{max_j}$

В этом случае тень расширяется вправо и удаляется тень, которая находилась во множестве  $M$  ранее.

$t_{max} := t_{max_j}$ ,  $M := M \setminus \langle t_{min_j}, t_{max_j} \rangle$ ,  $j := 1$ . Повторить проверку элементов.

После рассмотрения всех вариантов  $M := M \cup \langle t_{min}, t_{max} \rangle$ .

4.2. Длину общей тени будем определять как сумму длин не пересекающихся отрезков составляющих множество длин теней объектов.

5. Видимость объекта определяется, как выполнение следующего условия:

1 — СДТ  $\geq$  ДПЗ, где СДТ — суммы длин теней всех объектов, которые его загораживают, ДПЗ — коэффициент допустимого закрытия объекта, значение которого определяет минимальный порог, при котором возможно сказать, что объект достаточно виден для поставленной задачи наблюдения. ДПЗ для одного типа объектов может различаться для задачи идентификации объектов и для задачи обзора объектов.

В данной работе описан алгоритм расчета затенения объектов, который возможно применять для расчета видимости объектов в системах видеонаблюдения. Данный расчет проводится в двухмерной системе координат, что позволяет увеличить скорость обработки информации. На основе полученной информации возможно построение множеств хорошо видимых объектов, фокусировка камер на которые позволит построить более точную модель видимых объектов. В которой будет возможно определить множество критериев оценки качества и стоимости предлагаемой модели видеонаблюдения.

### Список литературы:

1. Белов С. В., Попов Г. А. Оценка наблюдаемости объекта защиты телекамерами на основе формирования полного набора показателей эффективности их функционирования. Датчики и системы № 5 — М: 000 “СенСиДат”, 2009 С. 39—47
2. Белов С. В., Давидюк Н. В. Общая схема решения задачи эффективного размещения средств обнаружения на объекте защиты Вестник Саратовского гос. техн. ун-та. — 2009. — № 4(43). — Вып.2. С. 113—118

## АНАЛИЗ КОРРЕКТНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПРИЗНАКАМИ

*Мазорчук Мария Сергеевна*

*канд. техн. наук, доцент, Национальный аэрокосмический университет «ХАИ», г. Харьков*

*Сухобрус Анатолий Андреевич*

*канд. техн. наук, профессор Национальный аэрокосмический университет «ХАИ», г. Харьков*

*Добряк Виктория Сергеевна*

*аспирант, Национальный аэрокосмический университет «ХАИ», г. Харьков*

*E-mail: [mazorchuk\\_mary@inbox.ru](mailto:mazorchuk_mary@inbox.ru)*

При исследовании связей между признаками в социальной сфере, экономике, образовании часто возникают проблемы с выбором адекватных статистических методов для построения качественных моделей, отображающих зависимость между явлениями и процессами. В технических науках использование методов математической статистики является достаточно понятным, поскольку большинство исследуемых параметров измеряются в метрических шкалах, что дает возможность исследователю использовать параметрические методы оценки [1]. В социологии, педагогике, психологии, экономике часто приходится иметь дело с качественными данными, которые могут измеряться в номинальных либо порядковых шкалах [4]. В этом случае прибегают к непараметрическим методам оценки. Однако, часто используют методы регрессионного и корреляционного анализа для порядковых и даже номинальных признаков, забывая об ограничениях и допущениях этих методов, что приводит к некачественному анализу и построению неадекватных моделей. Таким образом, *актуальной* является задача выбора методов, позволяющих построить качественные модели, отражающие зависимости между разнородными данными.

*Целью данной работы* является исследование возможных ошибок, которые могут возникнуть в ходе обработки и анализа данных и выбор адекватных методов для построения качественных статистических моделей.

Рассмотрим на примере обработки результатов тестов вступительных экзаменов возможные ошибки анализа данных. В настоящее

время большое внимание в сфере образования уделяется оценки качеству тестов [3]. Например, одной из проблем является оценка качества тестов Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ) в России и Внешнего Независимого Оценивания (ВНО) в Украине [2, 4]. Для проверки справедливости тестов строят регрессионные модели, отображающие зависимость успеваемости студентов от ряда параметров, таких как балл аттестата, средний балл по сертификатам, уровень интеллекта. В ходе оценки могут возникнуть ряд трудностей, которые не позволяют получить качественные модели, отражающие зависимость между данными признаками. Проанализируем возможные проблемы.

#### 1. Проблема шкал оценивания.

В средних школах Украины используется 12-ти бальная система оценивания. Результаты ВНО измеряются в шкале от 100 до 200 баллов. Оценивание в вузах осуществляется по-разному: в 4-х бальной шкале (оценки «2», «3», «4» и «5»); в 12-ти бальной; в 100-бальной. При таком разнообразии шкал расчет коэффициента корреляции Пирсона без преобразования данных просто является некорректным. Следует также учесть, что при оценивании результатов сессии и результатов ВНО используются в принципе разные шкалы оценки. Результаты сессии оцениваются «сырыми» баллами, которые вполне пригодны для оценивания учебных достижений отдельных обучаемых в ходе учебных занятий. Однако они не подходят для массового тестирования при проведении выпускных или вступительных экзаменов, поскольку не позволяют выявить истинных различий в уровне подготовленности экзаменуемых, сравнить их результаты между собой, правильно интерпретировать оценки. Этот факт является и причиной некорректного использования коэффициента корреляции для анализа связи между результатами теста ВНО и сессии.

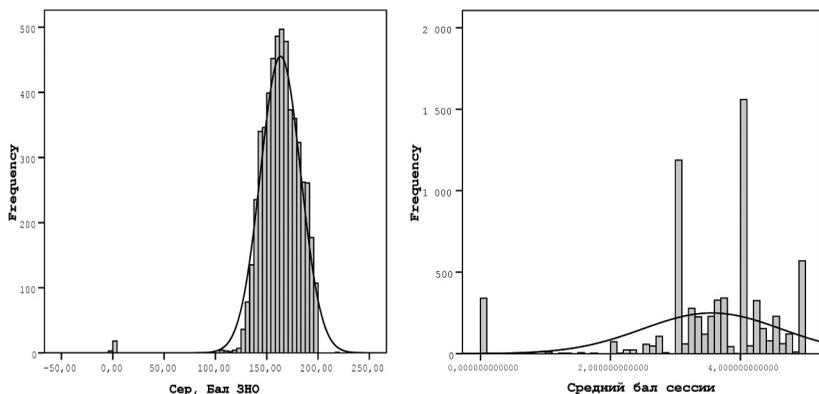
Для корректного перевода оценок следует использовать методы шкалирования результатов. Наиболее известные методы преобразования первичных баллов — это метод процентильного ранга; эквипроцентильный метод; линейная Z-оценка; оценки, которые являются линейным преобразованием z-оценки (Т-шкала, оценки стандартного IQ и т. д.); шкалы станайнов и стенов [3].

#### 2. Проблема пропущенных и некорректных значений.

Поскольку базы данных социологических исследований, результатов тестирования являются достаточно большими (могут содержать сотни тысяч записей), то при вводе данных (даже автоматическом) и при первичной обработке могут иметь место пропущенные значения и некорректно введенные данные. Например, на рис. 1 представлены результаты ВНО и сдачи зимней сессии студентами. Как видно, из

гистограммы частот, среди баллов ВНО имеют место баллы, меньшие 100, и даже отрицательные значения, и довольно много значений равных нулю отображается на гистограмме среднего балла сессии.

Такие значения часто приводят к искажению результатов. Поэтому следует предварительно исследовать данные на обнаружение ошибок, проверить закон распределения и только после этого переходить к выбору методов оценки. В данном случае, целесообразно выборку разбить на группы, и пропущенные и искаженные значения проанализировать отдельно от всей выборки.



***Рис. 1 Гистограммы распределения частот по результатам тестов ВНО и успеваемости в сессию***

Также возможна замена пропущенных значений на средние либо модальные значения с целью обеспечения однородности данных.

### 3. Проблемы ограничений и допущений, накладываемых моделями.

Регрессионный анализ является одним из самых распространенных методов обработки результатов наблюдений. Однако этот метод базируется на ряде ограничений и допущений, нарушение которых приводит к некорректности его использования и ошибочной интерпретации результатов.

Проверка предпосылок и допущений данного метода предполагает решение комплекса задач, к которым относятся: оценка случайности зависимого признака; оценка стационарности и эргодичности исследуемых признаков; проверка гипотезы на нормальность распределения ошибок; обнаружение выбросов; оценка автокорреляции остатков; проверка постоянства математического ожидания и дисперсии ошибок; выявление мультиколлинеарности.

Оценить случайность зависимого признака можно несколькими методами, например, с использованием критерия серий либо методом последовательных разностей [6, с. 197]. Проверка стационарности (под стационарностью понимают неизменность статистических характеристик за время исследования процесса) и эргодичности (для эргодических процессов и математическое ожидание, и дисперсия, и автокорреляционная функция, вычисленные по одной реализации, будут такими же и для любой другой реализации) можно проводить с использованием критериев Стьюдента, Фишера или  $\chi^2$  Пирсона при известном выборочном распределении. При неопределенности относительно распределения исследуемого процесса используют критерии серии или тренда [6, с. 201].

Большинство выводов регрессионного анализа основаны на допущении о нормальном распределении ошибок. Это требует подтверждения с помощью критериев согласия Колмагорова-Смирнова, Пирсона или Шапиро-Уилкса, которые основаны на расчете статистик, являющихся мерами рассогласования эмпирического и теоретического распределения [1, 6].

Остальные задачи относятся к задачам проверки качества полученной регрессионной модели. Одним из важных критериев является коэффициент детерминации, который рассчитывается как отношение факторной дисперсии к общей. Коэффициент детерминации показывает, сколько процентов случаев изменения признака  $x$  приводит к изменению признака  $y$ .

При анализе автокорреляции остатков регрессионной модели

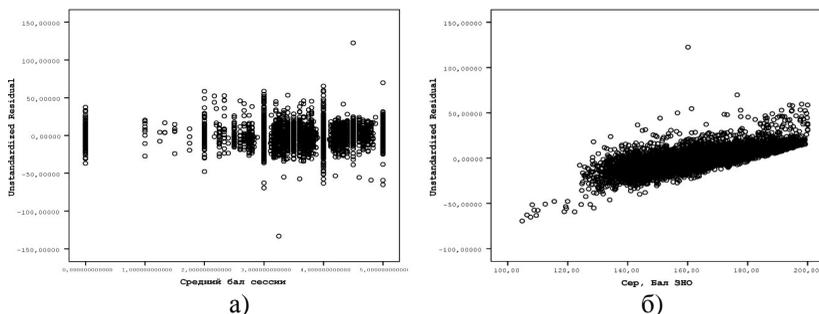
часто применяют критерий Дарбина-Уотсона  $DW = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$ ,

где:  $e_i = y_i - \hat{y}_i$  — остаток для  $i$ -го наблюдения;  $e_i - e_{i-1}$  — правая последовательная разность. В общем случае автокорреляция остатков отсутствует, если  $1.5 < DW < 2.5$  [6].

Проверка постоянства математического ожидания и дисперсии регрессионных ошибок часто осуществляется на основе графического анализа ошибок. При постоянном математическом ожидании и дисперсии график регрессионных ошибок будет иметь вид, как на рис. 2 (а). На данном рисунке отображены результаты первой сессии студентов ряда вузов Украины.

Остатки должны быть нормально распределены, т.е. на графике они должны представлять приблизительно горизонтальную полосу

одинаковой ширины на всем ее протяжении. Коэффициент корреляции между регрессионными остатками и переменными должен равняться нулю. График на рис. 2 (б) свидетельствуют о наличии зависимости среднего от ошибки фактора (результаты ВНО по Украине в 2011 году).



**Рис. 2 Графический метод проверки гипотез постоянства математического ожидания**

Также, важной характеристикой, отражающей качество модели, является мультиколлинеарность факторных признаков. Высокая корреляции между входными переменными модели множественной линейной регрессии вызывает неустойчивость работы модели, когда коэффициенты регрессии сильно меняются даже при незначительном изменении исходных данных.

Таким образом, для решения задач оценки связи между признаками, которые измеряются не в метрических шкалах, а в порядковых или номинальных, целесообразно применять такие методы оценки, как бинарный, мультиномиальный и ранговый регрессионный анализы [6, с. 295]. Для выявления зависимостей хорошие результаты дают методы дисперсионного и дискриминантного анализа. Например, наряду с информацией о группирующих признаках по результатам дискриминантного анализа можно также составить уравнение дискриминантной функции, которое отображает зависимости признаков по оцениваемым группам [6, с. 374].

### Список литературы:

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2004. 479 с.
2. Молибоженко В. В. Математические оценки качества педагогических тестов // ПЕДСОВЕТ.ORG [Электронный ресурс] URL: [http://pedsovet.org/component/option,com\\_mtree/task,viewlink/link\\_id,4409/Itemid,118/](http://pedsovet.org/component/option,com_mtree/task,viewlink/link_id,4409/Itemid,118/) (дата обращения: 27.04.2012).

3. Нейман Ю. М., Хлебников В. А. Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов. М.: Прометей, 2000. 168 с.
4. Пономаренко В. С. Чи можна оцінити здатність особистості до навчання? // Вісник ТІМО № 4/2011. С. 39—41.
5. Толстова Ю. Н. Логика математического анализа социологических данных, М.: Наука, 1991. 110 с.
6. Шамша Б. В., Гуржій А. М., Дудар З. В., Левикін В. М. Математичне забезпечення інформаційно-управляючих систем. Харків: Компанія «Сміт», 2005. 448 с.

## ИСТОРИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ МУЗЫКАЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИИ

*Славцик Арсений Алексеевич*

*аспирант, Сибирский Федеральный Университет, Институт  
Космических и Информационных Технологий, НУЛ САИР*

*E-mail: [arssanderson@yandex.ru](mailto:arssanderson@yandex.ru)*

### **1. Античность**

Алгоритмической музыкой (алгоритмической музыкальной композицией) называют процесс создания музыкальных отрывков, последовательностей и композиций с помощью математических моделей, правил и алгоритмов.

Музыка и математика постоянно переплетались, начиная с незапамятных времен. В античности музыка считалась ответвлением математики. Аврелий Кассиодор описывал математику как союз четырех дисциплин: арифметики, музыки, геометрии, и астрономии.

Первый опыт по формализации музыкальных звуков с помощью математических методов принадлежит Пифагору. В области гармонии Пифагором были произведены важные акустические исследования, приведшие к открытию закона, согласно которому первые (то есть самые главные, самые значимые) консонансы определяются простейшими числовыми отношениями  $2/1$ ,  $3/2$ ,  $4/3$ . Так, половина струны звучит в октаву,  $2/3$  — в квинту,  $3/4$  — в кварту с целой струной. «Самая совершенная гармония» задаётся четвёркой простых чисел 6, 8, 9, 12, где крайние числа образуют между собой октаву, числа, взятые через одно — две квинты, а края с соседями — две кварты. [5, с. 12—16].

### **2. Средние Века**

Первый известный пример применения алгоритмического подхода к сочинению музыки принадлежит итальянскому теоретику музыки Гвидо д'Ареццо (1026), разработавшего соответствующий метод привязки текста к нотам. Каждая нота была назначена определенной гласной, таким образом, мелодия варьировалась, исходя из положения гласных в тексте. Стандартная 12-нотная октава была размечена следующим образом:

Г А В С D E F G a b c d e f g

Затем под этой строкой размещались три цикла гласных следующим образом:

Г А В С D E F G a b c d e f g

a e i o u a e i o u a e i o u

После этого композитору оставалось составить мелодию, пользуясь такой таблицей, исходя из извлеченных текстовых гласных [5, с. 17—20].

### 3. Классический период

Следующим примером попытки применения алгоритмических процедур в докомпьютерную эпоху являются музыкальные кости Моцарта. В данном случае использовались музыкальные фрагменты, которые должны были быть объединены исходя из бросков кости.

#### ZAHLENTAFEL.

#### TABLE de CHIFFRES.

		A	B	C	D	E	F	G	H	
Erster Theil.	Premiere Partie.	2	96	29	141	41	106	122	11	30
		3	32	6	124	63	146	46	134	81
		4	69	95	128	13	133	58	110	24
		5	40	17	113	85	161	2	159	100
		6	148	74	163	45	80	87	36	107
		7	104	157	27	167	154	68	118	91
		8	152	60	171	53	99	133	21	127
		9	119	94	114	50	140	86	169	94
		10	98	142	42	156	75	129	62	123
		11	3	87	165	61	135	47	147	33
		12	54	120	10	103	28	37	106	5

Рисунок 1 — Музыкальные кости Моцарта для 16-тактного менюэта

Номера сверху обозначают восьмые части вальса, а номера слева — возможные комбинации двух брошенных кубиков. Числа внутри матрицы соответствуют количеству тактов музыкальных

фрагментов, которые затем объединяются для создания алгоритмического вальса [6, с. 2—3].

Еще одна математическая модель, использовавшаяся в искусстве на протяжении веков — золотое сечение. Под золотым сечением (обозначающимся греческой буквой  $\phi$ ) подразумевается точка, делящая любой сегмент на такие две части, что соотношение размера более большой части по отношению к маленькой равно соотношению всего сегмента по отношению к большей части.

Золотое сечение неразрывно связано с последовательностью чисел Фибоначчи, открытую Леонардо Пизанским в 13 веке:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144....,

где каждое последующее число является суммой двух предыдущих.

Данная последовательность всегда привлекала различных композиторов, использующих ее в качестве структурной схемы. По отношению ко всей длине произведения точка золотого сечения приходится примерно на 61,8 % хронометража. Обычно композиторы оставляют на данную точку кульминацию отрывка или драматический момент. Самым ранним примером использования такого подхода можно назвать мотет английского композитора Томаса Таллиса «Положиться на кого-то другого» — в золотой середине этого произведения идет такт полной тишины, за которым следует вступление хора из 40 голосов. Также использование золотого сечения можно встретить в произведениях таких композиторов как Шуберт, Бах, Дебюсси [5, с. 23—26].

#### **4. XX век**

Бурное развитие науки и, в частности, математики, начавшееся с середины XIX века, позволило композиторам и ученым воплощать в своих трудах такие идеи, которые ранее казались невозможными. В 20—30х годах двадцатого века, украинский композитор и музыкальный теоретик Иосиф Шиллингер (1885—1943), иммигрировавший в США, развил свою «систему музыкальной композиции Шиллингера» — объемное произведение размером в две тысячи страниц. Данная система покрывала все фундаментальные аспекты музыкальной композиции — контрапункты, ритмы, гармонии и т. д.

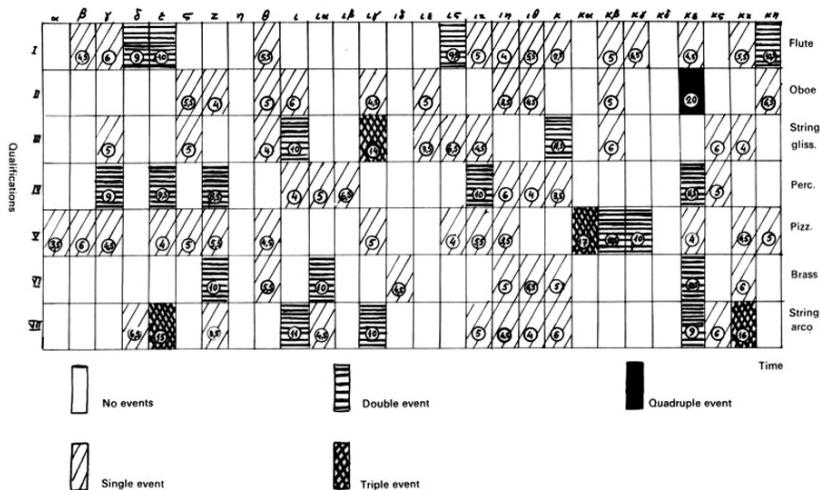
Основной принцип работы этой системы заключался в использовании результирующего вектора (система была по сути геометрической) взаимовлияющих периодических колебаний на квадратную область ритмических и структурных пропорций, с последующей проекцией на области нот и аккордов, контрапунктов, гармонических прогрессий, эмоциональных и семантических аспектов.

Данная работа была встречена резкой критикой за псевдонаучность, отсутствие внятных математических обоснований, и слишком сложный, непостоянный и сбивчивый стиль изложения. Однако именно эта работа определила направления многих будущих научных исследований в области алгоритмического сочинения музыки, и вернула интерес к сфере, забытой на несколько веков [4, с. 125—131].

Первым же человеком, использовавшим математический подход в музыке не в качестве инструмента, а в качестве принципа ее сочинения, был греческий архитектор и музыкант Яннис Ксенакис (1922—2001). По его словам, «с появлением электронных компьютеров композитор станет чем-то вроде пилота: ему останется нажимать кнопки, вводя координаты, и осуществлять контроль над путешествием корабля в пространстве музыки» [12].

