



МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ЗАОЧНОЙ
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

**АКТУАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ
И ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Новосибирск, 2012 г.

УДК 51+53+004

ББК 22+32.81

А43

Рецензенты:

- кандидат физико-математических наук, Зеленская Татьяна Евгеньевна, Югорский государственный университет (г. Ханты-Мансийск).

- кандидат технических наук Яков Аркадьевич Полонский, эксперт высшей квалификации Единой Системы Оценки Соответствия, доцент ВФ ФГБОУ «Национальный исследовательский университет (МЭИ)», г. Волгоград.

А43 «Актуальное состояние и тенденции развития физико-математических наук и информационных технологий»: материалы международной заочной научно-практической конференции. (25 сентября 2012 г.) — Новосибирск: Изд. «Сибирская ассоциация консультантов», 2012. — 142 с.

ISBN 978-5-4379-0132-8

Сборник трудов международной заочной научно-практической конференции «Актуальное состояние и тенденции развития физико-математических наук и информационных технологий» отражает результаты научных исследований, проведенных представителями различных школ и направлений современных физико-математических наук и информационных технологий.

Данное издание будет полезно аспирантам, студентам, исследователям в области физико-математических наук и информационных технологий и всем интересующимся актуальным состоянием и тенденциями развития данного направления науки.

ББК 22+32.81

ISBN 978-5-4379-0132-8

© НП «Сибирская ассоциация консультантов», 2012 г.

Оглавление

Секция 1. Математика	6
1.1. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление	6
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УДМУРТИИ В УСЛОВИЯХ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО И СОЦИАЛЬНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОГРЕССА Дерендяева Екатерина Андреевна Кетова Каролина Вячеславовна	6
НЕКООПЕРАТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА НЭША ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ Копец Мирослав Михайлович	13
СВОЙСТВА СИНГУЛЯРНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ Копец Мирослав Михайлович	31
1.2. Теория вероятностей и математическая статистика	54
ОПТИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ИНТЕРВАЛОВ ГИСТОГРАММЫ Бардасов Сергей Александрович	54
Секция 2. Информационные технологии	63
2.1. Системный анализ, управление и обработка информации	63
ИССЛЕДОВАНИЕ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ Кораблев Юрий Анатольевич Шестопалов Михаил Юрьевич	63

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПОИСКА МАРШРУТА НА ГИПЕРГРАФЕ ДЛЯ РЕКОНСИЛЯЦИИ ПРИКЛАДНЫХ ДАННЫХ Покачалов Вадим Анатольевич	73
МОДУЛЬ АКТИВНЫХ ИНТЕЛЛЕКТ-КАРТ Рубан Иван Анатольевич	77
2.2. Элементы и устройства вычислительной техники и систем управления	83
ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ БАЗОВЫХ СТРУКТУР МОДЕЛЕЙ ПОВЕДЕНИЯ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ Иванов Александр Леонидович	83
2.3. Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей	91
ПРОБЛЕМНЫЕ АСПЕКТЫ РЕДАКТИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО КОНТЕНТА Рыженков Максим Евгеньевич	91
ИНТЕРАКТИВНЫЙ ГОЛОСОВОЙ ИНТЕРФЕЙС Феррейра Опасо Елена Владимировна	98
2.4. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ	103
ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА МАРШРУТОВ ШКОЛЬНЫХ АВТОБУСОВ Назмутдинова Айгуль Венеровна	103
2.5. Методы и системы защиты информации, информационная безопасность	109
ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ВУЗОВ НА ПРИМЕРЕ ДАГЕСТАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА Куделина Мария Вячеславовна Магомедова Елена Сергеевна	109

АНАЛИЗ РИСКОВ ЗАЩИТЫ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА БАЗЕ КГУЗ «ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР АЛТАЙСКОГО КРАЯ» Покрышкина Екатерина Владимировна Левкин Игорь Васильевич	115
2.6. Инженерная геометрия и компьютерная графика	120
ГЕНЕРАЦИЯ ТЕКСТУР НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ГРАФИЧЕСКИХ ПОТОКОВЫХ ПРОЦЕССОРАХ Сморкалов Андрей Юрьевич	120
Секция 3.«Физические науки»	126
3.1. Химическая физика, в том числе физика горения и взрыва	126
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГОРЕНИЯ ЖИДКИХ ТОПЛИВ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТИ Аскарова Алия Сандыбаевна Болегенова Салтанат Алихановна Мукашева Гаухар Канатовна Рахимбаева Назгуль Бахитовна	126
3.2. Электрофизика, электрофизические установки	132
ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПОТЕРИ В ЭКРАНЕ ОДНОЖИЛЬНОГО ПОДЗЕМНОГО СИЛОВОГО КАБЕЛЯ С ДВУМЯ ТОЧКАМИ СОЕДИНЕНИЯ Хабдуллина Зауреш Кинаятовна Чернова Арина Александровна Жангельдин Данияр Талгатович Акылбек Бахыт Жомартулы Шкуренок Виолетта Андреевна Байгелов Булат Шамильевич	132

СЕКЦИЯ 1.

МАТЕМАТИКА

1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УДМУРТИИ В УСЛОВИЯХ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО И СОЦИАЛЬНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОГРЕССА

Дерендяева Екатерина Андреевна

аспирант ИжГТУ им. М.Т. Калашиникова, г. Ижевск

E-mail: kate_derend@mail.ru

Кетова Каролина Вячеславовна

*д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой «Математическое моделирование процессов
и технологий» ИжГТУ им. М.Т. Калашиникова, г. Ижевск*

E-mail: ketova_k@mail.ru

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы по теме «Разработка математического аппарата решения задач оптимального управления для различных переходных режимов экономики с учетом влияния многих факторов».

Будем полагать, что в замкнутой экономической системе до момента t_0 имело место расширенное воспроизводство валового регионального продукта (ВРП) Y , когда научно-техническим прогрессом (НТП) и социально-образовательным прогрессом (СОП)

можно пренебречь. Начиная с t_0 , начинается инновационный путь развития экономики, в котором различаются два вида производственных фондов: $K_1(t)$ — без применения факторов НТП, $K_2(t)$ — формирующиеся в условиях НТП с темпом научно-технического (инновационного) развития β (объемы инвестиций в производственный капитал I_1 и I_2 , соответственно); и два вида человеческого капитала: $H_1(t)$ — без влияния факторов СОП, $H_2(t)$ — формирующиеся в условиях СОП с темпом социально-образовательного развития κ (объемы инвестиций в человеческий капитал J_1 и J_2 , соответственно). Описание динамики производственного капитала и человеческого капитала рассмотрены в работах [2, 3]; здесь C — объем потребления, η и χ — коэффициенты выбытия производственного и человеческого капитала соответственно; $\bar{\varepsilon}$ — усредненная по всем возрастам доля населения, участвующего в общественном производстве.

Общая постановка задачи макроэкономической динамики имеет вид [2, 4]:

$$E = Y + T - N^F = I_1 + I_2 + J_1 + J_2 + C \quad \forall t \in [t_0, t_T],$$

$$Y = F(K, H) = AK^\alpha H^\beta, \quad \alpha + \beta = 1, \quad (1)$$

$$C = s_0 E, \quad I_i = s_{ki} E, \quad J_i = s_{hi} E, \quad i = 1, 2;$$

$$s_0 + s_{k1} + s_{k2} + s_{h1} + s_{h2} = 1, \quad s_0 = \text{const}, \quad (2)$$

$$\dot{K}_i = e^{\beta_i(t-t_0)} s_{ki} E - \eta_i K_i, \quad i = 1, 2; \quad K = K_1 + K_2; \quad (3)$$

$$K_{i0} = K(t_0), \quad K_{20} = 0, \quad K_{iT} = K_i(t_T), \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \beta > 0; \quad (4)$$

$$\dot{H}_i = e^{\kappa_i(t-t_0)} \bar{\varepsilon} s_{hi} E - \chi_i H_i, \quad i = 1, 2, \quad H = H_1 + H_2; \quad (5)$$

$$H_{i0} = H_i(t_0), \quad i = 1, 2, \quad H_{iT} = H_i(t_T), \quad \kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = \kappa > 0, \quad (6)$$

Рассмотрим задачу оптимального управления, взяв за основу постановку задачи (1) — (6):

$$Cr = \int_{t_0}^{t_T} s_0 \lambda \omega F(k, h) e^{-\delta(t-t_0)} dt \rightarrow \max_{s \in \Omega},$$

$$\Omega = \left\{ s = (s_i) = (s_{k1}, s_{k2}, s_{h1}, s_{h2}) : s_i \in [0, 1], \sum_i s_i = 1 - s_0 \right\} \quad (7)$$

Решение задачи оптимального управления состоит из двух этапов. На первом этапе строится квазистационарная оптимальная траектория (квазимагистраль), а на втором — оптимальное управление экономической системой в переходный период, выводящее систему на квазимагистраль. Подробный алгоритм решения представлен в работе [4].

Пользуясь линейной однородностью производственной функции Кобба-Дугласа, запишем фазовые уравнения для удельной величины производственных фондов $k = K/L$ и человеческого капитала $h = H/L$ в виде:

$$\dot{k}_i = s_{ki} \omega e^{\beta_i(t-t_0)} F(k, h) - \gamma_{ki} k_i, \quad \dot{h}_i = s_{hi} \bar{\varepsilon} \omega e^{\kappa_i(t-t_0)} F(k, h) - \gamma_{hi} h_i, \quad (8)$$

где $\gamma_{ki} = \eta_i + \dot{L}/L$, $\gamma_{hi} = \chi_i + \dot{L}/L$.

Далее запишем гамильтониан задачи $H(\psi, s, x, t)$, и применим принцип максимума Понтрягина (при $q = \psi e^{\delta(t-t_0)}$). Определение оптимального управления сводится к решению линейной задачи математического программирования для каждого момента времени $t \in [t_0, t_T]$:

$$\begin{aligned} \lambda s_0 + q_{k1} s_{k1} + q_{k2} e^{\beta(t-t_0)} s_{k2} + q_{h1} \bar{\varepsilon} s_{h1} + q_{h2} e^{\kappa(t-t_0)} \bar{\varepsilon} s_{h2} = \\ = Qs \rightarrow \max_{s(t) \in \Omega} = \lambda s_0 + Q_m (1 - s_0); \end{aligned} \quad (9)$$

$$s_0 + s_{k1} + s_{k2} + s_{h1} + s_{h2} = 1. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q = (\lambda, Q_{k1}, Q_{k2}, Q_{h1}, Q_{h2}) = (\lambda, q_{k1}, q_{k2} e^{\beta(t-t_0)}, q_{h1} \bar{\varepsilon}, q_{h2} \bar{\varepsilon} e^{\kappa(t-t_0)}), \\ s = (s_0, s_{k1}, s_{k2}, s_{h1}, s_{h2}), \quad Q_m = \max(Q_{k1}, Q_{k2}, Q_{h1}, Q_{h2}). \end{aligned}$$

Система сопряженных уравнений имеет вид:

$$\dot{k}_i = s_{ki} \omega e^{\beta_i(t-t_0)} F(k, h) - \gamma_{ki} k_i, \quad k_{i0} = k_i(t_0), \quad k_{iT} = k_i(t_T) \Rightarrow k_i^*, \quad i = 1, 2; \quad (11, a)$$

$$\dot{h}_i = s_{hi} \bar{\epsilon} \omega e^{\kappa_i(t-t_0)} F(k, h) - \gamma_{hi} h_i; \quad h_{i0} = h_i(t_0), \quad h_{iT} = h_i(t_T) \Rightarrow h_i^*, \quad i = 1, 2; \quad (11, б)$$

$$\dot{q}_{ki} = (\delta + \gamma_{ki}) q_{ki} - [\lambda s_0 + Q_m(1 - s_0)] \omega F'_k(k, h), \quad i = 1, 2; \quad (12, a)$$

$$\dot{q}_{hi} = (\delta + \gamma_{hi}) q_{hi} - [\lambda s_0 + Q_m(1 - s_0)] \omega F'_h(k, h), \quad i = 1, 2. \quad (12, б)$$

Комбинируя уравнения (11) и используя условие линейной однородности производственной функции, получим

$$\dot{w} = [s_{k1} + s_{k2} e^{\beta(t-t_0)} - (s_{h1} + s_{h2} e^{\kappa(t-t_0)}) \bar{\epsilon} w] \omega f(w) - (\gamma_{k2} - \gamma_{h2}) w - [(\gamma_{k1} - \gamma_{k2}) w_{k1} - (\gamma_{h1} - \gamma_{h2}) w w_{h1}], \quad (13, a)$$

$$\dot{w}_{k1} = [s_{k1} - (s_{h1} + s_{h2} e^{\kappa(t-t_0)}) \bar{\epsilon} w_{k1}] \omega f(w) - \gamma_{k1} w_{k1} + [\gamma_{h2} w_{k1} + (\gamma_{h1} - \gamma_{h2}) w_{k1} w_{h1}], \quad (13, б)$$

$$\dot{w}_{h1} = [s_{h1} - (s_{h1} + s_{h2} e^{\kappa(t-t_0)}) w_{h1}] \bar{\epsilon} \omega f(w) - \gamma_{h1} w_{h1} + [\gamma_{h2} w_{h1} + (\gamma_{h1} - \gamma_{h2}) w_{h1} w_{h1}], \quad (13, в)$$

$$w_{k1} + w_{k2} = w, \quad w_{h1} + w_{h2} = 1, \quad (13, г)$$

где $f(w) = A w^\alpha$; $w = (k_1 + k_2)/(h_1 + h_2)$; $w_{k1} = k_1/(h_1 + h_2)$;

$w_{h1} = h_1/(h_1 + h_2)$; $w_{k2} = k_2/(h_1 + h_2)$; $w_{h2} = h_2/(h_1 + h_2)$.

В итоге, с учетом преобразований и подстановок [4] уравнения (11) совместно с уравнениями (13), записанными в форме

$$\dot{w}^* = \left[s_{k1}^* + s_{k2}^* e^{\gamma(t-t_0)} - (s_{h1}^* + s_{h2}^* e^{\kappa(t-t_0)}) \bar{\varepsilon} w^* \right] \omega f(w^*) - (\gamma_{k2} - \gamma_{h2}) w^* - \left[(\gamma_{k1} - \gamma_{k2}) w_{k1}^* - (\gamma_{h1} - \gamma_{h2}) w^* w_{h1}^* \right], \quad (14,a)$$

$$\dot{w}_{k1}^* = \left[s_{k1}^* - (s_{h1}^* + s_{h2}^* e^{\kappa(t-t_0)}) w_{k1}^* \bar{\varepsilon} \right] \omega f(w^*) - \gamma_{k1} w_{k1}^* + \left[\gamma_{h2} w_{k1}^* + (\gamma_{h1} - \gamma_{h2}) w_{k1}^* w_{h1}^* \right], \quad (14,b)$$

$$\dot{w}_{h1}^* = \left[s_{h1}^* - (s_{h1}^* + s_{h2}^* e^{\kappa(t-t_0)}) w_{h1}^* \right] \bar{\varepsilon} \omega f(w^*) - \gamma_{h1} w_{h1}^* + \left[\gamma_{h2} w_{h1}^* + (\gamma_{h1} - \gamma_{h2}) w_{h1}^* w_{h1}^* \right], \quad (14,c)$$

$$w_{k1}^* + w_{k2}^* = w^*, \quad w_{h1}^* + w_{h2}^* = 1, \quad (14,d)$$

и условием

$$s_{k1}^* + s_{k2}^* + s_{h1}^* + s_{h2}^* = 1 - s_0 \quad (15)$$

позволяют рассчитать квазистационарную траекторию сбалансированного роста при условии, что значения переменных w^* , w_{k1}^* и w_{h1}^* в начальный момент времени $t = t_0$ известны. Для определения квазистационарного участка оптимальной траектории будем использовать метод последовательных приближений [4].

Рассмотрим результаты решения задачи оптимального управления динамикой экономической системы в условиях НТП и СОП для экономической системы Удмуртской Республики (УР) по данным [1], а также используя расчеты по моделированию величины человеческого капитала [3].

По результатам решения задачи идентификации неизвестных параметров модели (1) — (8) по статистическим данным УР были получены следующие результаты: норма потребления $s_0 = 0,623$; производственная функция имеет вид $Y = F(K, H) = 0,93 K^{0,24} H^{0,76}$.

Рассмотрим результаты решения задачи оптимального управления при различных значениях темпов НТП и СОП

(см. таблицу 1): сценарий № 1 — $\kappa = 0,01$ и $\beta = 0,01$; сценарий № 2 — $\kappa = 0,05$ и $\beta = 0,01$; сценарий № 3 — $\kappa = 0,01$, $\beta = 0,05$; сценарий № 4 — $\kappa = 0$, $\beta = 0$. Сценарий № 4 — ситуация в отсутствие ускоренных темпов НТП и СОП (рассмотрена в работе [4]).

Расчеты показали, что ускоренное развитие в связи с НТП и СОП позволяет системе быстрее выйти на оптимальную траекторию. Так, если в обычном режиме система достигает ее за 8,54 лет, то при $\kappa = 0,01$ и $\beta = 0,01$ система выходит на оптимальную траекторию за 8,22 лет. Раньше всего (за 7,60 лет) система достигает траектории сбалансированного роста в случае, когда $\kappa = 0,05$ и $\beta = 0,01$. В случае, когда $\kappa = 0,01$, $\beta = 0,05$; выход на траекторию происходит позже на несколько месяцев.

Ускоренное развитие в связи с НТП и СОП приводит к увеличению удельных величин производственного и человеческого капитала (см. рисунки 1а, 1б). Так, если в обычном режиме (сценарий № 4) значение величины производственного капитала к 2021-му году составляет 272,07 тыс. руб/чел., то в случае сценария № 3 ($\kappa = 0,01$ и $\beta = 0,05$) величина производственного капитала достигает значения 345,70 тыс. руб/чел. (увеличение происходит в 1,27 раза). Для сценария № 1 ($\kappa = 0,01$ и $\beta = 0,01$) по сравнению с обычным режимом увеличение составит 1,07 раза, для сценария № 3 ($\kappa = 0,05$ и $\beta = 0,01$) — 1,18 раз.