В 50-х последним словом авангардистской мысли был так называемый «сериализм» — сложнейшим образом устроенная музыка, которая воспринималась как акустический пуантилизм — то есть состояла из отдельных звуков, висящих в пустоте. На слух никакой логической связи между этими разнородными звуками обнаружить было невозможно, всё вместе производило впечатление бессистемного, визгливого и довольно разреженного акустического пара. Ксенакис написал статью против сериалистического метода, считая, что параметры отдельных звуков не имеют значения, и, разумеется, восстановил против себя весь европейский авангард.

Ксенакис применил к алгоритмическому сочинению музыки стохастические формулы. Более подробно это можно описать на примере его композиции «Брошенное эхо» для 21 инструмента. Данная композиция была написана путем создания сетки из 28 колонок и 7 строк. Каждая строка представляла собой группу инструментов, а каждая колонка — временной период. Ксенакис создавал определенное число музыкальных событий и случайным образом назначал их каждой ячейке. Внутри каждой ячейки он выбирал высоту звука и время смены одного события другим. В частности, он генерировал число событий с помощью распределения Пуассона, время смены отрезков с помощью экспоненциального распределения, высоту тона путем применения равномерного распределения. Скорость Глиссандо же определялась распределением Максвелла-Больцманна [13, с. 79—110].



**Рисунок 3 — сетка Ксенакиса, описанная в его книге «Формализованная музыка»**

Лежарен Хиллер (1924—1994) — американский композитор и доктор химических наук, и, позднее, магистр музыки, первым применил компьютер для алгоритмического сочинения музыки. Его самое знаменитое детище «Сюита Илииака для струнного квартета» (Илииак — название компьютера, на котором она была разработана) — первая композиция, «сочиненная» машиной (1955).

Данная сюита состояла из четырех частей. Первая часть была основана на серии нот, сгенерированных случайно, и, попарно объединенных в соответствии с правилами полифонии XVI века, описанными Джованни Палестриной (итальянский композитор-полифонист). Данные правила содержали три составляющие: мелодическую (ноты, включенные в октаву; ноты, повторение которых запрещено), гармонические (были разрешены только такие интервалы — унисон, октава, минорные или мажорные квинты, сексты, терции; увеличенные кварты считались диссонансными), и правила смешивания (запрет на параллелизацию квинт и октав и т. д.). Вторая часть основывалась практически на тех же принципах, только заданными в соответствии со строгими арифметическими операциями. В третьей части были добавлены правила, описывающие ритм и темп. В четвертой же части компьютеру было доверено выбирать подходящие ноты, руководствуясь вероятностными методами Марковских цепей. Случайный процесс был основан на убеждении, что

в последовательности событий, выбор нового события (в данном случае, ноты), тесно связан с непосредственно предшествующим событием [8].

«Сюита Илиака» стала первым примером применения системы, основанной на знаниях в сфере алгоритмического сочинения музыки. Это был первый опыт композиции, удовлетворительно звучащей для человеческого восприятия (особенно ее вторая часть). Данное произведение пользовалось большой популярностью и неоднократно переиздавалось на аудионосителях.

Первым и единственным ученым, занимавшимся проблемой алгоритмического сочинения музыки в нашей стране был советский музыкант и математик Рудольф Зарипов. В 1960 году на ЭВМ УРАЛ он смоделировал одноголосые марши и вальсы [1, с. 17—19].

В программе этой ЭВМ каждая нота была обозначена пятизначным числом, в котором первые две цифры обозначали порядковый номер звука, третья цифра — длительность звука, четвертая и пятая — высоту звука. Машина должна была заканчивать мелодию всегда первой ступенью лада, и приближаться к концу наиболее короткими интервалами. Были запрещены последовательности из шести нот подряд в одном направлении и парные шаги, превышающие в сумме октаву. Моделирование мелодии производилось с помощью случайного процесса, ограниченного данными правилами.

Эксперимент дал удовлетворительный результат: некоторые мелодии были неприятны даже по меркам музыкального авангарда того времени.

## 5. Современные подходы

Самыми используемыми в последние несколько десятилетий подходами к решению задачи алгоритмической композиции можно назвать несколько техник — Л-системы (системы, основанные на знаниях), клеточные автоматы, генетические алгоритмы, нейронные сети (обучающиеся системы).

*Теория хаоса* — математический аппарат, описывающий поведение некоторых нелинейных динамических систем, подверженных при определённых условиях явлению, известному, как хаос. К частным случаям теории хаоса можно отнести знаменитый Эффект бабочки, а к повлиявшим на развитие алгоритмического сочинения музыки — теорию Фракталов и *Л-системы* [2, с. 44].

*Л-системы* были созданы в 1968 году венгерским ботаником Аристидом Линденмайером для изучения развития простых многоклеточных организмов, которая позже была расширена и используется для моделирования сложных ветвящихся структур —

разнообразных деревьев и цветов. Впервые для решения задач автоматической генерации музыки их применил в своей диссертации 1996 года американский программист и композитор Люк Дюбуа. Работа L-системы начинается с определения трех наборов параметров — алфавита (список символов, которыми будет оперировать система, как на входе, так и на выходе, в нашем случае, например, ноты), набора правил (например, классических законов гармонии) и аксиомы (символ или строка символов для начального ввода) [11, с. 91—99].

L-системы относятся к экспертным системам, основанным на знаниях и заданных наборах правил. К таким системам также можно отнести уже упоминавшиеся Марковские цепи, в которых вероятность перехода от одной ноты к другой вычисляется на основании матрицы вероятностных переходов, исходя из заранее определенных статистических правил [10, с. 17—19].

Другой современный подход — использование *Клеточных автоматов*, изобретенных американским математиком Джоном фон Нейманом в 1966 году. Клеточный автомат может мыслиться как стилизованный мир. Пространство представлено равномерной сеткой, каждая ячейка которой, или клетка, содержит несколько битов данных; время идет вперед дискретными шагами, а законы мира выражаются единственным набором правил, скажем, небольшой справочной таблицей, по которой любая клетка на каждом шаге вычисляет свое новое состояние по состояниям ее близких соседей. Таким образом, законы системы являются локальными и повсюду одинаковыми.

Первым клеточные автоматы в алгоритмической музыке применил бразильский композитор, получивший степень доктора математических наук в Великобритании, Эдуардо Рек Миранда, создав интерактивную систему CAMUS [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. CAMUS генерировала мелодию на основе двух клеточных автоматов: игра в «жизнь» Джона Неймана, и *Demom Cyclic Space* Больцмана. Игра в «жизнь», изобретенная Джоном Конвеем и популяризованная Мартином Гарднером, использует следующие правила: если клетка имеет двух «живых» соседей, она остаётся в прежнем состоянии. Если клетка имеет трёх «живых» соседей, она переходит в «живое» состояние. В остальных случаях клетка «умирает». Несмотря на свою простоту, система проявляет огромное разнообразие поведения, колеблясь между очевидным хаосом и порядком.

Первый клеточный автомат отвечает за выбор нот. Каждая клетка соответствует триаде: первая нота дана заранее определенной из последовательности из 12 нот, а две другие — определены

координатами клетки в музыкальном пространстве. *Demon Cyclic Space* же отвечает за оркестровку, он определяет, какой из инструментов будет подыгрывать основной мелодии.

*Генетический алгоритм* — это эвристический алгоритм поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искомым параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию.

Первопроходцем в применении генетических алгоритмов в алгоритмической музыке считается Джон Бильс — профессор Рочестерского института технологий (Нью-Йорк, США), применивший его для генерации джазовой соло-импровизации в своей программе *GenJam* [3].

Работа генетического алгоритма начинается с применения эквивалента биологического образования новых генов на пространство случайно распределенных решений для нахождения в итоге оптимального набора [9, с. 3—6]. Решения представлены хромосомами, а строки аллель — строками чисел, и задача рекомбинации генов сводится к созданию новых аллелей из аллель, взятых от родительских хромосом путем применения генетических операторов, в большинстве случаев, мутации и скрещивания. Перебирание хромосом продолжается до достижения определенного условия прерывания. Генетические алгоритмы в задаче автоматического музицирования разделяются по виду использованной фитнес-функции — степень приспособленности хромосомом может быть оценена исходя из заранее заданных четких условий, либо может быть определена непосредственно человеком при прослушивании и субъективной оценке.

Под *обучающимися системами* понимают системы, в которых не задано априорных правил, а система сама обучается чертам на примерах. Чаще всего, под такими системами подразумеваются искусственные нейронные сети, имитирующие работу нейронов мозга человека и способные обучаться на основе предоставленных примеров. Обычно такие системы используются в другой отрасли музыкальной математики: при распознавании музыкальных отрывков, например для решения задач реставрации потерянных музыкальных данных или для составления автоматических партитур. Поэтому данный метод не сильно развит в алгоритмической музыке. Существует несколько систем, использующих нейронные сети, например, *HARMONET* или *CONCERT*. *HARMONET* используется для оркестровки мелодий на основе обучения правилам гармонии И. Баха. Первым человеком, применив-

шим нейронные сети к решению задач алгоритмической композиции, был Питер Тодд, профессор психологии и информатики из Калифорнии.

Также, одно из самых последних направлений в сфере алгоритмической композиции — моделирование эмоциональной нагрузки произведений для устранения проблемы сухого математического расчета и привнесения в машинную музыку элементов настроений и смысла, вкладываемых человеком в сочиняемые композиции.

### **Список литературы:**

1. Пучков С. В. Музыкально-исторические предпосылки развития становления электронной (технической) музыки // С. В. Пучков, М. Г. Светлов. Музыкальные компьютерные технологии — СПб., 2005 — Гл.1. — С. 17—19.
2. Aschauer Daniel — Algorithmic Composition — Master Thesis, Austria, 2008 — 44 с.
3. Biles John — Autonomous GenJam / J. Biles // GECCO 2001
4. Degazio Bruno — The Schillinger System of Musical Composition and Contemporary Computer Music, Diffusion, 1988 — 125—131 с.
5. Dias-Geres Gustavo — Algorithmic composition: using mathematical models in music composition: Doctor of musical arts [Manhattan school of music] — 2000 — 12—20, 23—26 с.
6. Edwards Michael — Computational thinking in music / M. Edwards // University of Edinburgh, Computational Thinking Seminar, 2009 — 2—3 с.
7. Miranda Eduardo Reck — CAMUS Tutorial [электронный ресурс] — 2001 — Режим доступа: <http://tamw.atari-users.net/camus/camustut.htm>
8. Nunzio Alex — Illiac suite [электронный ресурс] — 2011 — Режим доступа: [http://www.musicainformatica.it/english/topics/illiac\\_suite.php](http://www.musicainformatica.it/english/topics/illiac_suite.php)
9. Papadopoulos George — AI Methods for Algorithmic Composition : A survey, a Critical View and Future Prospects / P. George //AISB Symposium on Musical Creativity, 1999 — 3—6 с.
10. Peck Jacob M. — Explorations in Algorithmic Composition: Systems of Composition and Examination of Several Original Works — Bachelor's of Science Degree in Computer Science — State University of New York, 2011 — 17—19 с.
11. Pestana Pedro — Lyndenmayerr systems and theory of fractals / P. Pestana // Chaotic Modeling and Simulation, 1, 2012 — 91—99 с.
12. Xenakis Yannis [Электронный ресурс]: А. Горохов — 2001. — Режим доступа: <http://www.muzprosvet.ru/xenakis.html> — Загл. с экрана.
13. Xenakis Yannis— formalized music — thought and mathematics in composition / Y. Xenakis — harmonologia series 6, Pentragon press — 1992 — 79—110 с.

## 2.2. АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ И ПРОИЗВОДСТВАМИ

### РАЗРАБОТКА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОВЕТУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛИКВИДАЦИЕЙ ПОСЛЕДСТВИЙ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ: НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

*Цуриков Александр Николаевич*

*аспирант, ФГБОУ ВПО РГУПС, г. Ростов-на-Дону*

*E-mail: [Tsurik7@yandex.ru](mailto:Tsurik7@yandex.ru)*

Доля ж.-д. транспорта в транспортной системе по грузообороту составляет более 87 %, а по пассажиропотоку — 41 % [2]. По сети ж.-д. дорог перевозится значительное число (до 23 % от общего числа) опасных грузов (ОГ) (более 2500 наименований ОГ, т. е. суммарно до 250 млн. тонн в год), что создает угрозу чрезвычайных ситуаций (ЧС) в результате сходов, столкновений и утечек ОГ с их последующим развитием по пожаровзрывоопасному сценарию. Это особенно опасно в условиях сосредоточения вокруг ж.-д. станций промышленных, производственных объектов, городской застройки. Объекты ж.-д. транспорта уязвимы для терактов, ЧС природного характера и т. д. [3, 5].

По данным ОАО «РЖД» ж.-д. происшествия случаются почти ежедневно [13]. Объективное основание этого процесса — износ фондов достигает 55 % [2]. Значительная доля парка цистерн ОАО «РЖД» эксплуатируется с превышением нормативного срока службы [11].

Лидирующее положение (более 25 %) в числе основных причин ЧС на ж.-д. транспорте занимают **сходы с рельсов**. Еще около 25 % крушений и аварий на железной дороге вызываются **наездами поездов на автомобильный транспорт** на железнодорожных переездах (рис. 1). Также причиной многих ЧС является выезд составов на занятый путь и **столкновения** [13].

Ежегодно увеличивается число **происшествий с составами, нагруженными ОГ**. Ущерб, наносимый такими ЧС, обычно велик, так

как кроме ликвидации последствий самой катастрофы, приходится бороться с вторичными поражающими факторами. Ж.-д. аварии и катастрофы также вызываются воздействием **природных явлений** (оползни, наводнения, землетрясения и т. д.). Они повреждают пути, обрывают провода, разрушают мосты, ухудшают видимость, что создает угрозу безопасности движения.



*Рис. 1. Основные причины ЧС на ж.-д. транспорте*

В [4] отмечается, что железные дороги всегда были «полигоном» для апробирования и внедрения новых, передовых технологий. Сегодня известно [9, 12], что комплексное решение проблем автоматизации управления сложными технологическими процессами возможно лишь на основе создания интегрированных интеллектуальных систем, сочетающих точные математические методы и алгоритмы поиска решений, базирующиеся на экспертных знаниях и моделях человеческих рассуждений.

Под интеллектуальной системой [1] понимают систему, основанную на знаниях, представляющую собой комплекс программных, лингвистических и логико-математических средств, предназначенных для реализации задачи поддержки деятельности человека. Очевидна необходимость создания интеллектуальных систем для ликвидации последствий ЧС на ж.-д. транспорте.

Анализ предметной области показывает, что основной задачей лица принимающего решения (ЛПР) при ЧС является определение количественного и качественного состава необходимых для ликвидации сил и средств, а также наиболее рациональных вариантов их распределения и доставки к месту ЧС.

Однако, детальное рассмотрение вопроса приводит к тому факту, что для решения этой задачи ЛПР должно располагать точной информацией о нанесенном в результате ЧС ущербе. Но получение этой информации в первые минуты ЧС является наибольшей проблемой. ЛПР зачастую располагает лишь обрывочной, неполной информацией, полученной из разных источников. Нередко информация бывает искажена субъективным восприятием наблюдателя, данные являются противоречивыми или вовсе ошибочными [13].

В этих сложных условиях ЛПР должно на основе личного опыта, интуиции, консультаций с др. специалистами принять решение об определении необходимых сил и средств для ликвидации последствий ЧС. При этом нежелательно, как преувеличение, так и преуменьшение числа средств ликвидации. В первом случае это вызовет необоснованные материальные затраты, концентрацию сил в одном месте, «оголение» других проблемных участков и т. д. Во втором случае ликвидация может растянуться во времени, не все пострадавшие своевременно получат необходимую помощь и т. д.

Поясним это на примере. Допустим, произошел сход поезда с рельс. Информация об этом поступает по телефонной связи или по радиосвязи от машиниста (начальника поезда) к ЛПР (дежурному по ближайшей станции). Последний должен на основе неполных данных оценить масштаб происшествия, предполагаемый ущерб и передать информацию о месте и характере ЧС всем заинтересованным службам, в том числе спасательным [13].

Если бы ЛПР обладало данными о числе пострадавших/погибших, о степени тяжести их травм (тяжелой, средней, легкой), количестве и типе сошедших вагонов, опасности возгорания/взрыва, разрушениях железнодорожного полотна и т. д. то определение необходимого числа машин скорой помощи, койко-мест в лечебных учреждениях, пожарных и восстановительных поездов и т. д не представляло бы труда. Следовательно, основные усилия по интеллектуализации в советующей системе (СС) по ликвидации последствий ЧС на ж.-д. транспорте следует направить на создание блока (модуля) предварительной оценки ущерба от ЧС (БПОУ).

Данный подход позволяет рассматривать необходимые для ликвидации силы и средства, как функцию (соответствие) от нанесенного ЧС ущерба:

$$F(X) = Y,$$

где: X — нанесенный ЧС ущерб;

Y — необходимые для ликвидации ЧС силы и средства.

Это позволяет перейти от классической схемы работы экспертных СС [6] по диагностике заболеваний или технических неполадок:

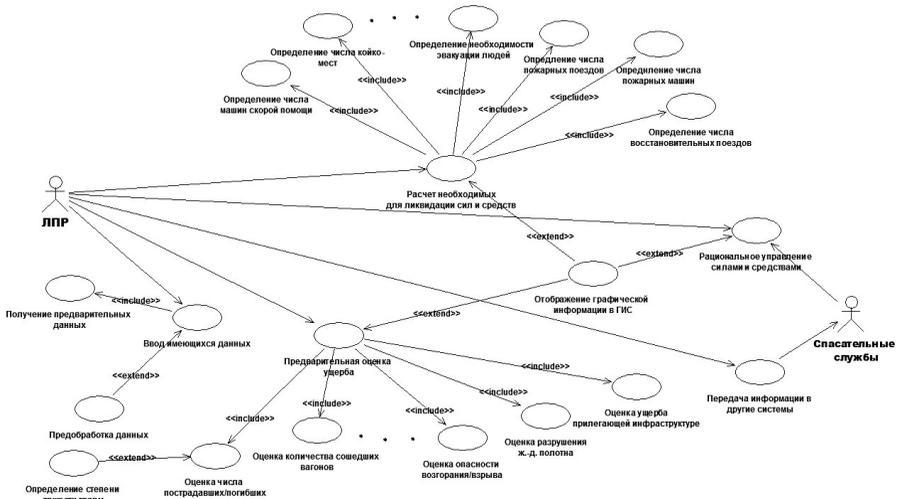
**Ввод симптомов проблемы → определение причин проблемы → выработка рекомендаций (по их устранению)**

к схеме работы советующей системы по ликвидации последствий ЧС:

**Ввод имеющихся данных → предварительная оценка ущерба → расчет необходимых для ликвидации сил и средств → управление (распределение) силами и средствами**

Так как число имеющихся сил и средств, как правило, меньше необходимого, то это обстоятельство порождает дополнительную задачу об их рациональном управлении (распределении).

Для уточнения функциональных требований опишем работу создаваемой системы при помощи диаграмм на языке United Modeling Language (UML). Построим диаграмму прецедентов советующей системы по ликвидации ЧС (рис. 2).



**Рис. 2. Диаграмма прецедентов советующей системы по ликвидации ЧС**

Подход к созданию СС, уже ставший «классическим» [6], предполагает использование баз знаний, как совокупности фактов и правил логического вывода, моделирующих поведение эксперта в определенной области с использованием процедур логического вывода и принятия решений.

Однако в последние годы большой интерес вызывают новые направления имитации интеллектуальной деятельности человека, а именно искусственные нейронные сети (ИНС), генетические алгоритмы, нечеткая логика [8]. Эти направления могут использоваться, как самостоятельно, так и совместно. В последнем случае объединение нескольких технологий позволяет получить новые возможности.

Перспективным направлением в создании СС ряд авторов [7, 8] считает использование ИНС. Не списывая со счетов «классические» подходы к созданию СС следует рассмотреть возможность примене-

ния ИНС при создании интеллектуальной системы управления ликвидацией ЧС на ж.-д. транспорте.

Реализация БПОУ, являющегося ключевой частью рассматриваемой системы, на основе ИНС позволяет по-новому взглянуть на проблему предварительной оценки ущерба от ЧС. Известно [8], что проблемой, с которой ИНС лучше всего умеют справляться, и для которой они применялись с самого начала исследований в этой области, является задача классификации.