Удельное значение величины человеческого капитала в случае темпов НТП и СОП (сценарии № № 1—3) выше, чем это значение в обычном режиме (сценарий № 4) на всем интервале 2012—2021 годы. К 2021-му году наибольшее увеличение человеческого капитала происходит в случае сценария № 2, когда $\kappa = 0,05$, $\beta = 0,01$; увеличение по сравнению со сценарием № 4 составит 1,32 раза.

На рисунке 1в, представлена динамика производительности труда. Наибольший рост позволяет осуществить сценарий № 2.

Как показывают расчеты, представленные в работе [4] для критериального функционала задачи оптимального управления (см. рисунок 1г) в случае обычного режима (сценарий № 4) оптимальное значение нормы потребления, при котором целевая функция максимальна, составляет величину $s_0 = 0,412$. Значение критериального функционала в этом случае 1 733,53 тыс. руб/чел. В случае сценария № 2 величина критериального функционала наибольшая и достигает значения 2 350,04 тыс. руб/чел. при $s_0 = 0,306$,

что в 1,36 раза выше, чем в случае сценария № 4. Сценарии № 1 и № 3 также дают увеличение рассматриваемого показателя по сравнению с обычным режимом.

Проведенные численные исследования показали, что увеличение темпов социально-образовательного и научно-технического прогресса в экономической системе приводит к существенному повышению ее эффективности.

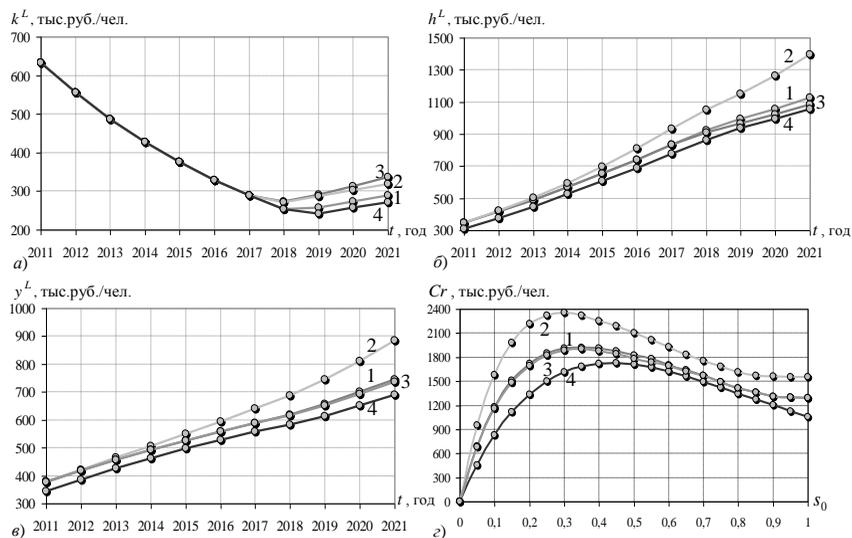


Рисунок 1. Динамика удельных величин экономических показателей региона: а) производственного капитала, б) человеческого капитала, в) производительности труда, г) зависимость накопленного потребления от нормы потребления; 1 — сценарий № 1; 2 — сценарий № 2; 3 — сценарий № 3; 4 — сценарий № 4

Список литературы:

1. Информационный сайт Госкомстата России. [Электронный ресурс] // Официальный сайт федеральной службы государственной статистики Российской Федерации — Режим доступа: <http://www.gks.ru> (дата обращения 15.04.2012).
2. Кетова К.В. Об одной задаче макроэкономической динамики региона с учетом факторов экономического развития // Вестник ИжГТУ. Ижевск: Изд-во ИжГТУ. — № 3(35), 2007. — С. 33—40.

3. Кетова К.В., Дерендяева Е.А. Изучение динамики человеческого капитала для регионов РФ в соответствии с рейтингом их социально-экономического положения // Современные проблемы науки и образования. Москва: Изд-во Академия Естествознания, 2011. — № 6 [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.science-education.ru/100-5227> (дата обращения 20.05.2012).
4. Кетова К.В., Дерендяева Е.А. Решение задачи оптимального управления региональной экономической системой // Вестник ИжГТУ. Ижевск: Изд-во ИжГТУ. — № 2(54), 2012. — С. 162—166.

НЕКООПЕРАТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА НЭША ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Конец Мирослав Михайлович

канд. физ.-мат. наук, доцент НТУУ «КПИ», г. Киев

E-mail: miroslav1941@windowslive.com

Введение

Некооперативной дифференциальной игрой называют математическую модель, в которой действующие стороны (игроки) до начала процесса игры не могут договариваться об используемых ими стратегиях. Другими словами, это означает, что игроки не имеют права создавать коалиции или координировать свои действия. Такие игры называют играми с ненулевой суммой. Обычно в формулировке некооперативной дифференциальной игры двух участников с ненулевой суммой присутствуют уравнение, описывающее динамику процесса, и соответствующие игрокам два функционала, определяющие выигрыши обеих игроков. Для систем со сосредоточенными параметрами такие задачи можно найти в [1, с. 421—423], [4, 5]. Игровые задачи для систем с распределенными параметрами рассмотрены, например в [3].

Постановка задачи

Пусть объект управления описывается следующей системой линейных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Bz}(t, x) + \mathbf{Cu}(t, x) + \mathbf{Dv}(t, x), \quad (1)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} — заданные матрицы размера $n \times n$; \mathbf{C} , \mathbf{D} — заданные матрицы размеров $n \times m_1$ и $n \times m_2$ соответственно, причем все эти четыре матрицы — постоянные (их элементами являются действительные числа). Переменная t , $t_0 \leq t \leq T$ ассоциируется со временем, переменная x , $0 \leq x \leq l$, является пространственной переменной, $l > 0$, $T > 0$ и $t_0 \geq 0$ — заданные действительные числа, $\mathbf{z}(t, x)$ — действительный n -мерный вектор-столбец, в дальнейшем называемый *состоянием* системы (3), действительные m_1 — мерный вектор — столбец $\mathbf{u}(t, x)$ и m_2 -мерный вектор-столбец $\mathbf{v}(t, x)$ называются *управлениями (стратегиями)*. Предполагается, что управления принадлежат классу кусочно-непрерывных вектор-функций. Для системы (1) задано начальное условие

$$\mathbf{z}(0, x) = \mathbf{z}_0(x) \quad (2)$$

и граничное условие

$$\mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{f}(t), \quad (3)$$

где n -мерные вектор-столбцы $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{z}_0(x)$ заданы. Рассмотрим следующие критерии оптимальности

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = & \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \mathbf{z}(T, x) dx + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F}_1 \mathbf{z}(t, x) + \right. \\ & \left. + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G}_{11} \mathbf{u}(t, x) + \mathbf{v}^*(t, x) \mathbf{H}_{12} \mathbf{v}(t, x) \right] dx dt \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = & \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_2 \mathbf{z}(T, x) dx + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F}_2 \mathbf{z}(t, x) + \right. \\ & \left. + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G}_{21} \mathbf{u}(t, x) + \mathbf{v}^*(t, x) \mathbf{H}_{22} \mathbf{v}(t, x) \right] dx dt \end{aligned} \quad (5)$$

где выражение $\mathbf{a}^* \mathbf{b}$ означает скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , т. е. $\mathbf{a}^* \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, \mathbf{G}_{11} и \mathbf{H}_{22} — заданные симметричные положительно определенные матрицы размеров $m_1 \times m_1$ и $m_2 \times m_2$ соответственно (следовательно, существуют матрицы \mathbf{G}_{11}^{-1} и \mathbf{H}_{22}^{-1}), \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 — заданные симметричные неотрицательно определенные матрицы размера $n \times n$, \mathbf{G}_{21} и \mathbf{H}_{12} — заданные симметричные неотрицательно определенные матрицы размеров $m_1 \times m_1$ и $m_2 \times m_2$ соответственно. Некооперативное равновесие по Нэшу — это пара таких стратегий $\mathbf{u}^0(t, x)$ и $\mathbf{v}^0(t, x)$, что ни один из игроков не меняет свою стратегию при заданной стратегии другого игрока. В результате имеют место следующие неравенства

$$I_1(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{z}) \geq I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}^0, \mathbf{z}) \text{ для всех возможных управлений } \mathbf{u}(t, x);$$

$$I_2(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{z}) \geq I_2(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}, \mathbf{z}) \text{ для всех возможных управлений } \mathbf{v}(t, x).$$

Последние соотношения позволяют применить метод множителей Лагранжа для нахождения оптимальных стратегий [2, с. 31].