Таким образом, на вход БПОУ, содержащего специально обученную ИНС, следует подавать некоторые известные данные о произошедшей ЧС. На выходе ИНС должна выдавать приблизительные оценки ущерба, который могло нанести подобное происшествие. **То есть, можно представить задачу оценки ущерба от ЧС, как задачу классификации.**

Математическая постановка задачи. Пусть  $Z$  — множество описаний ЧС,  $P$  — множество классов описания ущерба от ЧС. Существует неизвестная целевая зависимость — отображение  $z^*: Z \rightarrow P$ , значения которой известны только на объектах конечной обучающей выборки  $Z_m = \{(z_1, p_1), \dots, (z_m, p_m)\}$ . Требуется построить ИНС  $a: Z \rightarrow P$ , способную корректно классифицировать произвольную ситуацию  $z \in Z$ .

Универсальность СС можно достичь путем создания нескольких ИНС, размещенных внутри БПОУ, каждая из которых обучена на распознавание ЧС определенного типа. На начальном этапе следует ориентироваться на самые распространенные ЧС на ж.-д. транспорте (сходы, столкновения подвижного состава и т. д.). В дальнейшем возможна модификация БПОУ путем замены отдельных ИНС, изменения их структуры, весовых коэффициентов и т. д.

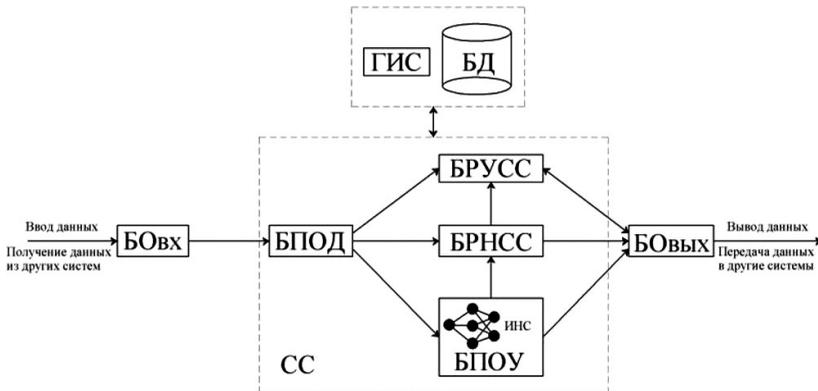
Вместе с тем автор понимает, что работа в рамках данного подхода сопряжена со значительными трудностями: нужно выбрать структуру ИНС, исследовать имеющиеся статистические данные, сформировать корректные обучающие выборки, подобрать весовые коэффициенты и т. д. Однако перспективы открываемые таким подходом являются многообещающими.

Для преодоления описанных трудностей возможно объединение нескольких технологий интеллектуализации (рис. 3). В частности, генетические алгоритмы можно применять для подбора весов и топологии ИНС, а нечеткую логику для описания информации о ЧС в виде правил, основанных на нечетких множествах и лингвистических переменных, что позволяет говорить о необходимости разработки и внедрения гибридных систем.



*Рис. 3. Объединение нескольких интеллектуальных технологий*

На основе приведенных данных, построим укрупненную схему структуры будущей советующей системы по ликвидации последствий ЧС на ж.-д. транспорте, какой она видется на данном этапе работ (рис. 4).



*Рис. 4. Структура советующей системы*

На рисунке 4 использованы следующие условные обозначения.

**БД** — база данных; **БОВх** — блок общения входной; **БОВых** — блок общения выходной; **БПОД** — блок предварительной обработки данных; **БПОУ** — блок предварительной оценки ущерба от ЧС; **БРНСС** — блок расчета необходимых сил и средств для ликвидации последствий ЧС; **БРУСС** — блок рационального управления силами и средствами ликвидации ЧС; **ГИС** — геоинформационная система; **ИНС** — искусственная нейронная сеть; **СС** — советующая система.

Как показано в [10] подобная модульная структура позволяет получить некоторые известные преимущества для различных систем, такие как универсальность, взаимозаменяемость отдельных частей, децентрализация.

***В итоге можно сделать следующие выводы:***

1. Показана опасность ЧС на ж.-д. транспорте, выявлены их основные причины и распределение в процентном отношении. Обоснована необходимость создания и применения СС для ликвидации последствий ЧС;

2. Предложено рассматривать необходимые для ликвидации ЧС силы и средства, как функцию (соответствие) от нанесенного ущерба;

3. Основные усилия по интеллектуализации в СС по ликвидации последствий ЧС на ж.-д. транспорте следует направить на создание блока предварительной оценки ущерба от ЧС (БПОУ);

4. Разработана диаграмма прецедентов СС на языке UML;

5. Предложено представить задачу оценки ущерба от ЧС, как задачу классификации. Предложено использовать для этих целей ИНС в БПОУ;

6. Показано, что современные подходы к созданию интеллектуальных систем предполагают широкую интеграцию технологий. Это позволяет говорить о необходимости разработки и внедрения гибридных систем;

7. Построена укрупненная схема структуры будущей СС по ликвидации последствий ЧС на ж.-д. транспорте.

**Список литературы:**

1. Аверкин А. Н. Толковый словарь по искусственному интеллекту / А. Н. Аверкин, М. Г. Гаазе—Рапопорт, Д. А. Поспелов. М.: Радио и связь, 1992. — 256 с.
2. Аристов С. А. Приветственное слово к участникам конференции. Обращение по проблеме безопасности движения на железнодорожном транспорте // Безопасность движения на железнодорожном транспорте: правовые и технические аспекты: тр. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д. — 2002. — С. 6—9.
3. Гуда А. Н. Оптимизация управления рисками возникновения чрезвычайных ситуаций на железнодорожном транспорте / А. Н. Гуда, И. В. Мартынюк // Транспорт—2006: тр. всерос. науч.-практ. конф., май 2006.: в 3-х ч. — Ч. 3. — С. 296—297.
4. Железнодорожный транспорт: Энциклопедия / Гл. ред. Н. С. Конарев. М.: Большая Российская энциклопедия, 1995. — 559 с.

5. Мартынюк И. В. О разработке компьютерных карт потенциальных опасностей и последствий аварийных ситуаций при перевозках опасных грузов с использованием геоинформационных технологий / И. В. Мартынюк, Н. И. Павленко, Н. С. Флегонтов, В. Ф. Даниленко // Информационные технологии на железнодорожном транспорте «ИНФОТРАНС—2001»: сб. докладов 6-й междунар. науч.-практ. конф., 12—14 окт. 2001 г., Сочи. — С. 156—161.
6. Нейлор К. Как построить свою экспертную систему. М.: Энергоатомиздат, 1991. — 286 с.
7. Пучков Е. В. Разработка среды моделирования искусственных нейронных сетей. Решение задачи прогнозирования временного ряда // Вестник РГУПС. — 2009. — № 2. — С. 44—50.
8. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: пер. с польск. И. Д. Рудинского / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. М.: Горячая линия — Телеком, 2006. — 452 с.
9. Харченко В. А. Сетевой язык представления динамических знаний в интегрированных системах управления технологическими процессами на железнодорожном транспорте / В. А. Харченко, Л. В. Пальчик, С. М. Ковалев // Информационные технологии на железнодорожном транспорте «ИНФОТРАНС—2001»: сб. докладов 6-й междунар. науч.-практ. конф., 12—14 окт. 2001 г., Сочи. — С. 324—326.
10. Цуриков А. Особенности разработки медицинских информационных систем // Инженер. — 2011. — № 3. — С. 2—5.
11. Чачина О. Г. Типология современного рынка конечных грузовых железнодорожных услуг // Вестник РГУПС. — 2006. — № 3. — С. 74—81.
12. Чернов А. В. Способ снижения информационной нагрузки диспетчерского персонала в условиях ограниченного времени / А. В. Чернов, М. А. Бутакова // Информационные технологии на железнодорожном транспорте «ИНФОТРАНС—2001»: сб. докладов 6-й междунар. науч.-практ. конф., 12—14 окт. 2001 г., Сочи. — С. 326—328.
13. Шойгу, С. К. Учебник спасателя / С. К. Шойгу, М. И. Фалеев, Г. Н. Кириллов и др.; Под общ. ред. Ю. Л. Воробьева. — Краснодар: Советская Кубань, 2002. — 528 с.

## 2.3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

### СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАГРУЖЕННОСТИ ГОРОДСКИХ ДОРОГ

*Вялых Константин Михайлович*

*аспирант, Московский государственный технический университет*

*им. Н. Э. Баумана, г. Москва*

*E-mail: [kostyoskol@mail.ru](mailto:kostyoskol@mail.ru)*

В статье анализируется проблема предсказания транспортных заторов на дорогах городов. Предлагаются математические модели и алгоритмы, позволяющие решать задачу прогнозирования дорожной обстановки, используя лишь информацию о скорости движения автомобилей, получаемую от портативных спутниковых навигаторов. Особое внимание уделено методам учёта неполноты и зашумлённости исходных данных при построении прогноза. Алгоритмы прогнозирования успешно апробированы на выборке данных, полученной для дорог Санкт-Петербурга.

*Актуальность задачи.* На протяжении последних десятилетий транспортные заторы являются одной из наиболее существенных проблем крупных городов. Хотя полное решение этой проблемы немислимо без реализации дорогостоящих инфраструктурных проектов, некоторое улучшение дорожной обстановки возможно за счёт более рационального использования имеющихся транспортных ресурсов города, в частности — за счёт своевременного информирования участников движения о текущей дорожной обстановке и её вероятном изменении, в том числе о возникновении заторов.

Наиболее доступным источником первичной информации о скорости транспортного потока являются портативные автомобильные спутниковые навигаторы. Этой информацией располагают компании «Яндекс» [2], «СитиГид» [1] и др. Тем не менее, подобная информация используется ими лишь для отображения на карте текущей (либо характерной для данного времени) дорожной обстановки. Прогноз изменения текущей обстановки пользователям не предоставляется.

В данной статье предлагаются статистические модели и методы, позволяющие прогнозировать изменение ситуации на дорогах города и

не требующие для этого никакой дополнительной информации сверх имеющихся данных о скорости транспортных средств.

*Критерии качества прогноза.* Каждая из рассматриваемых моделей имеет большую или меньшую предсказательную способность при определенных условиях, что требует дополнительных усилий по их выбору и согласованию. При выборе наилучшей модели прогнозирования дорожной обстановки необходимо задаться некоторой численной характеристикой качества прогноза. Тем не менее, в рамках решаемой задачи невозможно предложить единственно верный критерий точности предсказания ввиду сложности процесса и неоднородности требований пользователей к системе. Ни средняя абсолютная ошибка, ни средняя относительная ошибка, ни среднеквадратическая ошибка прогнозирования скорости не совпадают с интуитивным представлением о погрешности прогноза, что легко показать на следующем примере. Пусть при реальной скорости транспортного потока 80 км/ч две сравниваемые математические модели получили прогнозную скорость 140 и 20 км/ч соответственно. Для обеих моделей абсолютные ошибки прогнозирования равны 60 км/ч, относительные ошибки равны 75 %, а среднеквадратические ошибки равны 60 км/ч. Однако, с точки зрения пользователя, эти результаты не являются равноценными, поскольку применение второй модели приводит к принципиально неверному выводу о наличии затора.

Для решения этой проблемы введем метрику  $M(V)$ , которая является некой функцией от скорости движения транспортного потока  $V$ . Абсолютная ошибка прогнозирования этой метрики несет информацию об ошибке прогнозирования ситуации. Как было сказано выше, эта задача принципиально не имеет оптимального решения, поэтому будем определять способ ее расчета, опираясь на ряд естественных требований:

Требование 1. Так как водителей интересует относительная погрешность прогнозирования времени движения  $T$ , вычисляемая по соотношению

$$\frac{T_p - T_r}{T_r} = \frac{T_p}{T_r} - 1 = \frac{V_r}{V_p} - 1,$$

где: индексами  $p$  и  $r$  обозначены соответственно прогнозируемые и реальные величины, то разность метрик  $M(V_r) - M(V_p)$  должна быть пропорциональна отношению  $V_r/V_p$ .

Требование 2. Так как на разгруженной дороге скорости зависят в большей степени от характера вождения и типа транспортного средства, чем от дорожной ситуации, то чувствительность метрики к скорости должна быть тем меньше, чем больше значение самой скорости, т. е.

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{dM(V)}{dV} = 0.$$

Требование 3. Погрешность разности метрик  $M(V_p) - M(V_r)$ , обусловленная погрешностью измерения времени  $T$ , не должна зависеть от длины рассматриваемого участка дороги.

Перечисленным требованиям удовлетворяет метрика вида  $M(V) = \ln V$ . При расчете параметров моделей и выборе моделей оптимизируется среднеквадратическое отклонение метрики  $M(V)$ .

*Прогнозирование на основе характерной скорости движения.* В простейшем алгоритме предсказания в качестве прогнозного значения скорости используется медиана распределения скорости с учетом периодичности по времени суток, дням недели и времени года. Эта модель наименее сложна в реализации, но она не позволяет извлечь никакой дополнительной информации из текущей дорожной обстановки и поэтому наследует все недостатки, свойственные существующим системам предсказания загруженности дорог. Для построения более достоверного прогноза необходимо учитывать дополнительные факторы.

*Взаимосвязь дорог.* Ситуация на одних участках движения влияет на ситуации на других участках движения. Эта связь наиболее очевидна, когда все автомобили с определенного участка могут выехать только на одну дорогу. Затор на этой дороге повлияет на дорожную ситуацию всего участка. Величина этой взаимосвязи зависит от структуры развязки и схемы организации движения.

Поскольку на скорость движения потока влияют внешние факторы, такие как часы пик, праздники и т.д., то чтобы минимизировать это влияние, требуется исследовать отклонения скорости от ее характерной величины для данного времени суток, дня недели и времени года:

$$V' = V - V_{\text{char}},$$

где:  $V'$  — отклонение скорости;

$V$  — текущая скорость;

$V_{\text{char}}$  — характерная скорость.

Рассмотрим пару дорог  $c$  и  $d$ . Предположим, что влияние одной дороги на другую имеет линейный закон и распространяется с некой задержкой  $\tau$ . Если  $\tau < 0$ , то дорога  $c$  влияет на дорогу  $d$ . Если  $\tau > 0$ , то дорога  $d$  влияет на дорогу  $c$ . Если  $\tau$  близко к нулю, то имеет место как влияние  $c$  на  $d$ , так и влияние  $d$  на  $c$ . Таким образом, имеется взаимосвязь вида

$$V_c'(t) = a V_d'(t - \tau) + \varepsilon(t),$$

где:  $V_c'$  — отклонение скорости для дороги  $c$ ;

$V_d'$  — отклонение скорости для дороги

$d$ ;  $a$  — величина взаимосвязи;

$\varepsilon$  — остаточное отклонение скорости.

Остаточное отклонение  $\varepsilon(t)$  состоит из двух составляющих: случайного отклонения, которое затухает при неизменных значениях  $V_c(t)$  и  $V_d(t-\tau)$ , и неслучайного отклонения, которое затухает с изменением значений  $V_c(t)$  и  $V_d(t-\tau)$ . Априорно разделить эти отклонения не представляется возможным, однако величину взаимосвязи характеризуют скорости затухания этих отклонений. Поэтому вне зависимости от изменения  $V_c(t)$  и  $V_d(t-\tau)$  взаимосвязь характеризуется затуханием величины  $\varepsilon(t)$ . Если принять, что скорость затухания случайного отклонения скорости пропорциональна самому отклонению, то получим выражение

$$\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1) = b \varepsilon(t-1) + \delta(t-1).$$

Сила взаимосвязи  $\mu_{c,d}$  между дорогой  $c$  и дорогой  $d$  будет оцениваться как отношение коэффициента затухания  $b$  к стандартной ошибке определения этого коэффициента  $SE_b$ . Стандартная ошибка определения коэффициента линейной регрессии вычисляется как отношение среднеквадратического отклонения остатка к среднеквадратическому отклонению фактора, следовательно:

$$\mu_{c,d} = \left| \frac{b}{SE_b} \right| = \left| \frac{b \sigma(\varepsilon)}{\sigma(\delta)} \right|,$$

где:  $\sigma(\cdot)$  — среднеквадратическое отклонение.

Значение силы взаимосвязи между дорогами  $\mu$  зависит от значения задержки  $\tau$ . Оптимальное значение  $\tau$  не выводится аналитически, поэтому определяется перебором. Выбирается такая величина  $\tau^*$ , при которой взаимосвязь  $\mu$  максимальна.

Понятие взаимосвязи дорог играет ключевую роль при построении основных прогнозирующих моделей.

*Прогнозирование на основе характерной скорости движения с учетом отклонений.* Для прогнозирования дорожной ситуации на дороге  $c$  используется информация о ситуации на смежных дорогах  $d$  с силой взаимосвязи  $\mu_{c,d}$  больше определенного порога. Величина взаимосвязи  $a$  рассчитывается с помощью метода главных компонент [3], использующего сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{V}'$ , содержащей отклонения скоростей от характерной скорости.

После перемножения компонент разложения получим матрицу  $\mathbf{V}'_{bal}$ . В ней содержатся отклонения скорости, «сбалансированные» относительно предположения о линейном законе взаимосвязи между дорогами.

Прогнозная скорость  $V_{cp}$  для дороги  $c$  через время  $\theta$  рассчитывается с помощью уравнения вида

$$V_{cp}(t+\theta) = V_{cchar}(t+\theta) + \beta(\theta) V'_{cbal}(t),$$

где:  $V_{cp}$  — прогнозная скорость на дороге  $c$ ;  
 $V_{cchar}$  — характерная скорость на дороге  $c$ ;  
 $V'_{cbal}$  — отклонение скорости для дороги  $c$ , содержится в строке матрицы  $\mathbf{V}'_{bal}$ , соответствующей дороге  $c$ ;  
 $\beta(\theta)$  — функция, описывающая влияние «сбалансированного» отклонения скорости от характерной на прогнозную скорость для каждого  $\theta$ .

*Прогнозирование на основе прецедентов.* В основе метода лежит следующее предположение: если дорожная ситуация в определенном районе подобна ситуации в прошлом, то она получит сходное развитие. Для уменьшения влияния случайных факторов исследуется аналогия не с одной ситуацией-прецедентом, а с группой таких ситуаций. В качестве метода разбиения ситуаций по группам используется метод  $k$  ближайших соседей [4]. В качестве «расстояния» выступает мера различия двух ситуаций на дороге

$$J_{road} = \sum_{t=t_{beg}}^{t_{end}} (\ln V(t) - \ln V(t - \Delta t))^2,$$

где: интервал времени  $\Delta t$  показывает, насколько давним является сравниваемый прецедент.

Мера различия ситуаций вычисляется по множеству дорог  $c$  силой взаимосвязи  $\mu$ , большей определенного порога:

$$J_{area} = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^K \mu J_{road k},$$

где:  $l$  — количество пар отсчетов, в которые известно значение скорости для обеих сравниваемых ситуаций;

$J_{roadk}$  — мера различия двух ситуаций на дороге  $k$ ;

$K$  — число дорог, имеющих наибольшее влияние на данную дорогу.

Мера схожести ситуаций считается величиной, обратной мере их различия:

$$W_{area} = \frac{1}{J_{area}}.$$

В случайном процессе  $V(t)$  присутствует явная цикличность по времени суток, по дню недели и по времени года. Будем искать схожие ситуации с различным шагом цикличности  $\rho$ , то есть положим  $\Delta t = n\rho$ , где  $n$  — целое число.

Ситуации подразделяются на группы с помощью метода  $k$  ближайших соседей по метрике  $J_{area}$ , рассчитанной на интервале  $[t - T - n\rho, t - n\rho]$ . Кластеризации подлежат только ситуации, для

которых выполнен ряд условий: полнота истории, значимость истории и определенность истории.

Полнота истории  $P$  оценивается количеством измерений:

$$P = \frac{N}{T},$$

где:  $N$  — количество отсчетов в течение времени  $T$ .

Значимость истории  $S$  оценивается количеством ситуаций, попавших в группу.

Определенность истории  $D$  оценивается близостью развития ситуации внутри группы и равна дисперсии величины  $J_{\text{area}}[t - T - n\rho, t - n\rho]$  по множеству ситуаций в группе.

Прогнозная скорость вычисляется как взвешенная сумма экстраполированных характерных скоростей с весами  $W_{\text{area}}$ :

$$V_p(t + \theta) = \frac{\sum_{t=t_{\text{beg}}}^{t_{\text{end}}} W_{\text{area}}[t - n\rho, t + \theta - n\rho] V_{\text{char}}(t + \theta - n\rho)}{\sum_{t=t_{\text{beg}}}^{t_{\text{end}}} W_{\text{area}}[t - n\rho, t + \theta - n\rho]}.$$

Метод  $k$  ближайших соседей не гарантирует малой меры различия дорожных ситуаций. Однако благодаря тому, что  $W_{\text{area}}$  гиперболически уменьшается с ростом  $J_{\text{area}}$ , влияние существенно отличающихся ситуаций на прогноз будет пренебрежимо мало.