Преобразование уравнения состояния и функционалов

Оптимальные управления $\mathbf{u}^0(t, x)$ и $\mathbf{v}^0(t, x)$ будем искать в следующем виде

$$\mathbf{u}(t, x) = -\mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x), \quad \mathbf{v}(t, x) = -\mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{z}(t, x), \quad (6)$$

где $\mathbf{R}_1(t, x)$ и $\mathbf{R}_2(t, x)$ — матричнозначные симметрические функции, подлежащие определению. Подставляя выражения (6) в уравнение (1), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + [\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x). \quad (7)$$

Дальше из соотношений (6) находим

$$\mathbf{u}^*(t, x) = -\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1}, \quad \mathbf{v}^*(t, x) = -\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1}. \quad (8)$$

Используя равенства (6) и (8), получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^*(t, x)\mathbf{G}_{11}\mathbf{u}(t, x) + \mathbf{v}^*(t, x)\mathbf{H}_{12}\mathbf{v}(t, x) = \\ & = \mathbf{z}^*(t, x)\left[\mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x)\right]\mathbf{z}(t, x), \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^*(t, x)\mathbf{G}_{21}\mathbf{u}(t, x) + \mathbf{v}^*(t, x)\mathbf{H}_{22}\mathbf{v}(t, x) = \\ & = \mathbf{z}^*(t, x)\left[\mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x)\right]\mathbf{z}(t, x). \quad (10) \end{aligned}$$

С помощью соотношений (9) и (10) функционалы (4) и (5) преобразуем так

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x)\mathbf{M}_1\mathbf{z}(T, x)dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x)\left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x)\right]\mathbf{z}(t, x) \right] dx dt \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x)\mathbf{M}_2\mathbf{z}(T, x)dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x)\left[\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x)\right]\mathbf{z}(t, x) \right] dx dt \quad (12) \end{aligned}$$

Таким способом управления $\mathbf{u}(t, x)$ и $\mathbf{v}(t, x)$ исключены из уравнения (1), а также из функционалов (4) и (5).

Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала (4)

Вместо функционала (11) рассмотрим следующий функционал

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{z}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x)\mathbf{M}_1\mathbf{z}(T, x)dx + \\ &+ \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{z}^*(t, x)\left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x)\right]\mathbf{z}(t, x) + \right. \\ &+ \mathbf{p}^*(t, x)\left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x)\right]\mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t}\right] \left. \right\} dx dt \quad (13) \end{aligned}$$

где $\mathbf{p}(t, x)$ — неизвестная вектор-функция. Она именуется множителем Лагранжа. Если выполняется равенство (7), то значения функционалов (11) и (13) равны. Далее найдем приращение $\Delta J_1 = J_1(\mathbf{z} + \varepsilon \delta \mathbf{z}, \mathbf{p} + \varepsilon \delta \mathbf{p}) - J_1(\mathbf{z}, \mathbf{p})$ функционала (13). Имеем

$$\begin{aligned}
\Delta J_1 &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(T, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}^*(T, x) \right] \mathbf{M}_1 \left[\mathbf{z}(T, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}(T, x) \right] dx + \\
&+ \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left[\mathbf{z}^*(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}^*(t, x) \right] \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \left[\mathbf{z}(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}(t, x) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[\mathbf{p}^*(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{p}^*(t, x) \right] \left[\mathbf{A} \left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \left[\mathbf{z}(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}(t, x) \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \right\} dx dt - \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \mathbf{z}(T, x) dx - \\
&- \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \right\} dx dt = \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{z}(T, x) + \delta \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \mathbf{z}(T, x) \right] dx + \\
&+ \varepsilon \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left[\mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}^*(t, x) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \delta \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \right\} dx dt + \\
&+ \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \delta \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{z}(T, x) dx + \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \delta \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \delta \mathbf{z}(t, x) + \delta \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \Bigg\} dx dt \Bigg\}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Имеем $\delta \mathbf{z}(t_0, x) = \mathbf{z}_0(x) - \mathbf{z}_0(x) = \mathbf{0}$, $\delta \mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$. Полагаем также, что $\mathbf{p}(t, 0) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{p}(t, l) = \mathbf{0}$. Очевидно, справедливы следующие соотношения

$$\mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{z}(T, x) + \delta \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \mathbf{z}(T, x) = 2 \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{z}(T, x), \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x) + \\
& + \delta \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}^*(t, x) = \\
& = 2 \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x), \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \int_0^T \mathbf{p}^*(t, x) \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} dx dt = \int_0^l \mathbf{p}^*(T, x) \delta \mathbf{z}(T, x) dx - \int_0^l \mathbf{p}^*(t_0, x) \delta \mathbf{z}(t_0, x) dx - \\
& - \int_0^l \int_0^T \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial t} \delta \mathbf{z}(t, x) dx dt = \int_0^l \mathbf{p}^*(T, x) \delta \mathbf{z}(T, x) dx - \int_0^l \int_0^T \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial t} \delta \mathbf{z}(t, x) dx dt, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \int_0^T \mathbf{p}^*(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} dx dt = \int_0^T \mathbf{p}^*(t, l) \mathbf{A} \delta \mathbf{z}(t, l) dt - \int_0^T \mathbf{p}^*(t, 0) \mathbf{A} \delta \mathbf{z}(t, 0) dt - \\
& - \int_0^l \int_0^T \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} \delta \mathbf{z}(t, x) dx dt = - \int_0^l \int_0^T \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} \delta \mathbf{z}(t, x) dx dt, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x). \quad (19)$$

С учетом соотношений (15) — (19) равенство (14) примет вид

$$\begin{aligned}
\Delta J_1 = & \varepsilon \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 - \mathbf{p}^*(T, x) \right] \delta \mathbf{z}(T, x) dx + \\
& + \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] + \right. \\
& + \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] - \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial t} \left. \right] \delta \mathbf{z}(t, x) + \\
& + \delta \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] dx dt \left. \right\} + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \delta \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x) dx dt
\end{aligned} \tag{20}$$

Равенство нулю первой вариации функционала (13) — это необходимое условие его экстремума. Оно будет выполнено, если коэффициенты при $\delta \mathbf{z}(T, x)$, $\delta \mathbf{z}(t, x)$ и $\delta \mathbf{p}(t, x)$ одновременно равны нулю. Поэтому из соотношения (20) имеем следующие равенства

$$\mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 - \mathbf{p}^*(T, x) = \mathbf{0}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] + \\
& + \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] - \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial t} = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{0}. \tag{23}$$

Поскольку раньше было сделано предположение, что $\mathbf{p}(t, 0) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{p}(t, l) = \mathbf{0}$, то окончательно система уравнений Эйлера-Лагранжа для функционала (11) выглядит так

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + [\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x), \\ \mathbf{z}(0, x) = \mathbf{z}_0(x), \mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{f}(t), \\ \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial x} - [\mathbf{B}^* - \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* - \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*] \mathbf{p}(t, x) - \\ - [\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x), \\ \mathbf{p}(t, 0) = \mathbf{0}, \mathbf{p}(t, l) = \mathbf{0}, \mathbf{p}(T, x) = \mathbf{M}_1 \mathbf{z}(T, x). \end{array} \right. \quad (24)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала (5)

Аналогично вместо функционала (12) рассмотрим следующий функционал

$$\begin{aligned} J_2(\mathbf{z}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_2 \mathbf{z}(T, x) dx + \\ &+ \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x) + \right. \\ &\left. + \mathbf{q}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + [\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \right\} dx dt \end{aligned} \quad (25)$$

где $\mathbf{q}(t, x)$ — также множитель Лагранжа. Если выполняется равенство (7), то значения функционалов (12) и (25) равны. Для нахождения приращения $\Delta J_2 = J_2(\mathbf{z} + \varepsilon \delta \mathbf{z}, \mathbf{q} + \varepsilon \delta \mathbf{q}) - J_2(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ функционала (25) имеем такое выражение

$$\begin{aligned} \Delta J_2 &= \frac{1}{2} \int_0^l [\mathbf{z}^*(T, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}^*(T, x)] \mathbf{M}_2 [\mathbf{z}(T, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}(T, x)] dx + \\ &+ \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{z}^*(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}^*(t, x)] [\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \right. \\ &\left. + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] [\mathbf{z}(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}(t, x)] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\mathbf{q}^*(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{q}^*(t, x) \right] \left[\mathbf{A} \left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} \right] + \right. \\
& + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \left[\mathbf{z}(t, x) + \varepsilon \delta \mathbf{z}(t, x) \right] - \\
& \left. - \left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \right] dx dt - \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_2 \mathbf{z}(T, x) dx - \\
& - \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) + \right. \\
& + \mathbf{q}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \left. \right\} dx dt = \\
& = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{z}(T, x) + \delta \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_2 \mathbf{z}(T, x) \right] dx + \\
& + \varepsilon \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left[\mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x) + \right. \right. \\
& + \delta \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) \left. \right] + \\
& + \mathbf{q}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] + \\
& + \delta \mathbf{q}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \left. \right\} dx dt + \\
& + \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \delta \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{z}(T, x) dx + \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \delta \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \right. \right. \\
& + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \left. \right] \delta \mathbf{z}(t, x) + \delta \mathbf{q}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \right. \\
& + \left. \left[\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \left. \right\} dx dt \left. \right\}. \quad (26)
\end{aligned}$$

Снова вспоминаем, что $\delta\mathbf{z}(t_0, x) = \mathbf{z}_0(x) - \mathbf{z}_0(x) = \mathbf{0}$, $\delta\mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$, и полагаем также, что $\mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{q}(t, l) = \mathbf{0}$. Тогда справедливы следующие соотношения

$$\mathbf{z}^*(T, x)\mathbf{M}_2\delta\mathbf{z}(T, x) + \delta\mathbf{z}^*(T, x)\mathbf{M}_2\mathbf{z}(T, x) = 2\mathbf{z}^*(T, x)\mathbf{M}_2\delta\mathbf{z}(T, x), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^*(t, x) & \left[\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta\mathbf{z}(t, x) + \\ & + \delta\mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) = \\ & = 2\mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta\mathbf{z}(t, x), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_{t_0}^T \mathbf{q}^*(t, x) \frac{\partial \delta\mathbf{z}(t, x)}{\partial t} dx dt & = \int_0^l \mathbf{q}^*(T, x) \delta\mathbf{z}(T, x) dx - \int_0^l \mathbf{q}^*(t_0, x) \delta\mathbf{z}(t_0, x) dx - \\ - \int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial \mathbf{q}^*(t, x)}{\partial t} \delta\mathbf{z}(t, x) dx dt & = \int_0^l \mathbf{q}^*(T, x) \delta\mathbf{z}(T, x) dx - \int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial \mathbf{q}^*(t, x)}{\partial t} \delta\mathbf{z}(t, x) dx dt \end{aligned} \quad (29)$$

$$\int_0^l \int_{t_0}^T \mathbf{q}^*(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \delta\mathbf{z}(t, x)}{\partial x} dx dt = \int_{t_0}^T \mathbf{q}^*(t, l) \mathbf{A} \delta\mathbf{z}(t, l) dt - \int_{t_0}^T \mathbf{q}^*(t, 0) \mathbf{A} \delta\mathbf{z}(t, 0) dt -$$

$$- \int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial \mathbf{q}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} \delta\mathbf{z}(t, x) dx dt = - \int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial \mathbf{q}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} \delta\mathbf{z}(t, x) dx dt \quad (30)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \delta\mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \left[\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x) \right] \delta\mathbf{z}(t, x) \quad (31)$$

С учетом соотношений (27) — (31) выражение (26) примет вид

$$\begin{aligned}
\Delta J_2 = \varepsilon & \left\{ \int_0^l [\mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_2 - \mathbf{q}^*(T, x)] \delta \mathbf{z}(T, x) dx + \right. \\
& + \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] + \right. \\
& + \mathbf{q}^*(t, x) [\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] - \frac{\partial \mathbf{q}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{q}^*(t, x)}{\partial t} \Big] \delta \mathbf{z}(t, x) + \\
& + \delta \mathbf{q}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + [\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] dx dt \Big\} + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \delta \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \delta \mathbf{z}(t, x) dx dt
\end{aligned} \tag{32}$$

Равенство нулю первой вариации функционала (25) — необходимое условие его экстремума. Оно будет выполнено, если коэффициенты при $\delta \mathbf{z}(T, x)$, $\delta \mathbf{z}(t, x)$ и $\delta \mathbf{q}(t, x)$ одновременно равны нулю. Поэтому из соотношения (32) имеем такие равенства

$$\mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_2 - \mathbf{q}^*(T, x) = \mathbf{0}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] + \\
& + \mathbf{q}^*(t, x) [\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] - \frac{\partial \mathbf{q}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{q}^*(t, x)}{\partial t} = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + [\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{0}. \tag{35}$$

Поскольку раньше было сделано предположение, что $\mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{q}(t, l) = \mathbf{0}$, то окончательно система уравнений Эйлера-Лагранжа для функционала (12) выглядит так

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + [\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x), \\ \mathbf{z}(0, x) = \mathbf{z}_0(x), \mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{f}(t), \\ \frac{\partial \mathbf{q}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{q}(t, x)}{\partial x} - [\mathbf{B}^* - \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* - \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*] \mathbf{q}(t, x) - \\ - [\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x), \\ \mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{0}, \mathbf{q}(t, l) = \mathbf{0}, \mathbf{q}(T, x) = \mathbf{M}_2 \mathbf{z}(T, x). \end{array} \right. \quad (36)$$

Вывод системы матричных уравнений Риккати с частными производными

На основании равенства $\mathbf{p}(T, x) = \mathbf{M}_1 \mathbf{z}(T, x)$ считаем, что существует такая зависимость

$$\mathbf{p}(t, x) = \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x). \quad (37)$$

Из (37) непосредственно находим

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t}. \quad (38)$$

Если теперь принять во внимание первое уравнение системы (24), то из (38) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} &= \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \\ &+ \left[\frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x). \end{aligned} \quad (39)$$

Далше используя уравнение для $\frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t}$ из системы (24) и очевидное равенство $\frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} &= \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} - \\ &- \left[\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) - \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} \right] \mathbf{z}(t, x) - \\ &- \left[\mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x). \end{aligned} \quad (40)$$

Сопоставляя равенства (39) и (40), приходим к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} &= \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) + \\ &+ \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}_1, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) = \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{A}. \quad (42)$$

При этом необходимо также учесть следующие дополнительные условия

$$\mathbf{R}_1(T, x) = \mathbf{M}_1, \quad \mathbf{R}_1(t, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_1(t, l) = \mathbf{0}, \quad (43)$$

которые соответственно являются следствиями равенств $\mathbf{p}(T, x) = \mathbf{M}_1 \mathbf{z}(T, x)$, $\mathbf{p}(t, 0) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{p}(t, l) = \mathbf{0}$. Аналогично, исходя из соотношения $\mathbf{q}(t, x) = \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{z}(t, x)$, для функции $\mathbf{R}_2(t, x)$ получим такие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_2(t, x)}{\partial t} = & \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_2(t, x)}{\partial x} + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_2(t, x) + \\ & + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}_2(t, x) - \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}_2. \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathbf{A}^* \mathbf{R}_2(t, x) = \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{A}. \quad (45)$$

Функция $\mathbf{R}_2(t, x)$ удовлетворяет также следующим дополнительным условиям

$$\mathbf{R}_2(T, x) = \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{R}_2(t, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_2(t, l) = \mathbf{0}. \quad (46)$$

Для удобства представим соотношения (41) — (46) в форме одной системы равенств

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} = & \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) + \\ & + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}_1, \\ \frac{\partial \mathbf{R}_2(t, x)}{\partial t} = & \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_2(t, x)}{\partial x} + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_2(t, x) + \\ & + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{R}_2(t, x) - \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}_2 \\ & \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) = \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^* \mathbf{R}_2(t, x) = \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{A}, \\ \mathbf{R}_1(T, x) = & \mathbf{M}_1, \quad \mathbf{R}_2(T, x) = \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{R}_1(t, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_1(t, l) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_2(t, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_2(t, l) = \mathbf{0}. \end{aligned} \right. \quad (47)$$

Подытоживая все вышеизложенное при условии существования оптимальных стратегий $\mathbf{u}^0(t, x)$ и $\mathbf{v}^0(t, x)$, можно сформулировать следующие утверждения.

Теорема 1. Матричнозначные функции $\mathbf{R}_1(t, x)$ и $\mathbf{R}_2(t, x)$ удовлетворяют системе соотношений (47).

Теорема 2. Оптимальная стратегия $\mathbf{u}^0(t, x)$ имеет вид $\mathbf{u}^0(t, x) = -\mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x)$, где функция $\mathbf{z}(t, x)$ является решением уравнения (7), удовлетворяет условиям (2) и (3), а матричнозначные функции $\mathbf{R}_1(t, x)$ и $\mathbf{R}_2(t, x)$ определяются из системы (47).

Теорема 3. Оптимальная стратегия $\mathbf{v}^0(t, x)$ имеет вид $\mathbf{v}^0(t, x) = -\mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{z}(t, x)$, где функция $\mathbf{z}(t, x)$, матричнозначные функции $\mathbf{R}_1(t, x)$ и $\mathbf{R}_2(t, x)$ такие же, как и в теореме 2.

Вычисление минимальных значений функционалов (4) и (5)

Функционал (4) можно преобразовать следующим образом. Имеет место такое равенство

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x)] dx dt &= \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{R}_1(T, x) \mathbf{z}(T, x) dx - \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_1(t_0, x) \mathbf{z}(t_0, x) dx = \\ &= \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \mathbf{z}(T, x) dx - \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_1(t_0, x) \mathbf{z}(t_0, x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно находим

$$\int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M}_1 \mathbf{z}(T, x) dx = \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_1(t_0, x) \mathbf{z}(t_0, x) dx + \int_0^l \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x)] dx dt$$

Это означает, что функционал (4) будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_1(t_0, x) \mathbf{z}(t_0, x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F}_1 \mathbf{z}(t, x) + \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x)] + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G}_{11} \mathbf{u}(t, x) + \mathbf{v}^*(t, x) \mathbf{H}_{12} \mathbf{v}(t, x)] dx dt \end{aligned} \quad (48)$$

Поскольку имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x)] = \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t}$$

то функционал (48) можно переписать так

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_1(t_0, x) \mathbf{z}(t_0, x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F}_1 \mathbf{z}(t, x) + \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} \mathbf{z}(t, x) + \\ &+ \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G}_{11} \mathbf{u}(t, x) + \mathbf{v}^*(t, x) \mathbf{H}_{12} \mathbf{v}(t, x)] dx dt. \end{aligned} \quad (49)$$

Из равенства

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + [\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_2(t, x)]\mathbf{z}(t, x)$$

имеем

$$\frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* + \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{B}^* - \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* - \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^*]$$