*Борьба с неполнотой и зашумленностью данных.* Малая восприимчивость прогноза к неизбежной неполноте и зашумленности исходных данных о скорости транспортного потока является важным внутренним свойством предложенных прогнозирующих моделей. Это обеспечивается следующими их особенностями:

- при расчете взаимосвязи между дорогами алгоритму для получения новой информации о взаимосвязи достаточно двух релевантных последовательных измерений на обеих дорогах;
- при прогнозировании на основе характерной скорости движения на небольшом количестве измерений влияние выбросов нивелируется благодаря оценке медианой распределения вместо среднего значения;
- при прогнозировании на основе характерной скорости движения с учетом отклонений можно выявлять множественные взаимосвязи при небольшом количестве измерений;
- при прогнозировании на основе прецедентов при расчете меры схожести между ситуациями нет необходимости иметь информацию о ситуации на всех участках области.
- погрешность разности метрик  $M(V_p) - M(V_r)$  не зависит от длины рассматриваемого участка дороги;

- благодаря возможности объединить дороги в группы по силе взаимосвязи и рассматривать группы как единое целое, ошибка прогнозирования уменьшается.

*Результаты численного эксперимента.* Для оценки качества предсказания производилось сравнение предложенных методов прогноза с предсказанием при помощи простой экстраполяции средней скорости.

Критерием качества предсказания было выбрано относительное отклонение фактического времени движения автомобиля по маршруту от предсказанного времени. В качестве реального времени движения использовалось время движения автомобиля по маршруту по данным компании «СитиГид» [1] для дорог Санкт-Петербурга за сентябрь-октябрь 2010 года.

При предсказании экстраполяцией средней скорости получено среднее относительное отклонение времени движения автомобиля, равное 37 %. Аналогичная величина при прогнозировании с помощью предложенных алгоритмов получилась равной 22 %.

В дальнейшем планируется провести тестирование на большем интервале времени и ввести в рассмотрение новые математические модели и факторы, влияющие на дорожную обстановку.

*Заключение.* Построение прогноза изменения текущей дорожной обстановки, возникновения и исчезновения заторов повышает достоверность информирования водителей и тем самым способствует более равномерному распределению загруженности транспортных магистралей города. Преимущества предложенных методов прогнозирования перед отображением характерной загруженности дорог становятся особенно очевидны в дни резкого изменения погодных условий: обильного снегопада, задымления и т.п., когда наблюдаемая обстановка сильно отличается от характерной. Внедрение описанных методов позволит повысить эффективность имеющейся дорожной сети города без значительных капиталовложений.

### **Список литературы:**

1. Описание системы «СитиГид». URL: <http://www.probki.net/news.aspx> (дата обращения 01.03.2012).
2. Описание системы «Яндекс Пробки». URL: <http://help.yandex.ru/maps/informer.xml> (дата обращения 01.03.2012).
3. Jolliffe I. T. Principal Component Analysis, Series: Springer Series in Statistics. 2nd ed. — NY.: Springer, 2002, - 487 p. - P. 64—68.
4. MacQueen J. Some methods for classification and analysis of multivariate observations//Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability. 1967. P. 281—297.

## 2.4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

*Морозова Светлана Васильевна*  
доцент, канд. физ.-мат. наук, Алтайский государственный аграрный  
университет, г. Барнаул

*Абакумова Наталья Александровна*  
канд. социол. наук, Алтайский государственный аграрный  
университет, г. Барнаул  
E-mail: [aba78@mail.ru](mailto:aba78@mail.ru)

Подготовка в вузе составляет сложный комплекс необходимых многообразных условий для гармонического развития и воспитания конкурентоспособной целостной личности.

Однако в настоящее время учебно-воспитательный процесс вузов в основном сориентирован на формирование профессиональных качеств будущих специалистов и не способствует в полной мере всестороннему развитию.

Возникает необходимость целенаправленной и планомерной работы по улучшению качества воспитания молодежи. Одним из важнейших инструментов активизации деятельности самих студентов и вовлечения их в разные сферы общественной жизни вуза может стать конкурс на лучшую студенческую группу.

В статье предлагается математическая модель, позволяющая достаточно объективно рассчитать рейтинг студенческой группы.

Предложенная модель основывается на интегральной оценке результатов всех видов деятельности студента в течение определенного промежутка времени. В ней учитывается академическая успеваемость, научная, спортивная, культурно-массовая и общественная деятельность студентов группы.

Модель предусматривает 50-бальную шкалу оценки.

Рейтинг каждой группы определяется по формуле:

$$R_{\text{итоговой}} = R_{\text{академ.усп}} \cdot 0,4 + R_{\text{науч.деят.}} \cdot 0,2 + R_{\text{спорт.деят.}} \cdot 0,2 + R_{\text{культ.деят.}} \cdot 0,2 - R_{\text{выскани}},$$

где:  $R_{\text{академ.усп}}$  — рейтинг академической успеваемости студентов группы (см. табл. 1, табл. 2);  $R_{\text{науч.деят.}}$  — рейтинг научной деятельности студентов группы (см. табл. 3, табл. 4);  $R_{\text{спорт.деят.}}$  — рейтинг спортивной деятельности студентов группы (см. табл. 5, табл. 6);  $R_{\text{культ.деят.}}$  — рейтинг общественно-культурной деятельности студентов группы (см. табл.7, табл. 8);  $R_{\text{взысканий}}$  — рейтинг взысканий, который вычисляется по формуле:  $R_{\text{взысканий}} = \frac{\text{кол.взысканий} \cdot 50}{2 \cdot k}$ ,  $k$  — количество студентов в группе.

Если количество взысканий, полученных студентами группы больше 10 % или итоговый рейтинг отрицательный, то группа выбывает из Конкурса.

Победителем считается группа с наивысшим рейтингом, набравшая наибольшее количество баллов.

Для более удобного использования представленной модели была разработана программа ее реализации в Excel.

В модели заложена возможность дальнейшего развития и совершенствования.

**Таблица 1**

**Показатели академической успеваемости**

№	Показатель	Кол-во
1.	Общее количество студентов в группе	$k$
2.	Количество студентов в группе, сдавших две сессии на «отлично» или одну на «отлично», а другую на «отлично» и «хорошо»	$k_1$
3.	Количество студентов в группе, сдавших две сессии на «отлично» и «хорошо» или на «хорошо»	$k_2$
4.	Количество студентов в группе, сдавших две сессии и имеющих хотя бы одну оценку «удовлетворительно»	$k_3$

**Таблица 2**

**Критерии успеваемости**

№	Критерии	Вес в итоговом рейтинге	Итого
1.	Наличие студентов, получающих стипендию президента или правительства РФ, адм. края, городской адм., ученого совета, факультетов и др. организаций ( $R_{\text{ст.}}$ )	0,1	0,5
2.	Успеваемость студентов по результатам сессии ( $R_{\text{усп.}}$ )	0,9	0-45

При наличии студентов, соответствующих критерию 1 таблицы 2, рейтинг  $R_{ст.} = 50$  (б), при отсутствии  $R_{ст.} = 0$ .

Рейтинг по критерию 2 таблицы 2 рассчитывается по формуле:

$$R_{опп.} = \frac{k_1 \cdot 100 + k_2 \cdot 70 + k_3 \cdot 30}{2k}$$

Рейтинг академической успеваемости студентов группы рассчитывается по формуле:

$$R_{академ.усп.} = R_{ст.} \cdot 0,1 + R_{усп.} \cdot 0,9$$

**Таблица 3**

**Показатели научной деятельности**

<b>№</b>	<b>Показатель</b>	<b>Кол-во</b>
1.	Общее количество студентов в группе	$k$
2.	Количество первых мест, занятых студентами на конференциях различного уровня (олимпиадах)	$k_1$
3.	Количество 2-х и 3-х мест, занятых студентами группы на конференциях различного уровня (олимпиадах)	$k_2$
4.	Количество участий студентов группы на конференциях различного уровня (олимпиадах), при этом не занявших призовых мест	$k_3$
5.	Количество студентов в группе, не принявших участие на конференциях различного уровня (олимпиадах)	$k_4$

Таблица 3 заполняется для каждого уровня таблицы 4, кроме уровня б. Для уровня б обозначения приведены в таблице 4.

Таблица 4

## Критерии научной деятельности

№	Уровень	Критерии	Вес в итоговом рейтинге	Итого
1.	Факультет (R <sub>факул.</sub> )	Участие, призовые места в олимпиадах	0,1	0—5
2.	Вуз (R <sub>вуз.</sub> )	Участие, призовые места в вузовских конференциях (Дни науки АГАУ)	0,15	0—7,5
3.	Город, край (R <sub>гор.</sub> )	Участие, призовые места на региональных студенческих конференциях (олимпиадах)	0,18	0—9
4.	Регион (R <sub>рег.</sub> )	Участие, призовые места в межрегиональных студенческих конференциях (олимпиадах)	0,22	0—11
5.	Российский, международный (R <sub>р.м.</sub> )	Участие, призовые места в международных и общерос. конференциях (олимпиадах)	0,25	0—12,5
6.	Опубликованные научные работы (R <sub>н</sub> )	Опубликованные науч. работы в реферируемых изданиях и патенты, авторские свидетельства (их количество обозначим через k <sub>1</sub> ), участие в научно-исследовательских грантах и проектах (количество студентов обозначим через k <sub>2</sub> ), опубликованные науч. работы в нереферируемых изданиях (их количество обозначим через k <sub>3</sub> ), студенты группы, не опубликовавшие ни одной научной работы, не участвующих в грантах и проектах, не получивших авторских свидетельств и патентов (их количество обозначим через k <sub>4</sub> ), k — количество студентов в группе.	0,1	0—5

Рейтинги R<sub>факул.</sub>, R<sub>вуз.</sub>, R<sub>гор.</sub>, R<sub>рег.</sub>, R<sub>р.м.</sub>, R<sub>н</sub> вычисляются по формуле:

$$R = \frac{k_1 \cdot 100 + k_2 \cdot 70 + k_3 \cdot 30}{2(k_1 + k_2 + k_3)} \cdot \frac{k - k_4}{k}$$

Рейтинг по научной деятельности R<sub>науч.деят.</sub> вычисляется по формуле:

$$R_{\text{науч.деят.}} = R_{\text{факул.}} \cdot 0,1 + R_{\text{вуз.}} \cdot 0,15 + R_{\text{гор.}} \cdot 0,18 + R_{\text{рег.}} \cdot 0,22 + R_{\text{р.м.}} \cdot 0,25 + R_{\text{н}} \cdot 0,1$$

Таблица 5 заполняется для каждого уровня таблицы 6.

Таблица 5

## Показатели спортивной деятельности

№	Показатель	Кол-во
1.	Общее количество студентов в группе	k
2.	Количество первых мест, занятых студентами на соревнованиях	k <sub>1</sub>
3.	Количество 2-х и 3-х мест, занятых студентами группы на соревнованиях	k <sub>2</sub>
4.	Количество участий студентов группы на соревнованиях, при этом не занявших призовых мест (одно из трех)	k <sub>3</sub>
5.	Количество студентов в группе, не принявших участие на соревнованиях	k <sub>4</sub>

Таблица 6

## Критерии спортивной деятельности

№	Уровень	Критерии	Вес в итоговом рейтинге	Итого
1.	Вуз ( $R_{\text{вуз}}$ )	Участие, призовые места на соревнованиях Вуза	0,3	0-15
2.	Город, край ( $R_{\text{кр.}}$ )	Участие, призовые места на межрегиональных, краевых, городских соревнованиях	0,5	0-25
3.	Российский, международный ( $R_{\text{р.м.}}$ )	Участие, призовые места на международных и российских соревнованиях	0,2	0-10

Рейтинги  $R_{\text{вуз}}$ ,  $R_{\text{кр.}}$ ,  $R_{\text{р.м.}}$  вычисляются по формуле:

$$R = \frac{k_1 \cdot 100 + k_2 \cdot 70 + k_3 \cdot 30}{2(k_1 + k_2 + k_3)} \cdot \frac{k - k_4}{k}$$

Рейтинг по научной деятельности  $R_{\text{спорт.деят.}}$  вычисляется по формуле:

$$R_{\text{спорт.деят.}} = R_{\text{вуз}} \cdot 0,3 + R_{\text{кр.}} \cdot 0,5 + R_{\text{р.м.}} \cdot 0,2.$$

Таблица 7

## Показатели культурно-массовой и общественной деятельности

№	Показатель	Кол-во
1.	Общее количество студентов в группе	$k$
2.	Количество первых мест, занятых студентами в культурно-массовых и общественных мероприятиях	$k_1$
3.	Количество 2-х и 3-х мест, занятых студентами группы в культурно-массовых и общественных мероприятиях	$k_2$
4.	Количество участий студентов группы в культурно-массовых и общественных мероприятиях, при этом не занявших призовых мест (одно из трех)	$k_3$
5.	Количество студентов в группе, не принявших участие в культурно-массовых и общественных мероприятиях и не являющихся председателем профбюро; культургом; спорторгом факультета; членом совета студенческого общежития; членом оперотряда; членом общественной организации, объединения; бойцом студенческого отряда; членом редколлегии факультета (института), университета	$k_4$

Таблица 7 заполняется для каждого уровня таблицы 8. Для **уровня 1** в показатель  $k_3$  добавить количество студентов группы, являющихся: старостой группы; заместителем старосты группы; председателем и членами студенческого клуба факультета; членом редколлегии факультета. Для **уровня 2** в показатель  $k_3$  добавить

количество студентов группы, являющихся: председателем профбюро; культоргом; спорторгом факультета; членом совета студенческого общежития; членом общественной организации, объединения; бойцом студенческого отряда; членом редколлегии университета.

**Таблица 8**

**Критерии культурно-массовой и общественной деятельности**

№	Уровень	Критерии	Вес в итоговом рейтинге	Итого
1.	Факультет (R <sub>факул.</sub> )	Участие, призовые места в культурно-массовых и общественных мероприятиях факультета	0,3	0-15
2.	Вуз (R <sub>вуз.</sub> )	Участие студентов в культурно-массовых и общественных мероприятиях Вуза или участие в деятельности творческих коллективов и объединений АГАУ, призовые места в культмассовых мероприятиях Вуза	0,4	0-20
3.	Город, край (R <sub>кр.</sub> )	Участие, призовые места в межрегиональных, краевых, городских культурно-массовых и общественных мероприятиях	0,2	0-10
4.	Российский, международный (R <sub>р.м.</sub> )	Участие, призовые места в международных и российских культурно-массовых и общественных мероприятиях	0,1	0-5

Рейтинги R<sub>факул.</sub>, R<sub>вуз.</sub>, R<sub>кр.</sub>, R<sub>р.м.</sub> вычисляются по формуле:

$$R = \frac{k_1 \cdot 100 + k_2 \cdot 70 + k_3 \cdot 30}{2(k_1 + k_2 + k_3)} \cdot \frac{k - k_4}{k}$$

Рейтинг по культурной деятельности R<sub>культ.деят.</sub> вычисляется по формуле:

$$R_{\text{культ.деят.}} = R_{\text{факул.}} \cdot 0,3 + R_{\text{вуз.}} \cdot 0,4 + R_{\text{кр.}} \cdot 0,2 + R_{\text{р.м.}} \cdot 0,1.$$

**Список литературы:**

1. Васильев В. Н. О математических моделях оптимального управления системой подготовки специалистов. — Петрозаводск: Изд-во Петр. ГУ., 1997.
2. Самарский А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. Самарский, А. Михайлов. — 2-е изд., исп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.

# ПОСТРОЕНИЕ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ДИСФУНКЦИИ ИММУННОЙ СИСТЕМЫ У ПАЦИЕНТОВ С ДИСПЛАЗИЕЙ СОЕДИНИТЕЛЬНОЙ ТКАНИ ПРИ ПОМОЩИ ЦЕНТРОИДНОГО МЕТОДА

*Глотов Андрей Васильевич*

*д-р мед. наук, профессор кафедры гигиены труда, ОмГМА, г. Омск*

*Гольяпин Виктор Викторович*

*доцент, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., ОФИМ СО РАН,  
г. Омск*

*Москвитин Александр Владимирович*

*инженер кафедры прикладной и медицинской физики, ОмГУ, г. Омск  
E-mail: [alexmoskwitin@gmail.com](mailto:alexmoskwitin@gmail.com)*

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема дисплазии соединительной ткани (ДСТ) вызывает в последнее время большой интерес среди врачей различного профиля в связи с увеличением выявляемости пациентов с данной патологией. Частота выявления синдрома дисплазии соединительной ткани достаточно велика — от 26 до 80 % в зависимости от группы исследования. Так, по литературным данным от 74 до 85 % лиц молодого возраста имеют различные признаки дисплазии соединительной ткани [3, с. 36].

Потребность в углубленном исследовании дисплазии соединительной ткани велика в связи с высоким уровнем инвалидности, низким уровнем качества жизни, случаями ранней и внезапной смерти лиц с ДСТ.

Системность поражений при ДСТ во многом обусловлена всеобъемлющим распространением в организме самой соединительной ткани. Соединительная ткань входит в состав всех органов и тканей в виде клеточных мембран и перегородок. К соединительной ткани принято относить кости, кожу, сухожилия, связки и хрящи, кровеносные сосуды, синовиальные пространства и жидкости.

Исходя из принципа единства структуры и функции органов и тканей представляется актуальным изучение состояния различных звеньев иммунной системы (гуморального, клеточного, системы фагоцитоза) у пациентов с дисплазией соединительной ткани.

В целом, литературные данные о нарушениях в иммунной системе при различных клинических вариантах дисплазии соединительной ткани носят неоднозначный, нередко противоречивый характер, что

требует дальнейшего их изучения. До сих пор остаются практически неизученными механизмы формирования иммунных нарушений при дисплазии соединительной ткани. Наличие иммунных нарушений, сопутствующее бронхолегочному и висцеральному синдромам дисплазии соединительной ткани, повышает риск возникновения ассоциированной патологии соответствующих органов и систем.

Многомерные статистические методы постепенно входят в практику статистического анализа биомедицинских данных. Зарубежные исследователи используют их примерно в 30 % публикаций, тогда как в российских публикациях их доля минимальна [2, с. 14].

Поэтому **актуальным является** проведение факторного исследования дисфункции иммунной системы у лиц с дисплазией соединительной ткани с целью выявления соответствующих интегративных характеристик.

**Целью настоящей работы является** построение факторной модели дисфункции иммунной системы у лиц с дисплазией соединительной ткани на базе центроидного метода факторного анализа. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. формирование базы данных лабораторных показателей крови здоровых
2. индивидуумов и индивидуумов с различными проявлениями ДСТ;
3. построение таблицы «объект-свойство» на основе имеющейся базы данных;
4. нахождение основных матриц факторного исследования;
5. реализация факторной модели на базе центроидного метода факторного анализа;
6. интерпретация полученной факторной структуры.

## **1. МЕДИЦИНСКИЕ АСПЕКТЫ СОЕДИНИТЕЛЬНОТКАННОЙ ДИСПЛАЗИИ**

В широком спектре различных клинических синдромов ДСТ особое место занимают синдромы иммунологических нарушений: синдром иммунодефицита, аутоиммунный синдром, аллергический синдром. Функциональное состояние иммунной системы при дисплазии соединительной ткани характеризуется как активацией иммунных механизмов, обеспечивающих поддержание гомеостаза, так и их недостаточностью, ведущей к нарушению способности адекватно освобождать организм от чужеродных частиц и, следовательно, к развитию рецидивирующих инфекционно-воспалительных заболеваний бронхолегочной системы.

Иммунологические нарушения у части пациентов с дисплазией соединительной ткани включают повышение в крови уровня иммуноглобулина Е.

Наилучшим из многомерных статистических методов исследований, позволяющих выявить интегративные показатели, является факторный анализ.

Факторная модель позволяет выявить латентные интегративные характеристики конкретной патологии.

Исходными данными настоящего факторного исследования являются иммунологические лабораторные показатели крови здоровых индивидуумов и индивидуумов с признаками дисплазии соединительной ткани:

- **характеризующие функции В-клеток — распознавание антигенов, выработка антител:** абсолютное [ $\times 10^9/\text{л}$ ] и относительное [%] количество CD5+ и CD22+-лимфоцитов периферической крови; уровень иммуноглобулинов Ig A, Ig G, Ig M в сыворотке крови [г/л];

- **характеризующие функцию Т-клеток — регуляцию иммунного ответа:** численность лимфоцитов [ $\times 10^9/\text{л}$ ]; абсолютное [ $\times 10^9/\text{л}$ ] и относительное [%] количество CD4+ и CD8+-лимфоцитов периферической крови;

- **характеризующие функция фагоцитов — поглощение чужеродных частиц:** НСТ-тест (НСТ — нитросиний тетразолий) оценки «периваривающей» способности фагоцитов без дополнительной стимуляции (спонтанный) и при стимуляции фагоцитов *in vitro* пирогуналом (стимулированный) [%].