Дальше получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{z}(t, x) &= \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{z}(t, x) + \\ + \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x)] \mathbf{z}(t, x), \\ \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} &= \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \\ + \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{B} - \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x). \end{aligned}$$

Принимая во внимание эти соотношения и равенство (9), функционал (49) будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_1(t_0, x)\mathbf{z}(t_0, x) dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F}_1 \mathbf{z}(t, x) + \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \\ + \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x)] \mathbf{z}(t, x) + \\ + \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{B} - \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x) + \\ + \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{R}_1(t, x)\mathbf{C}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x)] \mathbf{z}(t, x)] dx dt. \end{aligned} \quad (50)$$

Дальше используем формулу для нахождения производной произведения трех сомножителей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x) \right] &= \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x) + \\ &+ \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Поскольку выполняется соотношение $\mathbf{R}_1(t, l) = \mathbf{0}$ и согласно формуле Ньютона-Лейбница справедливо равенство

$$\int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x) \right] dx dt = \int_{t_0}^T \mathbf{z}^*(t, l) \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, l) \mathbf{z}(t, l) dt - \int_{t_0}^T \mathbf{z}^*(t, 0) \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, 0) \mathbf{z}(t, 0) dt = \mathbf{0}$$

то имеет место следующее равенство

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x) dx dt &= \int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{z}(t, x) \right] dx dt - \\ &- \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} \right] dx dt = \\ &= - \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} \right] dx dt. \end{aligned}$$

Тогда выражение (50) можно преобразовать так

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_1(t_0, x) \mathbf{z}(t_0, x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F}_1 \mathbf{z}(t, x) - \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} \mathbf{z}(t, x) - \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{z}^*(t, x) \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \right. \\ &+ \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) + \\ &\quad \left. + \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) \right] dx dt. \quad (51) \end{aligned}$$

После группирования в (51) получим

$$\begin{aligned}
I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = & \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_1(t_0, x) \mathbf{z}(t_0, x) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{F}_1 - \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} + \mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \right. \right. \\
& - \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) + \\
& \left. \left. + \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}_{11}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) + \mathbf{R}_2(t, x) \mathbf{D} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_2(t, x) \right] \mathbf{z}(t, x) + \right. \\
& \left. + \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{A} - \mathbf{A}^* \mathbf{R}_1(t, x) \right] \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} \right] dx dt.
\end{aligned}$$

Если теперь принять во внимание систему уравнений (47), то окончательно получим

$$I_1^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_1(t_0, x) \mathbf{z}(t_0, x) dx. \quad (52)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Минимальное значение функционала (4) можно вычислить по формуле (52), где матричнозначная функция $\mathbf{R}_1(t, x)$ является решением системы уравнений (47), а функция $\mathbf{z}(t, x)$ удовлетворяет уравнению (7) и дополнительным условиям (2) — (3).

Аналогично можно получить следующее соотношение

$$I_2^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{R}_2(t_0, x) \mathbf{z}(t_0, x) dx. \quad (53)$$

Теорема 5. Минимальное значение функционала (5) можно вычислить по формуле (53), где матричнозначная функция $\mathbf{R}_2(t, x)$ удовлетворяет системе уравнений (47), а функция $\mathbf{z}(t, x)$ такая же, как и в теореме 4.

Список литературы:

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002. — 576 с.
2. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. — 480 с.
3. Aihara S.I., Bagchi A. Linear-quadratic stochastic differential games for distributed parameter systems. // Comput. Math. Appl., Vol. 13, No 1—3, pp. 247—259, 1987.
4. Basar T., Olsder G.J. Dynamic Noncooperative Game Theory. Academic Press, London — New York, 1982. — 430 p.
5. Starr A.W., Ho Y.C. Nonzero-sum differential games. // J. Opt. Theory and Appl., Vol. 3, No 3, pp. 184—206, 1969.

СВОЙСТВА СИНГУЛЯРНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Конец Мирослав Михайлович

канд. физ.-мат. наук, доцент НТУУ «КПИИ», г. Киев

E-mail: miroslav1941@windowslive.com

Введение

Обычно сингулярная система линейных уравнений с частными производными имеет следующий вид

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Bz}(t, x), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — заданные постоянные матрицы размера $n \times n$, $\mathbf{z}(t, x)$ — искомая $n \times 1$ вектор — функция, причем $\det \mathbf{C} = 0$, то есть матрица \mathbf{C} является вырожденной; переменная t ассоциируется со временем, x — пространственная переменная, $t_0 \geq 0$, $T > t_0$, $l > 0$ — заданные действительные числа, $\mathbf{z}(t, x)$ — n -мерный действительный вектор-столбец, в дальнейшем называемый *состоянием* системы (1). Такие системы называют по-разному: алгебро-дифференциальные системы; вырожденные системы; дифференциально-алгебраические системы; системы не типа Коши-

Ковалевской; системы, не разрешенные относительно производных; дескрипторные системы; сингулярные системы; системы с вырождением. Однако независимо от названия всех их объединяет одно общее свойство: матрица \mathbf{C} — вырожденная ($\det \mathbf{C} = 0$). Возможны также случаи, когда обе матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C} — вырожденные. Сингулярным системам со сосредоточенными параметрами посвящены, например, работы [6—8]. Там же можно найти обширную библиографию по данному вопросу. Сингулярные системы с распределенными параметрами менее исследованы. В частности, такие системы изучались в работах [1—2]. В качестве простого иллюстративного примера, который приводит к сингулярной системе (1), можно рассмотреть телеграфное уравнение [5, с. 215]:

$$\frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} + a \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} + bz(t, x). \quad (2)$$

С помощью введения новых переменных:

$$\begin{cases} z_1(t, x) = z(t, x) \\ z_2(t, x) = \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} \\ z_3(t, x) = \frac{\partial z(t, x)}{\partial x} \end{cases}$$

уравнение (2) можно свести к следующей системе трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(t, x)}{\partial t} = z_2(t, x), \\ \frac{\partial z_2(t, x)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial z_3(t, x)}{\partial x} + bz_1(t, x) + az_2(t, x), \\ 0 = \frac{\partial z_1(t, x)}{\partial x} - z_3(t, x), \end{cases}$$

где матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} соответственно равны:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

К сингулярным системам относят также и такие системы вида (1), когда все три матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — прямоугольные матрицы одинакового размера.

Вспомогательные сведения

Пусть объект управления описывается следующей системой линейных уравнений с частными производными

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Bz}(t, x) + \mathbf{Du}(t, x), \quad (3)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — заданные матрицы размера $n \times n$, \mathbf{D} — заданная матрица размера $n \times m$, причем все эти четыре матрицы — постоянные (их элементами являются действительные числа) и $\det \mathbf{C} = 0$. Переменная t , $t_0 \leq t \leq T$ ассоциируется со временем, переменная x , $0 \leq x \leq l$, является пространственной переменной, $l > 0$, $T > 0$ и $t_0 \geq 0$ — заданные действительные числа, $\mathbf{z}(t, x)$ — действительный n -мерный вектор-столбец, в дальнейшем называемый *состоянием* системы (3), действительный m -мерный вектор-столбец $\mathbf{u}(t, x)$ называется *управлением*. Предполагается, что управления принадлежат классу кусочно-непрерывных вектор-функций. Для системы (3) задано начальное условие

$$\mathbf{z}(t_0, x) = \mathbf{z}_0(x) \quad (4)$$

и граничное условие

$$\mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{f}(t). \quad (5)$$

Действительные n -мерные вектор-столбцы $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{z}_0(x)$ известны. Считаем, что для каждого заданного управления $\mathbf{u}(t, x)$ система уравнений (3) имеет единственное решение, которое удовлетворяет условиям (4) и (5).

Рассмотрим следующий критерий оптимальности

$$I(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \mathbf{u}(t, x)] dx dt + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} \mathbf{z}(T, x) dx, \quad (6)$$

где выражение $\mathbf{a}^* \mathbf{b}$ означает скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , то есть $\mathbf{a}^* \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, \mathbf{G} — заданная симметричная

положительно определенная матрица размера $m \times m$ (следовательно, существует матрица \mathbf{G}^{-1}), \mathbf{F} и \mathbf{M} также известные симметричные неотрицательно определенная матрицы размера $n \times n$. *Задача оптимального управления объектом, описываемым системой соотношений (3) — (5), состоит в определении такого управления $\mathbf{u}^0(t, x)$, при котором функционал (6) принимает наименьшее значение. Если такое управление $\mathbf{u}^0(t, x)$ существует, то оно называется оптимальным управлением.*

Как правило, для нахождения решения задач оптимального управления системами как и со сосредоточенными параметрами, так и с распределенными параметрами, используется *принцип максимума Л.С. Понтрягина* [4, с. 183] или *метод динамического программирования Беллмана* [4, с. 291]. Оба этих метода предполагают, что система дифференциальных уравнений, которая описывает поведение объекта управления, разрешена относительно производных по времени. В случае сингулярных систем такой возможности нет. Однако можно воспользоваться *методом множителей Лагранжа* [4, с. 31]. Сущность метода состоит в том, что вместо функционала (6) рассматривается следующий функционал

$$J(\mathbf{z}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \mathbf{u}(t, x)] + \right. \\ \left. + \mathbf{p}^*(x, t) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(x, t)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{z}(x, t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(x, t) - \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(x, t)}{\partial t} \right] \right\} dx dt + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{M} \mathbf{z}(t, x) dx, \quad (7)$$

где $\mathbf{p}(t, x)$ — неизвестная $n \times 1$ вектор-функция. Очевидно, что при выполнении соотношения (3) значения функционалов (6) и (7) совпадают. Поэтому задача на условный экстремум для функционала (6) сводится к задаче на безусловный экстремум для функционала (7). Далее находим выражение для приращения ΔJ функционала (7).

$$\Delta J = J(\mathbf{z} + \varepsilon \delta \mathbf{z}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \varepsilon \delta \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x} + \varepsilon \delta \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}, \mathbf{p} + \varepsilon \delta \mathbf{p}, \mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) - J(\mathbf{z}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}).$$

После несложных преобразований находим для ΔJ следующую формулу (см. [3])

$$\begin{aligned} \Delta J = & \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} - \frac{\partial \mathbf{p}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} + \mathbf{p}^*(t, x) \mathbf{B} + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \right] \delta \mathbf{z}(t, x) + \right. \\ & \left. + [\mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} - \mathbf{p}^*(t, x) \mathbf{D}] \delta \mathbf{u}(t, x) + \right. \\ & \left. + \delta \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t, x) - \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] dx dt \right\} + \\ & \left. + \int_0^l [\mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} + \mathbf{p}^*(T, x) \mathbf{C}] \delta \mathbf{z}(T, x) dx \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\frac{1}{2} [\delta \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \delta \mathbf{z}(t, x) + \delta \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \delta \mathbf{u}(t, x)] + \right. \right. \\ & \left. + \delta \mathbf{p}^*(t, x) \left[\mathbf{A} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D} \delta \mathbf{u}(t, x) - \mathbf{C} \frac{\partial \delta \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} \right] \right\} dx dt + \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^l \delta \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} \delta \mathbf{z}(T, x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученное выражение для ΔJ дает возможность сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. Единственное оптимальное управление $\mathbf{u}^0(t, x)$, которое реализует минимум функционала (6), определяется из таких соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Bz}(t, x) + \mathbf{Du}(t, x), \\ \mathbf{z}(t_0, x) = \mathbf{z}_0(x), \mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}^* \mathbf{p}(t, x) - \mathbf{Fz}(t, x), \\ \mathbf{C}^* \mathbf{p}(T, x) = \mathbf{Mz}(T, x), \mathbf{p}(t, 0) = \mathbf{p}(t, l) = 0, \\ \mathbf{Gu}(t, x) + \mathbf{D}^* \mathbf{p}(t, x) = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (9)$$

Доказательство этого утверждения приведено в работе [3]. Исходя из системы уравнений (9) и соотношения $\mathbf{p}(t, x) = \mathbf{R}(t, x) \mathbf{Cz}(t, x)$ можно получить следующие уравнения:

$$\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}, \quad (10)$$

$$\mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}, \quad (11)$$

$$\mathbf{C}^* \mathbf{R}(T, x) \mathbf{C} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{R}(t, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}(t, l) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

где $\mathbf{R}(t, x)$ — неизвестная матричнозначная функция. Уравнение типа (10) будем называть *сингулярным матричным дифференциальным уравнение Риккати с частными производными*.

Свойства сингулярного матричного уравнения Риккати с частными производными

Применяя к равенству (10) операцию транспонирования, приходим к такому соотношению

$$\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}^*(t, x) \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{R}^*(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}^*(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}^*(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}. \quad (13)$$

Условия (11) и (12) после транспонирования соответственно примут вид

$$\mathbf{C}^* \mathbf{R}^*(t, x) \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \mathbf{R}^*(t, x) \mathbf{C}, \quad (14)$$

$$\mathbf{C}^* \mathbf{R}^*(T, x) \mathbf{C} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{R}^*(t, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}^*(t, l) = \mathbf{0}. \quad (15)$$

Кроме того, из равенства (14) имеем

$$\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{C}. \quad (16)$$

Таким образом, обе функции $\mathbf{R}(t, x)$ и $\mathbf{R}^*(t, x)$ являются решениями одного и того же уравнения (10) и удовлетворяют одним тем же условиям (11) и (12). Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если задача (10) — (12) имеет единственное решение, то справедливо равенство $\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{R}^*(t, x)$, то есть для каждой упорядоченной пары (t, x) , где $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$, решение $\mathbf{R}(t, x)$ есть симметрической матрицей порядка $n \times n$.

Теорема 3. Если $\mathbf{R}(t, x)$ — решение задачи (10) — (12), то имеет место соотношение

$$\mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} = \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x), \quad (17)$$

где функции $\mathbf{P}(t, x)$ и $\mathbf{S}(t, x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x), \\ \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{F} \mathbf{S}(t, x). \end{cases} \quad (18)$$

и дополнительным условиям

$$\mathbf{S}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) = \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{A} \mathbf{S}(t, x), \quad \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) = \mathbf{M} \mathbf{S}(t, x), \quad (19)$$

при условии, что матричнозначная функция $\mathbf{S}^{-1}(t, x)$ существует. Также выполняются равенства $\mathbf{P}(t, 0) \mathbf{S}^{-1}(t, 0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}(t, l) \mathbf{S}^{-1}(t, l) = \mathbf{0}$.

Доказательство. Предположим, что существует матрица $\mathbf{S}^{-1}(t, x)$ и имеет место следующая зависимость

$$\mathbf{R}(t, x)\mathbf{C} = \mathbf{P}(t, x)\mathbf{S}^{-1}(t, x), \quad (20)$$

где $\mathbf{P}(t, x)$ и $\mathbf{S}(t, x)$ — неизвестные пока функции. Выполнив в равенстве (20) операцию транспонирования, получим

$$\mathbf{C}^*\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{S}^{*-1}(t, x)\mathbf{P}^*(t, x). \quad (21)$$

Далее рассмотрим очевидное тождество

$$\mathbf{C}^*\mathbf{R}(t, x)\mathbf{C} = \mathbf{C}^*\mathbf{R}(t, x)\mathbf{C}. \quad (22)$$

Подставляя в левую часть (22) значение $\mathbf{R}(t, x)\mathbf{C}$ из (20), а в правую часть $\mathbf{C}^*\mathbf{R}(t, x)$ из (22), получаем следующее соотношение

$$\mathbf{C}^*\mathbf{P}(t, x)\mathbf{S}^{-1}(t, x) = \mathbf{S}^{*-1}(t, x)\mathbf{P}^*(t, x)\mathbf{C}, \quad (23)$$

которое в дальнейшем будет использовано.

Из соотношения (20) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \mathbf{S}^{-1}(t, x) - \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} \mathbf{S}^{-1}(t, x) \quad (24)$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \mathbf{S}^{-1}(t, x) - \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} \mathbf{S}^{-1}(t, x). \quad (25)$$

Подставляя (20), (21), (24) и (25) в уравнение (10), получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \mathbf{S}^{-1}(t, x) - \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} \mathbf{S}^{-1}(t, x) = \\ & = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \mathbf{S}^{-1}(t, x) - \mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} \mathbf{S}^{-1}(t, x) + \\ & + \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) - \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (26)$$

После умножения равенства (26) справа на матрицу $\mathbf{S}(t, x)$,
имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} - \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} + \\ + \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x) - \mathbf{F} \mathbf{S}(t, x). \end{aligned} \quad (27)$$

Если теперь предположить, что выполняется соотношение

$$\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{F} \mathbf{S}(t, x), \quad (28)$$

то равенство (27) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} - \\ - \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x). \end{aligned} \quad (29)$$

Теперь, принимая во внимание соотношения (11), (20) и (21),
получим

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) = \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{A}.$$

С учетом этого равенства и соотношения (23) уравнение (29)
можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} - \\ - \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x) \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \left[\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} - \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x) \right] = \mathbf{0}.$$

Последнее соотношение будет выполнено, если имеет место
равенство

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x). \quad (30)$$

Таким образом, объединяя соотношения (28) и (30), в результате получаем следующую систему матричных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{S}(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x), \\ \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) - \mathbf{F} \mathbf{S}(t, x). \end{cases} \quad (31)$$

Условие (11) приводит к такому равенству

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) = \mathbf{S}^{*-1}(t, x) \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{A}.$$

Если это равенство умножить слева на матрицу $\mathbf{S}^*(t, x)$ и справа на матрицу $\mathbf{S}(t, x)$, то в результате получим

$$\mathbf{S}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) = \mathbf{P}^*(t, x) \mathbf{A} \mathbf{S}(t, x).$$

Из равенства $\mathbf{C}^* \mathbf{R}(T, x) \mathbf{C} = \mathbf{M}$ имеем $\mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x) = \mathbf{M}$ или $\mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) = \mathbf{M} \mathbf{S}(t, x)$. Из условий $\mathbf{R}(t, 0) = \mathbf{R}(t, l) = \mathbf{0}$ и равенства $\mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} = \mathbf{P}(t, x) \mathbf{S}^{-1}(t, x)$ получаем $\mathbf{P}(t, 0) \mathbf{S}^{-1}(t, 0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}(t, l) \mathbf{S}^{-1}(t, l) = \mathbf{0}$.