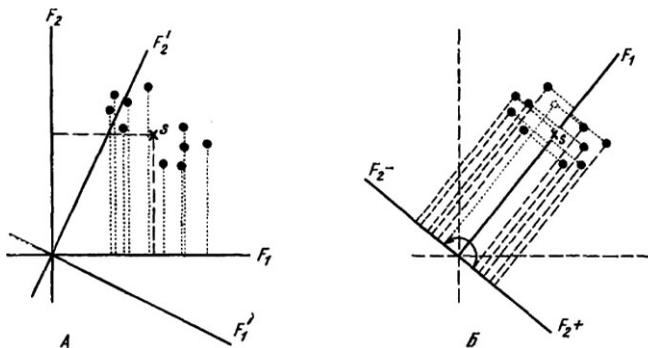
## 2. ПОСТРОЕНИЕ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ДИСФУНКЦИИ ИММУННОЙ СИСТЕМЫ У ПАЦИЕНТОВ С ДСТ

Для построения математической модели дисфункции иммунной системы у пациентов с ДСТ были сформированы две группы по 25 человек каждая: группа пациентов с синдромом Марфана и группа пациентов с воронкообразной деформацией грудной клетки. Возраст обследуемых от 14 до 45 лет. Контрольную группу составили 25 практически здоровых лиц того же возраста и пола без признаков соединительнотканной дисплазии, не имеющих отягощенного наследственного анамнеза. Среди обследованных преимущественно были лица молодого возраста.

Синонимом названия «центроидный метод» является «метод центра тяжести». Это название объясняет принцип метода. Факторное отображение можно рассматривать как размещение  $m$  точек-переменных в  $r$ -мерном пространстве, причем отдельные точки или векторы представляют переменные [1, с. 122]. Положение первой координатной оси должно быть определено так, чтобы она проходила через центр

тяжести скопления точек. На рис. 1. А схематично изображены несколько точек-переменных в двумерной системе координат.

Кроме того, указана нулевая точка, в которой начинаются все векторы. Это соответствует типичной ситуации перед началом выделения факторов. Переменные представлены  $m$  точками в  $r$ -мерном пространстве, положение нулевой точки известно. Разумеется, точное значение необходимой размерности пространства неизвестно. Точки можно изобразить в очень многих ортогональных системах координат, из которых на рис. 1, А представлены две —  $F_1F_2$  и  $F_1^*F_2^*$ . Чтобы получить однозначное положение системы координат, уславливаются, что первая ось должна проходить через центр тяжести  $S$  скопления точек-переменных. Вторая ось  $F_2$ , как показано на рис. 1, Б, перпендикулярна к первой. Представим себе, что определено положение отдельных точек-переменных, центра тяжести  $S$  и нулевой точки (рис. 1, А).



**Рис. 1. Определение положения первой координатной оси с помощью центроидного метода. Диаграмма А: величина проекции центра тяжести  $S$  на  $F_1$  является средним значением проекций всех точек на эту ось; конфигурация векторов не зависит от положения системы координат. Диаграмма Б: первая центроидная ось проводится через центр тяжести; тогда сумма остаточных проекций на ось  $F_2$  равна нулю. Показано отражение одной точки переменной с положительной стороны на отрицательную.**

Систему координат  $F_1F_2$  можно повернуть так, что она, например, займет положение  $F_1^*F_2^*$ . Но результатом вращения должно быть такое ее положение, чтобы ось  $F_1$  проходила через центр тяжести  $S$ , как показано на рис. 1, Б. Это положение осей соответствует позиции факторов в центроидном решении. В центроидном методе

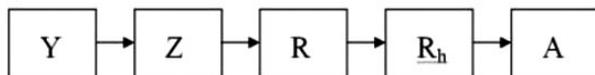
требуется, чтобы первая ось проходила через центр тяжести. Назначение этого требования — попытаться однозначно определить положение системы координат.

Проекция точек на оси координат на рис. 1, Б определяют факторные нагрузки  $a_{ij}$ , которые рассчитываются по корреляционной матрице [4, с. 287].

Алгоритм формирования факторной модели дисфункции иммунной системы у пациентов с ДСТ на базе центроидного метода:

1. из исходного массива данных формируется матрица  $Y$ , которая является таблицей «объект-свойство» размерности  $n \times m$ , где  $n$  — количество индивидуумов,  $m$  — количество параметров;
2. из матрицы  $Y$  путем элементарного преобразования получается матрица стандартизованных данных  $Z$  размерности  $n \times m$ ;
3. вычисляется корреляционная матрица  $R$  размерности  $n \times n$ ;
4. вычисляется редуцированная матрица  $R_h$  размерности  $n \times n$ ;
5. вычисляется матрица факторного отображения  $A$  размерности  $m \times r$  при помощи центроидного метода.

Схема, иллюстрирующая алгоритм проведения факторного анализа, изображена на рисунке 2.



*Рис. 2. Схема факторного анализа. Процедура вычислений начинается с матрицы исходных данных  $Y$ . Горизонтальные стрелки указывают последовательность отдельных этапов факторного анализа.*

В качестве примера приведено полученное факторное отображение  $A$  для индивидуумов с синдромом Марфана (табл. 1).

Таблица 1

## Факторное отображение А для индивидуумов с синдромом Марфана

		$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$
Лимфоциты	%	0,351	0,324	0,648	0,15	0,193	0,139
	абс.	0,609	0,381	0,456	0,353	-0,074	-0,169
Ig G		-0,055	-0,514	0,209	-0,307	-0,406	-0,119
Ig A		-0,053	-0,647	0,162	-0,287	-0,14	-0,182
Ig M		0,222	0,206	-0,236	0,069	0,197	-0,302
CD5	%	0,419	0,107	-0,52	-0,356	-0,26	0,133
	абс.	0,85	0,385	0,154	0,054	-0,014	0,1
CD8	%	0,479	0,295	-0,443	-0,597	0,117	0,106
	абс.	0,746	0,496	-0,176	-0,207	0,072	-0,117
CD4	%	0,195	0,397	-0,452	0,176	-0,331	0,077
	абс.	0,762	0,398	0,111	0,335	-0,176	0,051
CD22	%	0,612	-0,404	0,225	-0,322	0,341	0,198
	абс.	0,85	0,007	0,458	0,022	0,276	-0,019
НСТ-тест	спонт.	0,136	-0,703	-0,293	0,493	0,143	-0,005
	стим.	0,307	-0,727	-0,303	0,422	0,062	0,108

На основании матриц факторного отображения были выделены 6 факторов дисфункции иммунной системы у индивидуумов с дисплазией соединительной ткани (все значения берутся по модулю; значения  $< 0,5$  несут незначительный вклад и поэтому опускаются). Анализ матриц шестых корреляционных остатков во всех группах выявил нецелесообразность выделения седьмого и последующих факторов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЯ И ВЫВОДЫ

Все поставленные задачи были выполнены. Была построена факторная модель дисфункции иммунной системы у лиц с дисплазией соединительной ткани. Выделены 6 факторов дисфункции иммунной системы у пациентов с различными синдромами ДСТ:

**Фактор № 1** — фактор клеточного иммунитета.

**Фактор № 2** — фактор взаимосвязи естественного и адаптивного иммунитета.

**Факторы №№ 3—5** — факторы гуморального иммунитета.

**Фактор № 6** — количество зрелых В-лимфоцитов.

Выделены факторы, определяющие группу медицинских показателей, на которую можно воздействовать, чтобы получить максимальный эффект от лечения.

### **Список литературы:**

1. Иберла К. Факторный анализ [Текст]: [пер. с нем.] / К. Иберла. — М.: Статистика, 1980. — 398 с.
2. Леонов В. П. Факторный анализ: основные положения и ошибки применения // Международный журнал медицинской практики. 2005. № 3. С. 14
3. Применение веноночного препарата Детралекс-500 в программе реабилитации пациентов с дисплазией соединительной ткани [Текст] / Г. И. Нечаева [и др.] // Паллиативная медицина и реабилитация / Учредитель Фонд «Паллиативная медицина и реабилитация больных». — М.: 2008. — № 1. — С. 36—40.
4. Харман Г. Современный факторный анализ [Текст]: [пер. с англ.] / Г. Харман. — М.: Статистика, 1972. — 489 с.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ НЕЛИНЕЙНО ТЕРМО-НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОГО СТЕРЖНЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА И ТЕПЛООБМЕНА

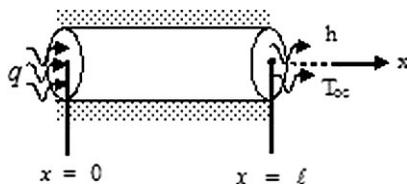
*Жумадиллаева Айнур Канадиловна*  
канд. техн. наук, ЕНУ им. Л. Гумилева, г. Астана

*Кудайкулов Анарбай Кудайкулович*  
д-р физ.-мат. наук, профессор ЕНУ им. Л. Гумилева, г. Астана

*Ташенова Жулдыз Мусагуловна*  
ст. преподаватель ЕНУ им. Л. Гумилева, г. Астана

*Нурлыбаева Эльмира*  
докторант, КазНТУ им. К. Сатпаева, г. Алматы  
E-mail [ay8222@mail.ru](mailto:ay8222@mail.ru)

В качестве несущего элемента конструкций рассмотрим горизонтальный стержень ограниченной длины  $l$  (см), площадь поперечного сечения  $F$  (см<sup>2</sup>), которого постоянна по длине стержня. Оба конца стержня считаем зашечленными. Боковая поверхность стержня по всей длине теплоизолирована. На площадь поперечного сечения левого конца стержня подведен тепловой поток, мощностью  $q$  (Вт/см<sup>2</sup>). Через площадь поперечного сечения правого конца происходит теплообмен с окружающей его средой. При этом коэффициент теплообмена  $h$  (Вт/см<sup>2</sup>°С), а температура окружающей среды  $T_{oc}$  (°С). Требуется разработать математическую модель установившегося термо-напряженно-деформированного состояния исследуемого стержня. Расчетная схема задачи приводится на рисунке — 1.



**Рисунок 1. Расчетная схема рассматриваемой задачи**

Коэффициент теплопроводности и теплового расширения материала стержня обозначим соответственно через  $K_{xx}$  ( $Bm/cm^{\circ}C$ ) и  $\alpha$  ( $1/^{\circ}C$ ). Модуль упругости материала будет  $E$  ( $кг/см^2$ ). Здесь следует отметить, что  $\alpha = \alpha(T(x))$  и  $E = E(T(x))$ . Также, при подведении теплового потока  $q$  на площадь поперечного сечения левого конца стержня, его значение берется с отрицательными знаком. Сначала надо моделировать установившееся поле распределения температуры по длине исследуемого стержня. Для этого введем следующие обозначения

$$T(x=0) = T_i; T(x = \frac{\ell}{2}) = T_j; T(x = \ell) = T_k; \quad (1)$$

Далее с учетом физической сущности исследуемой задачи поле распределения температуры по длине исследуемого стержня аппроксимируем полным полиномом второго порядка

$$T(x) = ax^2 + bx + c = \varphi_i(x)T_i + \varphi_j(x)T_j + \varphi_k(x)T_k, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (2)$$

$$\text{где } \varphi_i(x) = \frac{\ell^2 - 3\ell x + 2x^2}{\ell^2}; \varphi_j(x) = \frac{4\ell x - 4x^2}{\ell^2}; \varphi_k(x) = \frac{2x^2 - \ell x}{\ell^2}; \quad (3)$$

При этом

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0 \\ 0, & \text{при } x = \frac{\ell}{2} \\ 0, & \text{при } x = \ell \end{cases}; \varphi_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0 \\ 1, & \text{при } x = \frac{\ell}{2} \\ 0, & \text{при } x = \ell \end{cases};$$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0 \\ 0, & \text{при } x = \frac{\ell}{2} \\ 0, & \text{при } x = \ell \end{cases}; \quad (4)$$

Тогда градиент температуры в пределах длины стержня имеет следующий вид

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dx} = \frac{4x - 3\ell}{\ell^2} T_i + \frac{4\ell - 8x}{\ell^2} T_j + \frac{4x - \ell}{\ell^2} T_k, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (5)$$

Здесь следует отметить, что поле распределение температуры и его градиент температуры должны удовлетворять закону сохранения энергии. Функционал полной тепловой энергии для рассматриваемого стержня имеет следующий вид [2, с. 194]

$$I = \int_{F(x=0)} qTds + \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{F(x=\ell)} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dS, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (6)$$

где:  $F(x=0) = F(x=\ell) = F$  — площадь поперечных сечений концов стержня.

Теперь каждый интеграл в выражении функционала рассмотрим отдельно

$$I_1 = \int_{F(x=0)} qT dS = FqT_i; \quad (7)$$

$$I_2 = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = \frac{FK_{xx}}{2} \int_0^\ell \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{FK_{xx}}{2} \int_0^\ell \left[ \frac{\varphi x - 3\ell}{\ell^2} T_i + \frac{\varphi \ell - 8x}{\ell^2} T_j + \frac{4x - \ell}{\ell^2} T_k \right]^2 dx =$$

$$= \frac{FK_{xx}}{6\ell} (7T_i^2 - 16T_i T_j + 2T_i T_k - 16T_j T_k + 16T_j^2 + 7T_k^2); \quad (8)$$

$$I_3 = \int_{F(x=\ell)} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dS = \frac{Fh}{2} (T_k - T_{oc})^2; \quad (9)$$

Далее подставляя (7—9) в (6) находим интегрированный вид функционала I.

$$I = FqT_i + \frac{FK_{xx}}{6\ell} (7T_i^2 - 16T_i T_j + 2T_i T_k - 16T_j T_k + 16T_j^2 + 7T_k^2) + \frac{Fh}{2} (T_k - T_{oc})^2$$

$$; \quad (10)$$

Теперь минимизируя этот функционал получим основную разрешающую систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial I}{\partial T_i} = 0; &\Rightarrow Fq + \frac{FK_{xx}}{6\ell} (14T_i - 16T_j + 2T_k) = 0; \\ 2) \quad \frac{\partial I}{\partial T_j} = 0; &\Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6\ell} (-16T_i + 32T_j - 16T_k) = 0; \\ 3) \quad \frac{\partial I}{\partial T_k} = 0; &\Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6\ell} (2T_i - 16T_j + 14T_k) + FhT_k - FhT_{oc} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В этой системе сумма коэффициентов температур будет равна нулю

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad (14 - 16 + 2) &= 0; \\ 2) \quad (-16 + 32 - 16) &= 0; \\ 3) \quad (2 - 16 + 14) + Fh - Fh &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эти равенства являются признаками выполнения закона сохранения энергии.

Решая систему (11) определим значения температур в фиксированных сечениях

$$\left. \begin{aligned} T_i &= T_{oc} - \frac{q}{h} - \frac{q\ell}{K_{xx}}; \\ T_j &= T_{oc} - \frac{q}{h} - \frac{q\ell}{2K_{xx}}; \\ T_k &= T_{oc} - \frac{q}{h}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Подставляя эти значения в (2) находим закон распределения температуры по длине исследуемого стержня

$$T(T_{oc}, q, h, \ell, K_{xx}, x) = \left( T_{oc} - \frac{q}{h} - \frac{q\ell}{K_{xx}} \right) + \frac{q}{K_{xx}} x = A_1 + B_1 x, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (14)$$

$$\text{где: } A = T_{oc} - \frac{q}{h} - \frac{q\ell}{K_{xx}}; \quad B_1 = \frac{q}{K_{xx}};$$

Из (14) видно, что закон распределения в рассматриваемом стержне будет иметь линейный характер.

В целях исследования сходимости и точности полученного решения рассматриваемый стержень дискретизировали 2, 4, 6, ... 100 квадратичными элементами. При этом число уравнений соответственно было 5, 9, 13, ... 201, но во всех случаях дискретизации получили один и тот же закон распределения температуры по длине рассматриваемого стержня. Предположим, что левый конец рассматриваемого стержня жестко зашпелен. Тогда этот стержень из-за теплового расширения будет удлиняться. Это удлинение можно определить по [1, с. 35—39]

$$\Delta \ell_T = \int_0^{\ell} \alpha T(x) dx \quad (15)$$

Кроме того, проведенные серии экспериментов [3] показал, что коэффициент теплового расширения материала стержня зависит от температуры. С учетом закона распределения температуры зависимость представим в виде следующего полного полинома второго порядка

$$\alpha = \alpha(T(x)) = A_2 x^2 + B_2 x + C_2, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (16)$$

здесь  $A_2, B_2$  и  $C_2$  — известные постоянные. Тогда подставляя (14) и (16) в (15) имеем, что

$$\begin{aligned} \Delta \ell_T &= \int_0^{\ell} (A_2 x^2 + B_2 x + C_2)(A_1 + B_1 x) dx = A_1 C_2 \ell + (A_1 B_2 + B_1 C_2) \frac{\ell^2}{2} + (A_1 A_2 + B_1 B_2) \frac{\ell^3}{3} + \\ &+ A_2 B_1 \frac{\ell^4}{4} \end{aligned} \quad (17)$$

Если принять, что  $\alpha = const$ , то в этом случае будет

$$\Delta l_T = A_1 l + B_1 \frac{\ell^2}{2} \quad (17')$$

Теперь предположим, что оба конца рассматриваемого стержня жестко заземлены. В этом случае этот стержень не может удлиняться. Но за счет процесса теплового расширения в стержне возникает сжимающее усилие, а также упругие, температурные и термоупругие составляющие деформаций и напряжений. Наряду с этим формируется поле перемещений. Для определения законов распределения этих параметров необходимо сформулировать потенциальную энергию упругих деформаций стержня с учетом поля температур [2, с. 124]

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} dV - \int_V \alpha E T \varepsilon_x dV \quad (18)$$

где:  $V$  — объем исследуемого стержня;

$u = u(x)$  — поле распределения перемещений;

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  — упругая составляющая деформации

$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$  — упругая составляющая напряжений;

Здесь наподобие поля температур, поле перемещения также представим в виде

$$u(x) = \varphi_i(x)u_i + \varphi_j(x)u_j + \varphi_k(x)u_k, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (19)$$

$$\text{где: } u_i = u(x=0); u_j = u(x = \frac{\ell}{2}); u_k = u(x = \ell); \quad (20)$$

Тогда градиент перемещение имеет следующий вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} u_k = \frac{4x-3\ell}{\ell^2} u_i + \frac{4\ell-8x}{\ell_2} u_j + \frac{4x-\ell}{\ell^2} u_k, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (21)$$

Кроме того, серии эксперимента показывают что модуль упругости материала стержня зависит от температуры [3, с.228]. В связи с этим, поле распределения значение модуля упругости по длине стержня аппроксимируем полным полиномом второго порядка

$$E = E(T(x)) = A_3 x^2 + B_3 x + C_3, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (22)$$

здесь  $A_3, B_3$  и  $C_3$  — известные постоянные. Теперь пользуясь соотношениями (21-22) вычислим интеграл первого члена в выражении функционала потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \int_V \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} dV = \frac{F}{2} \int_0^\ell \sigma_x \varepsilon_x dx = \frac{F}{2} \int_0^\ell E \varepsilon_x^2 dx = \\ &= \frac{F}{2} \int_0^\ell (A_3 x^2 + B_3 x + C_3) \left[ \frac{4x - 3\ell}{\ell^2} u_i + \frac{4\ell - 8x}{\ell_2} u_j + \frac{4x - \ell}{\ell^2} u_k \right]^2 u_j^2 dx \end{aligned}$$

здесь необходимо учесть что, из-за защемления обеих концов стержня имеет место

$$u_i = u(x=0) = u_k = u(x=\ell) = 0.$$

тогда выражение  $\Pi_1$  имеет следующий вид

$$\Pi_1 = \frac{F}{2} \int_0^\ell (A_3 x^2 + B_3 x + C_3) \left( \frac{16\ell^2 - 64\ell x + 64x^2}{\ell^4} \right) u_j^2 dx = \frac{F}{30\ell} (32\ell^2 A_3 + 40\ell B_3 + 80C_3) u_j^2 \quad (23)$$

аналогично, пользуясь (14), (16) и (22) вычислим интеграл второго члена функционала потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \int_V \alpha E T \varepsilon_x dV = F \int_0^\ell (A_2 x^2 + B_2 x + C_2) (A_3 x^2 + B_3 x + C_3) (A_1 + B_1 x)^* \\ & \quad * \\ & \quad \left[ \frac{4x - 3\ell}{\ell^2} u_i + \frac{4\ell - 8x}{\ell_2} u_j + \frac{4x - \ell}{\ell^2} u_k \right] dx = F \left[ \frac{-8A_1 A_2 B_1}{7} \ell^5 + \frac{D_1}{6} \ell^4 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{D_2}{5} \ell^3 + \frac{D_3}{4} \ell^2 + \frac{D_4}{3} \ell + \frac{D_5}{2} + 4A_1 C_2 C_3 \right] u_j \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= [4A_2 A_3 B_1 - 8(A_1 A_2 A_3 + B_1 A_2 B_3 + B_1 B_2 A_3)]; \\ D_2 &= [4\ell(A_1 A_2 A_3 + B_1 A_2 B_3 + B_1 B_2 A_3) - 8(A_1 A_2 B_3 + A_1 B_2 A_3 + B_1 A_2 C_3 + B_1 B_2 B_3 + B_1 C_2 A_3)]; \\ D_3 &= [4\ell(A_1 A_2 B_3 + A_1 B_2 A_3 + B_1 A_2 C_3 + B_1 B_2 B_3 + B_1 C_2 A_3) - \\ & \quad - 8(A_1 A_2 C_3 + A_1 B_2 B_3 + A_1 C_2 A_3 + B_1 B_2 C_3 + B_1 B_3 C_2)]; \\ D_4 &= [4\ell(A_1 A_2 C_3 + A_1 B_2 B_3 + B_1 C_2 A_3 + B_1 B_2 C_3 + B_1 B_3 C_2) - 8(A_1 B_2 C_3 + A_1 C_2 B_3 + B_1 C_2 C_3)]; \\ D_5 &= [4\ell(A_1 A_2 C_3 + A_1 C_2 B_3 + B_1 C_2 C_3) - 8A_1 C_2 C_3]; \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

теперь подставляя (23—24) в (18) находим интегрированный вид функционала  $\Pi$

$$\Pi = D_6 u_j^2 + D_7 u_j \quad (26)$$

$$\text{где: } \left. \begin{aligned} D_6 &= (32\ell^2 A_3 + 40\ell B_3 + 80C_3); \\ D_7 &= \left[ -\frac{8A_1 A_2 B_1}{7} \ell^5 + \frac{D_1}{6} \ell^4 + \frac{D_2}{5} \ell^3 + \frac{D_4}{3} \ell + \frac{D_5}{2} + 4A_1 C_2 C_3 \right]; \end{aligned} \right\}$$

далее минимизируя  $\Pi$  по  $u_j$  находим разрешающее уравнение

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0; \Rightarrow 2D_6 u_j + D_7 = 0 \quad (28)$$

отсюда определим  $u_j$

$$u_j = -\frac{D_7}{2D_6}; \quad (29)$$

подставляя найденное значение  $u_j$  в выражение (19), и учитывая, что в нашем случае  $u_i = u_k = 0$ ., определим поле перемещения

$$u(x) = \frac{4\ell x - 4x^2}{\ell^2} \left( \frac{-D_7}{2D_6} \right) = -\frac{2D_7(\ell x - x^2)}{D_6 \ell^2}; \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (30)$$

Тогда поле упругой составляющей деформации из (30) определяется следующим образом

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2D_7(\ell - 2x)}{D_6 \ell^2}; \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (31)$$

Соответствующая составляющая напряжения определяется по закону Гука

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{2D_7(\ell - 2x)}{D_6 \ell^2} (A_3 x^2 + B_3 x + C_3); \quad (32)$$

Температурные составляющие деформации определяются следующим образом

$$\varepsilon_T = -\alpha T = -(A_2 x^2 + B_2 x + C_2)(A_1 + B_1 x); \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (33)$$

$$\sigma_T = E\varepsilon_T = -(A_3 x^2 + B_3 x + C_3)(A_2 x^2 + B_2 x + C_2)(A_1 + B_1 x); \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (34)$$

Тогда термо-упругие составляющие деформации и напряжения определяется по формуле

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_T = const; \quad \sigma = \sigma_x + \sigma_T = const; \quad (35)$$

Величина возникающего сжимающего усилия  $R$  определяется на основе обобщенного закона Гука, т. е.

$$R = F\sigma = const; \quad (36)$$

Таким образом выясним, что используя закон сохранения энергии в сочетании применения аппроксимационных сплайн функций, можно построить математическую модель установившегося термо-напряженно-деформированного состояния заземленного двумя концами стержня ограниченной длины находящегося под одновременным воздействием теплоизоляции, теплового потока и теплообмена. При этом построенная модель для рассмотренной задачи позволяет получить точное решение для рассмотренной задачи.

### **Список литературы:**

1. Ноздрев В. Ф. Курс термодинамики: учеб. пособие. М.: Мир, 1967. — 247 с.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1: монография. М.: Москва, 1970. — 492 с.
3. Химушин Ф. Ф. Жаропрочные стали и сплавы: учеб. пособие. М.: Металлургия, 1969. — 749 с.

## **2.5. МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ, ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ**

### **УСТОЙЧИВОСТЬ САРТСНА К АВТОМАТИЧЕСКОМУ РАСПОЗНАВАНИЮ**

*Маннапова Торгын Мендикуловна*  
магистрант, СГТУ, г. Саратов  
E-mail: [Mannapovatm@mail.ru](mailto:Mannapovatm@mail.ru)

*Исекетов Ержан Садыкович*  
магистрант, СГТУ, г. Саратов

*Кинцель Дмитрий Александрович*  
науч. рук., канд. физ-мат. наук, доцент СГТУ, г. Саратов

В последнее время большинство интернет-сайтов используют САРТСНА. Популярность САРТСНА объясняется тем, что владельцам сайтов приходится обеспечивать защиту от автоматической регистрации и рассылки спам сообщений. САРТСНА (от англ. «Completely Automated Public Turing test to tell Computers and Humans Apart») представляет собой полностью автоматизированный публичный тест Тьюринга для различия компьютеров и людей. Основная идея теста: предложить пользователю такую задачу, которую с легкостью может решить человек, но которую несоизмеримо сложнее решить автоматически, программным способом. В основе таких задач чаще всего используются задачи распознавания символов или объектов на изображении.

Существует сервис «геСАРТСНА», который использует тест САРТСНА не только для защиты от ботов, но и для оцифровки старых книг. геСАРТСНА — генерирует картинки, защищающие сайты от роботов. Эти картинки берутся из отсканированных страниц книг. Пользователи, регистрируясь на сайтах или оставляя комментарии, принимают участие в переводе старых книг в цифровой формат. Для определения корректности прохождения САРТСНА пользователю дается на распознавание два слова — одно, распознано ранее, и другое, которое надо распознать. Если пользователь верно распознает проверочное слово, то второе автоматически также считается правильно распознанным [4].

Первоначальные версии САРТСНА предлагали пользователю распознать набор символов из заранее известного числа символов, в

тесте использовался единственный шрифт, сами символы не подвергались искажениям, шумы не накладывались. Достаточно быстро с помощью технологий автоматического распознавания OCR такие версии CAPTCHA перестали быть эффективными, так как перестали выполнять свою первоначальную задачу — борьбу с ботами.

Для противодействия системам OCR разработчики CAPTCHA подвергают распознаваемые символы искажениям: изменяя контрастность, размер используемых шрифтов, накладывая шум, используя размытие, геометрические преобразования и другое. Это в свою очередь привело к тому, что тесты стали настолько сложными, что рядовые пользователи сайтов с трудом справляются с ними. Появление таких слишком усложненных вариантов CAPTCHA раздражает пользователей и снижает привлекательность сайта. Разработчикам CAPTCHA приходится искать золотую середину: внести искажения настолько, чтобы с одной стороны максимально затруднить возможность автоматического распознавания, с другой стороны, сделать тест максимально удобным для пользователей. Однако по мере развития технологий автоматического распознавания эффективность CAPTCHA продолжает снижаться. На сегодняшний момент существует много проектов занимающихся исключительно распознаванием CAPTCHA. Наиболее известными из них являются два: «UC Berkeley Computer Vision Group» и «PWNtcha». По оценкам исследователей, используемые решения позволяют верно распознавать более 90% тестов CAPTCHA построенных на распознавании символов.

Еще одной проблемой, с которой столкнулись разработчики CAPTCHA — это существование специализированных платных сервисов, предоставляющих услуги по распознаванию CAPTCHA с использованием низкооплачиваемого человеческого труда. Наиболее известными такими сервисами являются «antigate.com» и «captchabot.com». Принцип работы таких сервисов заключается в том, что спам-бот, встречая CAPTCHA на атакуемом сайте, отправляет изображение CAPTCHA на сервер сервиса по распознаванию. Далее CAPTCHA попадает одному из сотрудников сервиса, который распознает её вручную и отправляет результат распознавания в виде текста обратно программе спам-боту. Программа спам-бот вводит полученный текст в специальное проверочное поле экранной формы атакуемого сайта. Процедура такого «автоматического» распознавания обычно занимает не больше 40 секунд, а среднее время составляет порядка 12 секунд. Использование такого сервиса позволяет верно, распознавать символы с теста CAPTCHA около 95% случаев. Благодаря удаленному использованию дешевой рабочей силы из Китая, Индии и других стран Азиатского региона стоимость распознавания 1000 тестов составляет всего лишь один доллар США. Кроме основной функции по распознаванию символов, сервисы предоставляют дополнительные услуги по сбору статистики, предоставлению прокси-серверов или ограничению пользователей по IP-адресам. Данные виды

сервисов широко используются для рассылки спам-сообщений и автоматической регистраций на различных веб-ресурсах. Необходимо отметить, что дальнейшее усложнение CAPTCHA связанных с распознаванием символов на изображении не приведет к более высокой устойчивости CAPTCHA к автоматическому распознаванию, так как в конечном итоге тест проходит наемный сотрудник сервиса, а значит, он имеет такие же возможности как и рядовой пользователь сайта. В качестве защиты от использования таких сервисов можно использовать в тесте CAPTCHA национальные символы той страны, пользователи которой являются основными посетителями сайта, но это подход тоже имеет недостаток. Данный способ защиты не позволит проходить CAPTCHA обычным пользователям, не имеющие на клавиатуре запрашиваемые национальные символы.

По описанным выше причинам владельцы сайтов отказываются от классических вариантов тестов CAPTCHA в пользу других разновидностей теста. Примером такой разновидности может служить аудиоверсия CAPTCHA, которая состоит из проговариваемых цифр, как правило, с варьируемой тональностью, паузами и фоновыми шумами. Преимущество у аудио-CAPTCHA в том, что на такой вопрос сможет ответить пользователь с нарушениями зрения. Недостатки — посетитель должен иметь на компьютере оборудование для воспроизведения звука. К тому же реализация звуковых искажений довольно требовательна к ресурсам сервера. Это ведет к тому, что аудио-CAPTCHA применяется довольно редко и только как альтернатива для слепых пользователей. Так, например аудио-капчи сервисов eBay, Yahoo, Digg, Authorize.net, Live.com и reCAPTCHA используют один или несколько голосов, произносящих последовательность фиксированного количества цифр или же цифр с буквами. Американские исследователи из Стэнфордского (Stanford) и Тулейнского (Mane) университетов продемонстрировали возможность взлома аудиоверсии системы Captcha. Эффективность новой разработки оценивается достаточно высоко и, со слов руководителя исследователей, их алгоритм смог успешно обойти аудио CAPTCHA от Microsoft и Yahoo почти в половине всех случаев. В связи с этим Microsoft перешла на другой тип CAPTCHA, которую алгоритм все еще может обойти, правда, только в 1,5 процентах случаев. [1]

Представителем еще одного нового направлением является тест «NuCaptcha» — это видеоверсия CAPTCHA, в которой технологии анимации призваны затруднить спам-роботу процесс декодирования символов. NuCaptcha предлагает подвижное изображение, вместо статической картинки. На фоне одного из нескольких доступных коротких видеофрагментов волнами проплывает бегущая строка, из которой необходимо ввести только три последних символа, при этом символы наплывают друг на друга. Создатели данного теста утверждали, что NuCaptcha обеспечивает самый высокий уровень безопасности и удобства из всех тестов CAPTCHA, присутствующих на рынке. Но, по словам исследователя из

Стэнфордского университета Эли Бурштейна, это не совсем так. Начиная с октября 2010 года, Бурштейн вместе с другими исследователями анализировал безопасность NuCaptcha и в конечном итоге нашел способ, позволяющий преодолевать защиту в 9 случаях из 10. [2]

Примером устойчивой на сегодняшний момент к автоматическому распознаванию CAPTCHA является тест IMAGINATION, который состоит из двух частей. Вначале испытуемому предлагается выбрать одну из нескольких цветных фотографий, воспроизведенных с частичным наложением границ, и кликнуть «мышью» на ее геометрический центр. Комбинированное изображение имеет большой объем, в картинке внесены произвольные цветовые, текстурные и контурные искажения. После успешного прохождения первого этапа на экране возникает другое либеральное «зашумленное» изображение, надо подобрать из приведенного списка определяющее слово. [3]

Новым направлением в тестах CAPTCHA являются тесты, построенные на интерактивном взаимодействии с пользователем. Интерактивная защита — довольно новое и пока малораспространенное решение, смысл его — интерактивное взаимодействие пользователя с каким-то объектом. Ярким представителем такого класса является сервис «KeyCAPTCHA». Идея теста: пользователю предлагают привести некоторый объект в порядок, например, правильно сложить картинку из нескольких частей.

Надежность любой системы безопасности в значительной степени зависит от качества ее реализации. У практических решений есть уязвимости, которые могут быть использованы злоумышленниками. В полной мере это правило применимо и к системам, использующим CAPTCHA. Технологии распознавания образов, текста, звука развиваются параллельно с увеличением вычислительной мощности компьютеров, что существенно снижает эффективность классических тестов CAPTCHA. Поэтому для повышения устойчивости CAPTCHA к «взлому» необходимо использовать новые направления тестов CAPTCHA, в частности интерактивные варианты тестов и тесты, основанные на использовании абстрактного мышления человека.

### **Список литературы:**

1. Аудиоверсия CAPTCHA взломана — Режим доступа — URL: [http://cyberattack.ru/post\\_1309335066.html](http://cyberattack.ru/post_1309335066.html) (29 июня, 2011).
2. Видеоверсия CAPTCHA взломана — Режим доступа — URL: <http://www.osp.ru/news/articles/2012/08/13012862/> (24 февраля, 2012).
3. CAPTCHA, которая требует воображения — Режим доступа — URL: <http://www.securelist.com/ru/blog/28872/> (28 апреля, 2008).
4. reCAPTCHA — Режим доступа. — URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/ReCAPTCHA> (16 марта, 2012).

## ОЦЕНКА И ИЗМЕРЕНИЕ УЯЗВИМОСТЕЙ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМАХ

***Зайко Татьяна Анатольевна***

*аспирант, ЗНТУ, г. Запорожье, Украина*

*E-mail: [tzyakun@mail.ru](mailto:tzyakun@mail.ru)*

***Бельмега Артем Валериевич***

*Студент, ЗАК, г. Запорожье, Украина*

*E-mail: [nhort10@mail.ru](mailto:nhort10@mail.ru)*

Актуальной задачей для современных IT—компаний является определение уязвимостей и рисков безопасности информационных технологий, а также проблема эффективной оценки или приоритизации уязвимостей. Сегодня, несмотря на впечатляющий рост отрасли информационной безопасности в целом, количество инцидентов безопасности продолжает расти. Одной из причин является кризис общесистемных разработок, которые нацелены на решение актуальных задач [1, 2].

В настоящее время IT—персонал вынужден выявлять и обрабатывать уязвимости различных программных и аппаратных платформ. Существует необходимость расставить приоритеты для этих уязвимостей, чтобы в первую очередь исправлять те из них, которые представляют наибольшую опасность.

В компьютерной безопасности термин «уязвимость» используется для определения недостатков в системе, используя которые, можно нарушить его целостность и вызвать неправильную работу системы. Уязвимость может быть результатом ошибок программирования, недостатков, допущенных при проектировании системы, ненадежности паролей, вирусов и злонамеренного программного обеспечения, скриптовых и SQL—инъекций. Некоторые уязвимости известны только теоретически, другие же активно используются и имеют известные эксплоиты. Вообще, уязвимость позволяет атакующему «обмануть» приложение — заставить его сделать то, на что у него нет прав. Это достигается путем внедрения каким-либо образом в программу данных или кода в такие места, где программа воспримет их как свои. Некоторые уязвимости появляются из-за недостаточной проверки данных, вводимых пользователем, и позволяют вставить в интерпретируемые код произвольные команды. Другие уязвимости появляются из-за более сложных проблем, таких как запись данных в буфер без проверки его границ (переполнение буфера).

Проблема уязвимостей и их обнаружения исследуется очень давно, и за время существования уязвимостей делались различные

попытки классифицировать их по различным критериям [1, 3]. В настоящее время используется следующая классификация уязвимостей компьютерных систем (КС), что отражает этапы его жизненного цикла, которые изображены в таблице 1.

*Таблица 1*

**Классификация уязвимостей компьютерных систем**

<b>Этапы жизненного цикла компьютерной системы</b>	<b>Категории уязвимостей компьютерной системы</b>
Проектирование компьютерной системы	Уязвимости проектирования
Реализация компьютерной системы	Уязвимости реализации
Эксплуатация компьютерной системы	Уязвимости конфигурации

Самые опасные — уязвимости проектирования, которые обнаруживаются и устраняются с большим трудом. В этом случае, уязвимость свойственна проекту или алгоритму и, следовательно, даже совершенная его реализация (что в принципе невозможно) не избавит от заложенной в нем уязвимости. Смысл уязвимостей второй категории (уязвимость реализации), заключается в появлении ошибки на этапе реализации в программном или аппаратном обеспечении, корректного с точки зрения безопасности проекта или алгоритма. Яркий пример такой уязвимости — «переполнение буфера» («buffer overflow») во многих реализациях программ, например, sendmail или Internet Explorer. Выявляются и устраняются такого рода уязвимости относительно легко — путем обновления исполняемого кода или изменения исходного текста уязвимого программного обеспечения (ПО) [4, 5].

Последняя причина возникновения уязвимостей — ошибки конфигурации программного или аппаратного обеспечения. Наряду с уязвимыми реализациями они распространенной категорией уязвимостей. Источником возникновения уязвимостей третьего класса являются ошибки конфигурирования аппаратного и программного обеспечения. Такие уязвимости наиболее распространены и легче обнаруживаются. К ним относятся: наличие слабых паролей, наличие незаблокированных встроенных учетных записей пользователей неправильным образом установленные права доступа пользователей к информационным ресурсам, наличие в информационных системах неиспользуемых, но потенциально опасных сетевых служб и программных компонентов. Выявить и исправить такие уязвимости проще.

Но, так как уязвимостей, которые подлежат исправлению много, и они оцениваются по разным шкалам, то свести эти данные воедино для общего анализа не представляется возможным. Для решения этой задачи существуют системы оценки уязвимостей, которые были созданы коммерческими и некоммерческими организациями: схема классификации уязвимостей NIPC, шкала анализа уязвимостей SANS,

система оценки критичности уязвимостей Microsoft, система оценки уязвимостей по стандарту PCI DSS, системы US—CERT, CVSS и nCircle [5—8, 12]. Каждая организация приводила и обосновывала свою классификацию. Однако ни одна классификация не может быть категоричной. Каждая из этих систем имеет свои преимущества и отличаются они друг от друга по параметру, который измеряется.

Система CERT/CC использует значение оценок от 0 до 180 и учитывает такие факторы, как например: неотъемлемый риск в Интернет-структуре и какой тип предпосылок требуется для эксплуатации уязвимости. Координационный центр CERT (CERT/CC), пожалуй, наиболее широко известная группа. В рамках программы CERT, рассматриваются риски на уровне программного обеспечения и системного обеспечения. Хотя она была создана как команда реагирования на инциденты, CERT/CC, через определенный промежуток времени — реорганизовалось, и, кроме того, еще сосредоточилась на выявлении и устранении существующих и потенциальных угроз, сообщая системных администраторов и других технических специалистов, об этих угрозах. Чтобы уменьшить риски безопасности, связанные с программным обеспечением уязвимостей, CERT/CC стремятся к решению как количества уязвимостей в программном обеспечении, которая разрабатывается и количества уязвимостей в программном обеспечении, которые уже развернуты. CERT/CC выступает за комплексный подход, включающий в себя рекомендации, что делает конфигурацию или изменения архитектуры и применения обходных путей средствами снижения рисков. В некоторых случаях эти стратегии обеспечения более долгосрочного снижения уязвимости не просто исправить и обновить. CERT/CC является главным координационным центром при решении проблем безопасности в Интернете [7].

Система анализа уязвимостей SANS — учитывает в какой конфигурации найдено уязвимости — есть система стандартной или нет, и есть система клиентом или сервером [12].

Система оценки уязвимостей от Microsoft пытается отразить сложность эксплуатации и общее воздействие от эксплуатации уязвимости [9].

Общая система оценки уязвимостей — Common Vulnerabilities Scoring System (CVSS) — это открытая схема, которая позволяет обмениваться информацией об IT—уязвимости. CVSS разрабатывается Forum of Incident Response and Security Teams. Это свободный и открытый стандарт. Ни одна из организаций не обладает CVSS. Система оценки CVSS состоит из трех метрик: базовая метрика, временная метрика, контекстная метрика. Каждая метрика представляет собой число (оценку) в интервале от 0 до 10 вектор — короткое текстовое описание со значениями, которые используются для вывода оценки.

Базовая метрика отражает основные характеристики уязвимости. Временная метрика соответствует следующим характеристикам уязвимостей, которые меняются со временем, а контекстная метрика — характеристикам, которые являются уникальными для среды пользователя. Общая система подсчета очков уязвимостей (CVSS) обеспечивает открытую архитектуру для передачи особенностей и последствий ИТ—уязвимостей. CVSS состоит из 3 групп: базового, временного и внешней среды. Каждая группа вырабатывает числовой оценки в диапазоне от 0 до 10, а вектор, сжатый в текстовое представление, отражающее значение, используемые для получения баллов. Базовая группа представляет внутренние качества уязвимости. Временные группы отражают характеристики уязвимостей, которые меняются со временем. Внешняя группа представляет характеристики уязвимости, которые являются уникальными в среде любого пользователя. Этот объективный подход к описанию уязвимости предоставляет пользователям простое и интуитивно понятное представление об уязвимости. Это позволяет им принимать более обоснованные решения при попытке смягчить риски, связанные с уязвимостями.

Таким образом, CVSS хорошо подходит в качестве стандартной системы измерения для предприятий, организаций и правительств, которые требуют точной и последовательной оценки влияния уязвимости. CVSS представляет собой универсальный открытый и стандартизированный метод рейтинга ИТ—уязвимостей.

Понятно, что уязвимости необходимо выявлять, чем и занимаются системы анализа защищенности (security assessment systems), также известные как сканеры безопасности (security scanners) или системы поиска уязвимостей. Они проводят всесторонние исследования заданных систем с целью выявления уязвимостей, которые могут привести к нарушениям политики безопасности. Результаты, полученные от средств анализа защищенности, представляют «мгновенный снимок» состояния защиты системы в данный момент времени.

В настоящее время можно выделить три базовые группы методов оценки уязвимостей:

- использование нескольких категорий уязвимостей или качественное ранжирование;
- количественное ранжирование;
- применение комплексных показателей оценки уязвимостей;

Сложившаяся в настоящее время ситуация означает, что в подавляющем большинстве случаев, управление информационной безопасностью представляет собой процесс, основанный на оценке рисков, существующих при принятой политике безопасности и с учетом имеющихся средств защиты [1]. При этом часть рисков, связанных с недостаточной надежностью самих элементов информа-

ционной системы, просто не учитывается из-за отсутствия достоверных сведений. В результате компании несут расходы, необходимые для снижения известных рисков, а неизвестные риски так и остаются за рамками внимания. Применительно к формуле оценки рисков можно говорить об отсутствии достаточных сведений об уязвимости.

Для решения этой проблемы, в первую очередь необходимо устранить пробел, связанный с недостатком сведений об актуальных уязвимости информационных систем.

Необходимость стандартизации в этой области назрела уже давно, но существенные шаги в этом направлении были сделаны только в последние годы.

Метод информирования об уязвимостях является одним из пунктов спора в обществе компьютерной безопасности [1, 2]. В конце прошлого века основной поддерживаемой производителями политикой, была политика неразглашения (non—disclosure), или как ее часто называли — «безопасность через замалчивание» (security through obscurity). В противоположность этой ситуации широкое распространение получило движение полного разглашения (full—disclosure), согласно которому, полная информация об уязвимости должна быть опубликована в общем доступе, что повышает активность производителей в области безопасности и призвано помочь пользователям систем самостоятельно устранить уязвимость, если необходимое обновление не доступно. Побочным эффектом full—disclosure является появление баз данных уязвимостей различных продуктов, которые могут быть использованы с различными целями, например для недопущения подобных ошибок в дальнейшем.

Некоторые специалисты отстаивают полное раскрытие информации об уязвимостях, как только они обнаружены. Другие советуют сообщать об уязвимостях только тем пользователям, которые подвергаются наибольшему риску, а полную информацию публиковать только после задержки или не публиковать вовсе. Такие задержки позволят тем, кто был осведомлен, исправить ошибку посредством разработки и применения патчей, но также могут и увеличивать риск для тех, кто не имеет представления о деталях. Как показывает практика, в мире вполне эффективно работает политика полного или частичного разглашения, стимулируя производителей к оперативному устранению уязвимостей и повышая информированность специалистов в области безопасности [1—4]. В случае возникновения конфликтов можно воспользоваться отработанным механизмом взаимодействия с координаторами. Однако и в России и в мире и в Украине эти вопросы остаются открытыми.

## Список литературы:

1. Андреев Э. М., Миронов А.В. Социальные проблемы интеллектуальной уязвимости и информационной безопасности //Социально—гуманитарные знания. — 2000. — № 4. — С. 169—180.
2. Брандман Э. М. Глобализация и информационная безопасность общества / Э. М. Брандман // Философия и общество.— 2006. — № 1. — С. 31—41.
3. Брандман Э. М. Цивилизационные императивы и приоритеты информационной безопасности общества / Э. М. Брандман // Философия и общество. — 2006. — № 3. — С. 60—77.—Предпринимательство, с. 131—144.
4. Доктрина информационной безопасности //Средства массовой информации постсоветской России: Учеб. пособие /Я. Н. Засурский, Е. Л. Варганова, И. И. Засурский. — М., 2002. — С. 262—301.
5. Разработка средств безопасности и эксплойтов — Питер, 2007г. Авторы: Джеймс К. Фостер и Л. Винсент.
6. Application Security Inc. Vulnerability Disclosure Policy, [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.appsecinc.com/aboutus/vulndisclosepolicy/> (дата обращения: 20.04.2012)
7. CERT/CC Vulnerability Disclosure Policy, [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: [http://www.cert.org/kb/vul\\_disclosure.html](http://www.cert.org/kb/vul_disclosure.html) (дата обращения: 24.04.2012)
8. FIRST, [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.first.org/> (дата обращения: 20.04.2012)
9. Microsoft Security Response Center Security Bulletin Severity Rating System, [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.microsoft.com/technet/security/bulletin/rating.mspx> (дата обращения: 23.04.2012)
10. National Vulnerability Database, [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://nvd.nist.gov/> (дата обращения: 20.04.2012)
11. Organization for Internet Safety. “Guidelines for Security Vulnerability Reporting and Response, Version 2.0.” [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.oisafety.com/guidelines/secresp.html> (дата обращения: 23.04.2012)
12. SANS Critical Vulnerability Analysis Archive, [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.sans.org/newsletters/cva/> (дата обращения: 23.04.2012)
13. @stake Security Vulnerability Reporting Policy, [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.atstake.com/research/policy/> (дата обращения: 28.04.2012)

## СЕКЦИЯ 3.

### «ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ»

#### 3.1. КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, ФИЗИКА КРИСТАЛЛОВ

##### ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ДИСЛОКАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ НА ОПТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ ИОННЫХ КРИСТАЛЛОВ

***Карьев Леонид Геннадьевич***

*канд. физ.-мат. наук, доцент ТюмГНГУ, г. Новый Уренгой*

***Фёдоров Виктор Александрович***

*д-р физ.-мат. наук, профессор ТГУ им. Г. Р. Державина, г. Тамбов*

*E-mail: [Feodorov@tsu.tmb.ru](mailto:Feodorov@tsu.tmb.ru)*

***Новиков Виктор Петрович***

*Студент, ТюмГНГУ, г. Новый Уренгой*

*E-mail: [meet.ones.fate@yandex.ru](mailto:meet.ones.fate@yandex.ru)*

В последнее время интенсивно развивается применение лазерного излучения для обработки поверхности материалов, контроля ее качества, сварки, резки и так далее.

Это требует создания более мощных и современных лазерных систем. Вместе с тем в элементах оптики лазерных систем, изготавливаемых из прозрачных материалов, наблюдаются механические повреждения типа трещин, которые возникают при взаимодействии излучения с веществом.

Несмотря на большое количество исследований в этом направлении, задача выяснения механизмов разрушения актуальна и на сегодняшний день.

В настоящее время рассматриваются несколько возможных механизмов разрушения прозрачных материалов, вызванных действием электромагнитного излучения [1—3, 6—9, 13, 14, 19].

Доказано [3, 10], что доминирующую роль в инициировании разрушения твердых прозрачных диэлектриков играют поглощающие микровключения.

Предложено несколько физических механизмов инициирования разрушения поверхности твердых прозрачных диэлектриков за счет нагрева поглощающих включений. Так, существует теория теплового механизма разрушения на поглощающих микродефектах с учетом температурной нелинейности констант вещества (коэффициенты поглощения, теплопроводность и другие) [11]. Эта теория нелинейного оптического пробоя (теплового взрыва микродефекта) более адекватно объясняет экспериментальные данные (в отличие, например, от аналогичной теории, сделанной в рамках линейного приближения, то есть в предположении, что константы вещества не зависят от температуры [20]).

В работе [4] рассмотрен механизм разрушения прозрачных диэлектриков, в котором образование макроразрушений есть следствие распространения (при достаточных интенсивностях света) волны поглощения в глубь вещества от поверхности поглощающего включения. Распространение поглощающего «ореола» хорошо объясняет ряд особенностей оптического пробоя реальных прозрачных материалов.

В зависимости от мощности падающего излучения, от длины волны и от времени воздействия, различные механизмы могут играть в разрушении определяющую роль. При этом предельная стойкость материала к лазерному излучению определяется предельной стойкостью его поверхности. Это обусловлено тем, что величина порога оптического пробоя поверхности ниже, чем объемного, и часто световая прочность оптических изделий определяется именно им. Предельная стойкость поверхности, как и объемная, зависит от концентрации и состояния примесей, совершенства структуры и, кроме того, от качества и вида предварительной обработки [5].

Работа посвящена исследованию взаимодействия лазерного излучения с участками поверхности кристалла, содержащими скопления краевых дислокаций (реликтовых или искусственно созданных), а так же со свободными от дислокаций участками [17, 18].

Кристаллы, подготовленные для экспериментов, раскалывали по спайности на две части. Поверхность скола одной части подвергалась воздействию импульса оптического квантового генератора (ОКГ), поверхность скола второй части использовалась для выявления начальной дислокационной структуры.

Эксперименты проводили на установках ГОС-1001 и "Квант-15" ( $\lambda \sim 1,06$  мкм). Первая позволяла облучать области поверхности

кристалла с размером  $\sim 10$  мм в диаметре, поверхностная плотность энергии при этом достигала  $0,2 \pm 0,6$  кДж/см<sup>2</sup>, время импульса  $\sim 10^{-3}$  с. Во второй — лучи фокусировались до пятна диаметром  $0,2—0,3$  мм.

а) Несфокусированным излучением ГОС-1001 воздействовали на кристаллы LiF с размерами  $15 \times 25 \times 3$  мм и концентрацией примесей  $\sim 10^{-3}$  вес.% ( $\text{Ca}^{+2}$ ,  $\text{Mg}^{+2}$ ,  $\text{Ba}^{+2}$ ). Дислокационная структура поверхности выявлялась по стандартной методике.

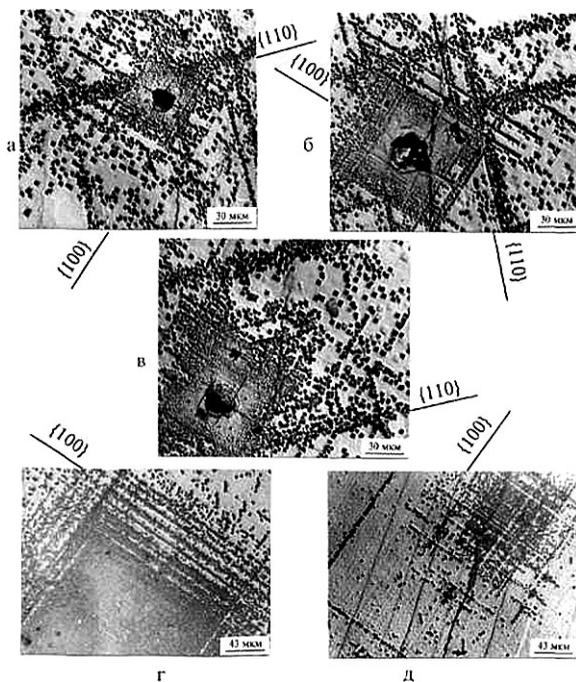
В первой серии опытов испытывались образцы с хорошо развитой реликтовой дислокационной структурой. Плотность дислокаций в полосах составляла  $10^6 \div 10^7$  см<sup>-2</sup>. Воздействию импульса ОКГ подвергалась нетравленная поверхность скола, а ее исходная дислокационная структура выявлялась травлением симметричной поверхности скола.

Во второй серии экспериментов облучались образцы с искусственно введенной полосой скольжения по  $\{110\}$  [16]. Предварительно одна часть расколотого кристалла состаривалась (373 К, 100 часов [12]), на второй выявляли дислокационную структуру.

После облучения, в обоих случаях, наблюдались участки локального разрушения и деформирования поверхности (рис. 1). Локальное разрушение проявлялось в виде кратеров с расходящимися от них микротрещинами по  $\{100\}$ , или без них. Размеры кратеров достигали  $\sim 0,25$  мм. Кратеры окружены развитой дислокационной структурой, локализующейся в зоне со сторонами ориентированными по  $\langle 100 \rangle$  и размерами  $0,075 \div 0,75$  мм. Наблюдались также деформированные локальные участки поверхности с аналогичной дислокационной структурой, но без явного разрушения (рис. 1).

В каждой серии опытов определялось отношение  $W_p = N_1/N_2$ , где  $N_1$  — количество актов разрушения, расположенных на полосах скольжения или в непосредственной близости от них;  $N_2$  — количество разрушений на свободных от дислокаций участках.

Для образцов первой серии среднее значение  $W_p \sim 1,6$ ; для второй  $\sim 1,2$ . Сопоставление результатов облучения не состаренных кристаллов этой серии показало, что  $N_1 \leq N_2$  почти во всех случаях.



**Рис.1. Локальные участки разрушения на поверхности кристаллов после облучения несфокусированным лучом ( $\varnothing \sim 10$  мм). Разрушения происходят чаще в областях скопления краевых дислокаций (а, б, в); г, д — локальные участки деформирования поверхности кристалла без следов явного разрушения.  $\text{LiF}$  ( $10^{-3}$  вес. %).**

Следует отметить, что в первом случае, но только для крупных краев  $W_p > 1,6$ . Во втором — такой преимущественности не обнаружено.

Таким образом, частота возникновения разрушения на полосах скольжения (реликтовых, а также искусственно введенных и состаренных) больше, чем на бездислокационных участках поверхности кристалла.

Большая частота разрушения в первой серии опытов по сравнению со второй объясняется тем, что реликтовые скопления краевых дислокаций насыщены примесными и собственными точечными дефектами более, чем искусственно введенные полосы скольжения краевых дислокаций и затем состаренные. Обогащение дислокаций точечными дефектами, в первом случае, обусловлено диффузией последних, находящихся в диспергированном состоянии (именно в

таком состоянии находятся примеси и собственные точечные дефекты непосредственно после выращивания кристалла и его остывания от высокой температуры). Во втором случае происходит состаривание дислокационной структуры, когда точечные дефекты практически закомплексованы (длительное вылеживание кристалла после выращивания при комнатной температуре) к тому же, в этой ситуации происходит миграция точечных дефектов, находящихся в диспергированном состоянии, не только к дислокациям, а и к самим комплексам.

Во всех случаях трещины от кратера развивались по плоскостям  $\{100\}$ , тогда как при микроиндентировании — всегда по плоскостям  $\{110\}$ . Это связано с тем, что на процесс деформирования областей кристалла разогретым включением требуется меньше времени, чем это необходимо для зарождения дислокаций и их движения. Таким образом, зарождение трещины и ее развитие происходит практически при отсутствии развивающейся пластичности, поэтому и приводит к abruptному разрушению.

При увеличении мощности излучения наблюдалось интенсивное разрушение образцов. В большинстве случаев разрушение имело место на задней поверхности кристалла и представляло собой сетку трещин в плоскостях первичной спайности. Это можно объяснить наложением излучения отраженного и падающего на заднюю поверхность кристалла, а также образующейся при воздействии лазерным импульсом термоупругой волны сжатия.

б) Сфокусированным лучом обрабатывались образцы с размерами  $5 \times 2 \times 20$  мм. Эксперимент состоял из нескольких серий. В дополнение к предыдущему в нем использовали еще и кристаллы LiF с концентрацией примесей  $\sim 10^{-5}$  вес. %, кроме того, в некоторых опытах образцы перед состариванием предварительно отжигали (973 К, 5 часов) с последующей закалкой на воздухе при комнатной температуре. Полосы скольжения по плоскостям  $\{110\}$ , в некоторых сериях эксперимента, вводили в кристаллы искусственно. В каждой из этих серий облучались области кристалла, прилегающие к полосе, сама полоса и области поверхности кристалла, удаленные от нее. Опыты отличались не только степенью чистоты кристаллов и дислокационной структурой облучаемой поверхности, но и различным количеством импульсов облучения одного и того же участка.

За количественную характеристику результатов брали отношение  $P_p = m/n$ , где  $m$  — количество импульсов облучения, приведших к разрушению образца;  $n$  — количество облученных участков ( $n \geq 70$ ).

1) Чаще всего разрушения наблюдались в предварительно закаленных кристаллах, причем в кристаллах, закаленных с

искусственно введенной полосой скольжения и не состаренных, вероятность разрушения больше, чем в таких же кристаллах с искусственно введенной полосой скольжения, но состаренных.

2) В противоположность этому, в образцах предварительно не закаленных с искусственно введенной полосой скольжения и затем состаренных, вероятность разрушения выше, чем в аналогичных кристаллах с искусственно введенной полосой скольжения, но не состаренных.

3) В последних сериях, когда облучались образцы без полос скольжения, но с различной предварительной тепловой обработкой, каждая точка облучалась 100 раз с интервалами времени 0,5 с. Почти во всех случаях  $P_p=0$  и для стандартных по количеству примесей кристаллов и для образцов с концентрацией примесей  $\sim 10^{-5}$  вес. %. В большинстве случаев, если разрушение возникало, то это происходило после первого акта облучения.

В ходе опытов несколько раз отмечались разрушения явно подповерхностного характера (рис. 2). Наблюдались случаи, когда разрушение возникало не на лицевой поверхности (поверхность фокусирующей), а на противоположной, или на обеих поверхностях одновременно.

Большая вероятность разрушения для предварительно закаленных образцов объясняется тем, что крупные комплексы и преципитаты после отжига и закалки не переходят полностью в диспергированное состояние, а распадаются на менее крупные образования, тем самым увеличивая вероятность того, что облучаемый объем кристалла будет содержать комплексы примесей.

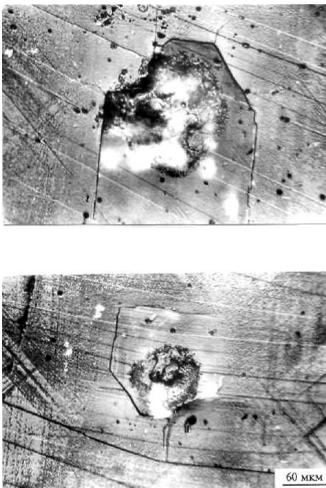
Большую вероятность разрушения для кристаллов закаленных, затем состаренных, в сравнении с кристаллами, состаренными без предварительной закалки, можно объяснить тем же, а также возникновением комплексов, дополнительно, в процессе старения [15] с размерами опасными для данной длительности импульсов.

Более выраженная трещиностойкость к лазерному облучению образцов с предварительно введенной по {110} полосой скольжения, но не состаренной, в сравнении с аналогичными образцами, подвергнутыми перед облучением низкотемпературному состариванию, объясняется большей концентрацией точечных дефектов в области полосы скольжения после состаривания.

Результаты третьей серии экспериментов более, чем предыдущих, подчеркивают важную роль в иницировании разрушения при лазерном воздействии на кристалл примесных комплексов (для данных параметров облучения). Маленькая вероятность разрушения, в этом случае, обусловлена тем, что условия эксперимента не позволяли за один опыт

облучить более чем  $\sim 10$  участков испытуемого образца, в которых комплексы с опасными размерами, по-видимому, отсутствовали.

**Выводы.** Лазерное облучение щелочногалоидных кристаллов в ИК-диапазоне ( $\lambda=1,06$  мкм) приводит к накоплению повреждений преимущественно в участках скопления краевых дислокаций, что коррелирует с отличием механических свойств этих участков поверхности кристалла от остальных.



*Рис. 2. Подповерхностное разрушение при лазерном облучении, LiF ( $10^{-3}$  вес. %)*

Предварительная термообработка кристалла влияет на вероятность возникновения очагов разрушения в нем при воздействии излучения ОКГ: закалка на воздухе при комнатной температуре после отжига в печи при 973 К (5 часов), старение — 373 К, 100 часов.

Основную роль в инициировании разрушения щелочногалоидных кристаллов при воздействии лазерного излучения играют примеси и собственные точечные дефекты. Концентрируясь в участках с развитой дислокационной структурой, они увеличивают их поглощающую способность в данном диапазоне длин волн.

### Список литературы:

1. Ашкинадзе Б. М., Владимиров В. И., Лихачев В. А. и др. Разрушение прозрачных диэлектриков под действием мощного лазерного излучения // ЖЭТФ. — 1966. — Т. 55. — № 5. — С. 1187—1201.

2. Апполонов В. В. Термоупругие воздействия импульсно—периодического лазерного излучения на поверхность твердого тела // Квантовая электроника. — 1982. — Т.9. — № 2. — С. 343—345.
3. Алешин И. В., Анисимов С. И., Бонч-Бруевич А. М. и др. Оптический пробой прозрачных сред, содержащих микронеоднородности // ЖЭТФ. — 1976. — Т. 70. — № 4. — С. 1214—1224.
4. Анисимов С. И., Мокшанцев Б. И., Комолов В. Л. Влияние электронной теплопроводности на пороги и динамику развития пробоя диэлектриков, содержащих микронеоднородности // Квантовая электроника. — 1981. — Т. 8. — № 8. С. 1671—1674.
5. Бахарев М. С., Миркин Л. И., Шестериков С. А., Юмашев М.А. Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. — М.: Издательство МГУ, 1988. — 224 с.
6. Горбунов А. В., Максимук М. Ю. Кинетика локального оптического пробоя в объеме щелочногалоидных кристаллов: I. Развитие полости. // ФТТ. — 1994. — Т. 36. — № 5. — С. 1416—1428.
7. Горбунов А.В., Максимук М.Ю. Кинетика локального оптического пробоя в объеме щелочногалоидных кристаллов: II. Свечение и его спектр // ФТТ. — 1994. — Т. 36. — № 5. — С. 1429—1435.
8. Горбунов А. В., Классен Н. В., Максимук М. Ю. Изучение природы вспышки при оптическом пробое ЩГК на 10,6 мкм // ЖТФ. — 1992. — Т. 62. — № 12. — С. 39—49.
9. Горшков Б. Г., Данилейко Ю. К., Маненков А. А. и др. Размерный эффект и статистика лазерного разрушения ЩГК на  $\lambda=10,6$  мкм // Квантовая электроника. — 1981. — Т. 8. — № 1. — С. 148—154.
10. Данилейко Ю. К., Маненков А. А., Нечитайло В. С. и др. Роль поглощающих включений в механизме разрушения прозрачных диэлектриков лазерным излучением // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 63. — № 3(9). — С. 1030—1035.
11. Данилейко Ю. К., Маненков А. А., Нечитайло В. С. О механизме лазерного разрушения прозрачных материалов, обусловленном тепловым взрывом поглощающих неоднородностей // Квантовая электроника. — 1978. — Т. 5. — № 7. — С. 194—195.
12. Джонстон В., Гилман Дж. Скорость передвижения, плотность дислокаций и пластическая деформация кристаллов фтористого лития // Успехи физических наук. — 1960. — Т. LXX. — Вып. 3. — С. 489—514.
13. Казанцев С. Г. Размерный эффект и лазерная стойкость материалов ИК оптики при больших пятнах облучения // Квантовая электроника. — 1997. — Т. 24. — № 3. — С. 269—270.
14. Колдунов М. Ф., Маненков А. А., Покотило И. Л. Роль временных флуктуаций интенсивности в исследовании статистических закономерностей лазерного разрушения, связанного с поглощающими

- включениями // Квантовая электроника. — 1994. — Т. 21. — № 11. — С. 1077—1079.
15. Сойфер Л. М. Упрочнение щелочногалоидных монокристаллов двухвалентными примесями // Физика конденсированного состояния. — 1973. — Вып. XXIV. — С. 45—64.
  16. Смирнов Б. И. Дислокационная структура и упрочнение кристаллов. — Л.: Наука, 1981. — 235 с.
  17. Федоров В. А., Карьев Л. Г., Иванов В. П., Шелохвостов В. П., Федорова Н. В. Влияние импульсных и стационарных электромагнитных полей на структуру поверхностей щелочногалоидных кристаллов // Прочность и пластичность материалов в условиях внешних энергетических воздействий: Тез. докл. III Международной конф. 26—28 июня 1993 года. — Новокузнецк, 1993. — С. 57.
  18. Федоров В. А., Карьев Л. Г., Иванов В. П., Шелохвостов В. П. Структура и морфология поверхностей ЦГК при воздействии электромагнитных полей // Труды II Международной научно—технической конф. «Актуальные проблемы фундаментальных наук». — Т. 3. — Москва, 1994. — С. 71—73.
  19. Fradin D. W., Blombergen N., Letellier Y. P. Dependence of laser — induced breakdown field Strength on Pulse duration // Appl. Phys. Lett. — 1973. — Vol. 22. — № 12. — P. 635—639.
  20. Hopper R. W., Uhlman D. R. Mechanism of inclusion damage in laser glass // J. Appl. Phys. — 1970. — V. 41. — № 10. — P. 4023—4037.

## 3.2. ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ

### ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ОСАЖДЕНИЯ НА СТРУКТУРУ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛЕНОК ОКСИДА ЦИНКА

*Аль-Обайди Надир Джасим*  
аспирант, физ. фак. ДГУ, г. Махачкала  
E-mail: [nadph73@yahoo.com](mailto:nadph73@yahoo.com)

*Рабаданов Муртазали Хулатаевич*  
д-р физ.-мат. наук, профессор, ректор ДГУ, г. Махачкала

**Рабаданов Рабадан Абдулкадырович**  
д-р физ.-мат. наук, профессор ДГУ, г. Махачкала

*Алиев Иса Шамсудинович*  
канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель, ДГУ, г. Махачкала

*Исмаилов Абубакар Магомедович*  
канд. физ.-мат. наук, доцент ДГУ, г. Махачкала

На основе исследований влияния условий осаждения на структуру и электрические свойства пленок  $ZnO$ , получаемых методом термохимического переноса в водороде на плоскостях  $Al_2O_3$ , установлено существование определенной температурной области ориентированного роста слоев, проводится оценка энергии ионизации доноров, обсуждаются предполагаемые механизмы рассеяния носителей заряда в пленках и природа рассеивающих центров.

Тонкие пленки оксида цинка являются перспективным материалом для использования в микроэлектронике, создания газовых сенсоров, светодиодов и лазеров для видимой и УФ области спектра и других оптоэлектронных устройств. Практический интерес представляет сочетание в этом материале электрических, пьезоэлектрических, люминесцентных и адсорбционных свойств и возможность управления ими [1, 6—10]. Для получения пленок оксида цинка используются различные методы: молекулярно-лучевая эпитаксия, магнетронное распыление, осаждение из газовой фазы, импульсное лазерное напыление и др. Метод химического транспорта из газовой фазы позволяет получать эпитаксиальные пленки оксида цинка

высокого качества с достаточно большой скоростью ( $\sim 5 \text{ мкм/мин}$ ) [3], что стимулирует широкое применение этого метода при создании микро- и оптоэлектронных устройств на базе ZnO.

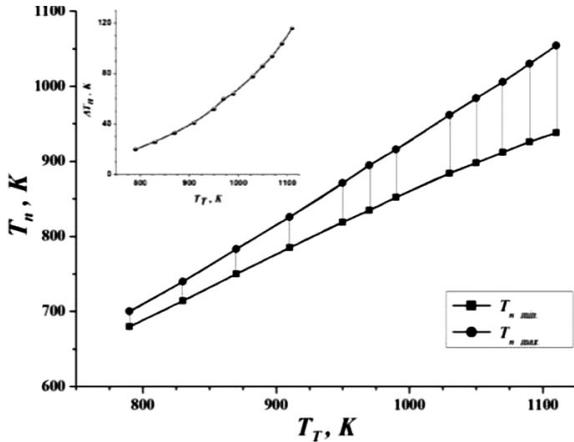
Так как свойства слоев ZnO в значительной мере зависят от условий их формирования [2], в данной работе ставилась задача исследования зависимости структуры и электрических свойств пленок от технологических условий их осаждения. Нами использовалась газофазная обратимая окислительно-восстановительная реакция [4]



которая является эндотермической и протекает с увеличением числа молей в газовой фазе на единицу. Общий термодинамический анализ реакции (1) дает для зависимости константы равновесия  $K$  от давления  $p$  и температуры  $T$  соотношения  $\frac{\partial}{\partial p} K(p, T)_T = -\frac{1}{p}$ ,  $\frac{\partial}{\partial T} K(p, T)_p > 0$ .

из которых следует, что с увеличением давления в системе константа  $K$  реакции (1) уменьшается, а с ростом температуры увеличивается. Таким образом, при получении ZnO по реакции (1) можно управлять процессом роста слоев, изменяя в системе давление рабочего газа, температуры зоны источника и подложки, разбавляя водород инертным газом или парами воды [3]. Изучением влияния условий осаждения на кристаллическую структуру пленок ZnO на плоскостях  $\text{Al}_2\text{O}_3$  разной ориентации было установлено существование определенной температурной области ориентированного роста. Температурные пределы этой области при давлении водорода в системе  $1,7 \cdot 10^5 \text{ Па}$  даны на рис. 1, из которого видно, что при температуре тигля  $T_T = 790 \text{ К}$  эпитаксиальный рост наблюдается в интервале температур подложки  $T_n = 680\text{-}700 \text{ К}$ , а при возрастании температуры тигля  $T_T$  до  $1110 \text{ К}$  указанный интервал температур подложки  $T_n$  составляет  $940\text{—}1060 \text{ К}$ , т. е. величина интервала эпитаксиального роста возрастает от  $20$  до  $120 \text{ К}$ . Вне этой температурной области стабильно наблюдается осаждение поликристаллических пленок.

Значения критической температуры подложки  $T_{n \text{ min}}$  и  $T_{n \text{ max}}$ , соответственно ниже и выше которых происходит образование поликристаллических пленок, зависят от величины относительного пересыщения, которое определяет скорость поступления материала на подложку, а также от ориентации и теплопроводности последней. Если теплопроводность подложки мала, то необходимо обеспечить отвод тепла от неё (теплоту образования ZnO) в процессе осаждения материала или установить более низкую температуру  $T_n$ . Ширина интервала эпитаксиального роста ( $T_{n, \text{max}} - T_{n, \text{min}}$ ) при фиксированной температуре тигля  $T_T$ , зависит также от величины давления водорода в системе  $P_{\text{H}_2}$ : с увеличением  $P_{\text{H}_2}$  область эпитаксиального роста расширяется, а при уменьшении — сужается.

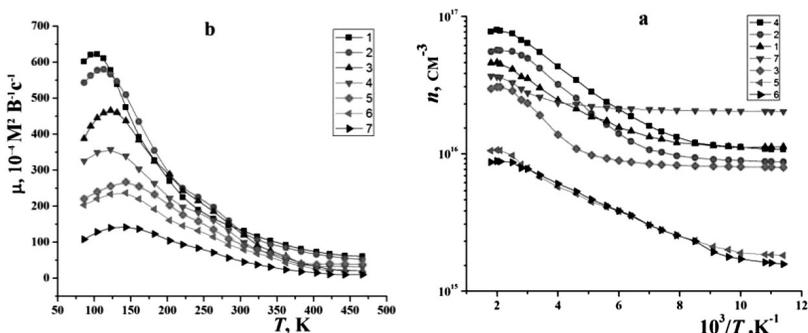


**Рис.1. Зависимость интервала температур подложек  $T_n$  при котором наблюдается ориентированный рост пленок  $ZnO$  на подложках сапфира ( $Al_2O_3$ ), от температуры тигля  $T_T$  при фиксированном давлении водорода в системе ( $1,7 \cdot 10^5$  Па). На вставке дана зависимость ширины интервала эпитаксиального роста ( $T_{n,max} - T_{n,min}$ ) от температуры тигля  $T_T$ .**

В пленках, полученных при температуре источника  $T_T > 990$  К и при температуре подложки  $T_n$  близкой к верхней границе области эпитаксиального роста наблюдается сероватый оттенок, связанный с пересыщением кристаллической решетки атомами нейтрального цинка, которые имеют тенденцию накапливаться на неоднородностях решетки при охлаждении образцов от температуры синтеза до комнатной. Прожилки металлического цинка в местах дислокаций наблюдаются на микрофотографиях поверхности эпитаксиальных пленок, полученных в условиях избытка цинка. При длительном (~1 час) отжиге таких пленок на воздухе при  $T \geq 700$  К прожилки исчезают и прозрачность пленок увеличивается, наблюдается рост удельного сопротивления и концентрации электронов. Последнее указывает, что нейтральный цинк, шунтирующий блоки мозаики и участки между дислокациями, частично окисляется, выходя на поверхность, частично растворяется в объеме, переходя в междоузлия. Надо заметить, что последующая термообработка пленок в вакууме при  $T > 500$  К приводит к обратному процессу — выделению кислорода из дефектных мест решетки и восстановлению металлического цинка.

Для изучения электрических свойств на гранях (1120)  $Al_2O_3$  были получены слои  $ZnO$  толщиной 15—20 мкм при давлении водорода  $1,7 \cdot 10^5$  Па при разных температурах тигля  $T_T$  и  $T_n$  подложки, значения которых приведены в таблице.

Номер образца	1	2	3	4	5	6	7
$T_n, K$	880	900	910	870	860	920	850
$T_T, K$	990	990	1000	1000	990	990	1000



**Рис. 2 а)** Зависимости логарифма концентрации электронов в пленках ZnO от обратной температуры окружающей среды (номера образцов указаны в рамке); **б)** зависимости подвижности электронов от температуры в тех же образцах.

Температурные зависимости концентрации и подвижности электронов в слоях в координатах, соответственно,  $\lg n = f(10^3 / T)$  и  $\mu(T)$  даны на рис. 2. Как видно, концентрация электронов в слоях достигает насыщения при температуре выше 500 К, тогда как по [5] все доноры в кристаллах ZnO должны быть ионизованы при 300 К.

Мы полагаем, что так как наши слои, в отличие от монокристаллов ZnO [5], легированных цинком и водородом при 770 К, содержат атомы нейтрального цинка, то возрастание концентрации электронов в слоях при  $T > 300$  К связано с увеличением числа доноров за счет перехода части этих атомов из дефектных мест решетки в междоузлия. На правильности такого предположения указывают и зависимости подвижности от температуры окружающей среды. В низкотемпературной области ( $T < 150$  К) с ростом температуры образца подвижность электронов увеличивается пропорционально  $T^\alpha$ , где  $\alpha$  изменяется в зависимости от условий осаждения слоев от 0,2 до 0,8, а в высокотемпературной области подвижность уменьшается пропорционально  $T^{-\alpha}$ , где  $\alpha = 0,5 \div 2,3$ . Так как показатель степени  $\alpha$  в зависимости  $\mu(T)$  для электронов в слоях ZnO не равен теоретическому значению 3/2 и меняется в достаточно широких пределах, можно предположить, что периодичность

расположения ионов решетки нарушена в разной степени (в зависимости от условий получения слоев) дефектами типа: нейтральные и заряженные атомы цинка, вакансии кислорода, (O-H)-группы, дислокации, границы блоков и др. Поэтому механизм рассеяния электронов в слоях  $ZnO$ , полученных с использованием реакции (1), носит, очевидно, комбинированный характер. Можно так же полагать, что в низкотемпературной области преобладает рассеяние на ионизованных и нейтральных атомах примеси, а в высокотемпературной области ( $T > 150$  К) подвижность электронов описывается рассеянием на колебаниях решетки и на нейтральных атомах цинка. На кривых зависимости логарифма электропроводности от обратной температуры  $\lg \sigma = f(10^3/T)$  (для тех же образцов) выделяются два линейных участка: первый — с наклоном  $\Delta E = 0,012 - 0,08$  эВ в области температур от 80 до 150 К, который соответствует энергии ионизации мелких доноров (междоузельному цинку  $Z_i^+$  и водороду в виде (O-H)<sup>-2</sup> — групп) [2] и второй — с наклоном  $\Delta E = 0,14 - 0,5$  эВ области температур от 200 до 500 К соответствует, очевидно, энергии активации атомов растворенного цинка и других комплексов в  $ZnO$ . Для всех кривых с ростом температуры от 80 до 150 К электропроводность монотонно возрастает, затем проходит через максимум и при температуре выше 200 К сравнительно резко падает. В зависимости от условий роста слоев наклон кривых в том или другом температурном интервале и сам температурный интервал меняются, спад проводимости при  $T > 200$  К очевидно связан с уменьшением подвижности с температурой.

### **Заключение**

Изучением влияния условий осаждения на кристаллическую структуру пленок  $ZnO$  на плоскостях  $Al_2O_3$  разной ориентации установлено существование определенной температурной области ориентированного роста.

Из температурных зависимостей концентрации и подвижности электронов и удельной проводимости слоев, полученных при фиксированном давлении газа и разных температурах тигля и подложки, следует:

- концентрация носителей заряда в слоях достигает насыщения при температурах выше 500 К, тогда как для монокристаллических образцов, легированных цинком и водородом при 770 К, насыщение наблюдается уже при 300 К, что связано с отличием образцов от монокристаллов по составу, т. е. наличием в пленках атомов нейтрального цинка, обладающих тенденцией накопления в местах

нарушения регулярности решетки при 300 К и растворяющихся в объеме материала при более высоких температурах;

- температурная зависимость подвижности электронов  $\mu(T)$  описывается степенной зависимостью  $\mu \sim T^\alpha$ , где  $\alpha = 0,2 \div 0,8$  при  $T < 150$  К и  $-(0,5 \div 2,3)$  при  $T > 150$  К, т. е. отличается от теоретического ( $\alpha = 3/2$ ). Такая зависимость  $\mu(T)$  не объясняется действием какого либо одного механизма рассеяния и для ее объяснения необходимо предположить параллельное действие нескольких механизмов, связанных с дефектами разной природы, каждый из которых преобладает в том или ином температурном интервале;

- два линейных участка, выявляемых на температурной зависимости проводимости - низкотемпературный (80 ÷ 150 К) энергией активации  $\Delta E = 0,012 - 0,08$  эВ и высокотемпературный (200 ÷ 500 К) с энергией активации  $\Delta E = 0,14 - 0,50$  эВ соответствуют энергии ионизации соответственно мелких и более глубоких доноров.

### Список литературы:

1. Георгобиани А. Н. Грузнцев А. Н., Волков В. Т., Воробьев М. О. ФТП, 36 (3), 205 (2002).
2. Кузьмина И. П., Никитенко В. А. Окись цинка. Получение и оптические свойства. М., Наука, 1984. - 166 с.
3. Рабаданов Р. А., Алиев И. Ш., Абдусаламов Г. А. // Получение кристаллов и пленок оксида цинка газотранспортным методом. Неорганические материалы. 1988. Т. 24, № 10. С. 1661—1665.
4. Семилетов С. А., Рабаданов Р. А. // Способ получения монокристаллических слоев. А. С. 334922 (СССР). Заявл. 23. 07. 70.
5. Hutson A. R. // Hall effect studies of doped zinc oxide single crystals. Phys. Rev. 1957, V. 108, N 2, p. 222.
6. Joseph M, Tabata H, Kawai T. Jap. J. Appl. Phys., 38, L1205 (1999).
7. Liang H. W., Lu Y. M., Shen D. Z., Liu Y. C., Yan J. F., Shan C. X., Li B. H., Zhang Z. Z., Zhang J. Y., Fan X. W. Phys. Status Solidi A, 202, 1060 (2005).
8. Minigishi K, Kowai Y, Kikuchi Y, Yano K, Kasuga M, Shimizu A. Jap. J. Appl. Phys., 36, L1453 (1997).
9. Tamura H., Shibata H., Fons P., Yamada A., Matsubara K., Iwata K., Tamura K., Takasu H., Niki S. J. Cryst. Growth, 278, 268 (2005).
10. Yamamoto T, Katayama-Yoshida H. Jap. J. Appl. Phys., 38, L166 (1999).

*ДЛЯ ЗАМЕТОК*

# **«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ: ПРОБЛЕМЫ И ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ»**

Материалы международной заочной научно-практической  
конференции

08 мая 2012 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 15.05.12. Формат бумаги 60x84/16.  
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 9. Тираж 550 экз.

Издательство «Сибирская ассоциация консультантов»  
630075, г. Новосибирск, Залесского 5/1, оф. 605  
E-mail: mail@sibac.info

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного  
оригинал-макета в типографии «Allprint»  
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3