Теорема 4. Если рассмотреть блочную матрицу \mathbf{H} размера $2n \times 4n$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & -\mathbf{B}^* & \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{bmatrix}, \quad (32)$$

то систему уравнений (31) можно записать в таком виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial t} \\ \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(t, x) \\ \mathbf{P}(t, x) \\ \frac{\partial \mathbf{S}(t, x)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

где $\mathbf{0}$ — квадратная матрица размера $n \times n$, все элементы которой равны нулю.

Доказательство. Действительно, путем непосредственного вычисления находим

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(t,x) \\ \mathbf{p}(t,x) \\ \frac{\partial \mathbf{s}(t,x)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{p}(t,x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & -\mathbf{B}^* & \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(t,x) \\ \mathbf{p}(t,x) \\ \frac{\partial \mathbf{s}(t,x)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{p}(t,x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{s}(t,x) - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{p}(t,x) + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{s}(t,x)}{\partial x} \\ -\mathbf{F}\mathbf{s}(t,x) - \mathbf{B}^*\mathbf{p}(t,x) + \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{p}(t,x)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Подобным образом устанавливается и следующее утверждение.

Теорема 5. С помощью матрицы (32) систему уравнений (10) — (11) можно записать в блочной форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial t} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}^*\mathbf{R}(t,x) & \mathbf{0} & \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{C}^*\mathbf{R}(t,x) \end{bmatrix} \mathbf{H}^* \begin{bmatrix} -\mathbf{R}(t,x)\mathbf{C} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размера $n \times n$, $\mathbf{0}$ — квадратная матрица размера $n \times n$, все элементы которой равны нулю.

Доказательство. В самом деле, имеем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}^*\mathbf{R}(t,x) & \mathbf{0} & \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{C}^*\mathbf{R}(t,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^* & -\mathbf{B} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{R}(t,x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^* & -\mathbf{F} - \mathbf{C}^*\mathbf{R}(t,x)\mathbf{B} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{C}^*\mathbf{R}(t,x)\mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

Дальше находим

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* & -\mathbf{F} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{F} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} &= -\mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{F} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} \\ & \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}, \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C}$. Это означает, что равенство (34) доказано.

Теорема 6. Пусть функция $\mathbf{R}_1(t, x)$ — частное решение уравнений (10) — (12). Если $\mathbf{R}(t, x)$ — некоторое другое решение задачи (10) — (12), отличное от $\mathbf{R}_1(t, x)$, то функция $\mathbf{P}(t, x) = \mathbf{R}(t, x) - \mathbf{R}_1(t, x)$ является решением матричного уравнения Бернулли с частными производными

$$\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{B}_1^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{B}_1, \quad (35)$$

где $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C}$, $\mathbf{B}_1^* = \mathbf{B}^* - \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^*$. При этом выполняются равенства $\mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{A}$, $\mathbf{P}(t, 0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}(t, l) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{C}^* \mathbf{P}(T, x) \mathbf{C} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Из равенства $\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x)$ непосредственно имеем $\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x}$. Подставляя эти выражения в уравнение (10), получим:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} + \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} + \\
& + \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} + \\
& + \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} - \\
& - \mathbf{B}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}. \quad (36)
\end{aligned}$$

Согласно условию теоремы 6 имеет место равенство

$$\begin{aligned}
& \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}_1(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} + \\
& + \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}.
\end{aligned}$$

С учетом этого соотношения из (36) находим

$$\begin{aligned}
& \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} + \\
& - \left[\mathbf{B}^* - \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \right] \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \left[\mathbf{B} - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C} \right].
\end{aligned}$$

Если ввести обозначение $\mathbf{V}_1 = \mathbf{B} - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{C}$, то тогда $\mathbf{V}_1^* = \mathbf{B}^* - \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^*$, и последнее соотношение примет вид

$$\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{V}_1^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{V}_1$$

Дальше из равенства $\mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A}$ имеем $\mathbf{A}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \mathbf{P}(t, x) \mathbf{A}$. Из соотношений $\mathbf{C}^* \mathbf{R}(T, x) \mathbf{C} = \mathbf{M}$, $\mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(T, x) \mathbf{C} = \mathbf{M}$ и $\mathbf{C}^* \mathbf{R}(T, x) \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \mathbf{P}(T, x) \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}_1(T, x) \mathbf{C}$ получаем $\mathbf{M} = \mathbf{C}^* \mathbf{P}(T, x) \mathbf{C} + \mathbf{M}$, $\mathbf{C}^* \mathbf{P}(T, x) \mathbf{C} = \mathbf{0}$. Также из равенств $\mathbf{R}(t, 0) = \mathbf{R}_1(t, 0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}(t, l) = \mathbf{R}_1(t, l) = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{P}(t, x) + \mathbf{R}_1(t, x)$ соответственно находим $\mathbf{P}(t, 0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}(t, l) = \mathbf{0}$. Это означает, что теорема 6 полностью доказана.

Теорема 7. С помощью замены $\mathbf{P}(t, x)\mathbf{C} = \mathbf{Q}^{-1}(t, x)$ уравнение (35) сводится к линейному уравнению $\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Q}^*(t, x)\mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_1\mathbf{Q}(t, x) - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*$. При этом должно выполняться условие $\mathbf{Q}^*(t, x)\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{Q}(t, x)$.

Доказательство. Поскольку верно равенство $\mathbf{A}^*\mathbf{P}(t, x)\mathbf{C} = \mathbf{C}^*\mathbf{P}(t, x)\mathbf{A}$, то используя формулы $\mathbf{P}(t, x)\mathbf{C} = \mathbf{Q}^{-1}(t, x)$ и $\mathbf{C}^*\mathbf{P}(t, x) = \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)$, имеем $\mathbf{A}^*\mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{A}$. Кроме того, из тождества $\mathbf{C}^*\mathbf{P}(t, x)\mathbf{C} = \mathbf{C}^*\mathbf{P}(t, x)\mathbf{C}$ очевидным способом получаем $\mathbf{C}^*\mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{C}$. С помощью формулы для производной обратной матрицы имеем $\frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial t}\mathbf{C} = -\mathbf{Q}^{-1}(t, x)\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t}\mathbf{Q}^{-1}(t, x)$ и $\frac{\partial \mathbf{P}(t, x)}{\partial x}\mathbf{C} = -\mathbf{Q}^{-1}(t, x)\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x}\mathbf{Q}^{-1}(t, x)$. Подставляя эти выражения в уравнение (35), получим

$$-\mathbf{C}^*\mathbf{Q}^{-1}(t, x)\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} = -\mathbf{A}^*\mathbf{Q}^{-1}(t, x)\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^* - \mathbf{B}_1^* - \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{B}_1\mathbf{Q}(t, x).$$

Используя теперь соотношения $\mathbf{A}^*\mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}^*\mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{C}$, последнее равенство перепишем так

$$\mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^* + \mathbf{B}_1^* + \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{B}_1\mathbf{Q}(t, x)$$

Если теперь это равенство умножить слева на матрицу $\mathbf{Q}^*(t, x)$, то окончательно находим

$$\mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Q}^*(t, x)\mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_1\mathbf{Q}(t, x) - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^*. \quad (37)$$

Учитывая равенство $\mathbf{A}^*\mathbf{Q}^{-1}(t, x) = \mathbf{Q}^{*-1}(t, x)\mathbf{A}$, получим $\mathbf{Q}^*(t, x)\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{Q}(t, x)$. Таким образом, теорема 7 полностью доказана.

Пусть известно частное решение $\mathbf{Q}_1(t, x)$ уравнения (37). Тогда это уравнение можно свести к однородному уравнению, если выполнить замену.

$$\mathbf{Q}(t, x) = \mathbf{W}(t, x) + \mathbf{Q}_1(t, x). \quad (38)$$

На основании (38) имеем

$$\mathbf{Q}^*(t, x) = \mathbf{W}^*(t, x) + \mathbf{Q}_1^*(t, x) \quad (39)$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{W}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Q}_1(t, x)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{W}(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}_1(t, x)}{\partial x}. \quad (40)$$

Подставляя (38) — (40) в уравнение (37), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{W}(t, x)}{\partial t} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{Q}_1(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}_1(t, x)}{\partial x} + \\ + \mathbf{W}^*(t, x) \mathbf{B}_1^* + \mathbf{Q}_1^*(t, x) \mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_1 \mathbf{W}(t, x) + \mathbf{B}_1 \mathbf{Q}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^*. \end{aligned} \quad (41)$$

Согласно предположению справедливо равенство

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{Q}_1(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}_1(t, x)}{\partial x} + \mathbf{Q}_1^*(t, x) \mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_1 \mathbf{Q}_1(t, x) - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^*.$$

Поэтому из (41) имеем

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{W}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{W}^*(t, x) \mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_1 \mathbf{W}(t, x). \quad (42)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 8. Если матричнозначная функция $\mathbf{Q}_1(t, x)$ является решением уравнения (37), то с помощью замены (38) уравнение (37) сводится к однородному линейному уравнению (42).

Решение уравнения (42) можно искать в виде следующего произведения $\mathbf{W}(t, x) = \mathbf{U}(t, x) \mathbf{K} \mathbf{V}(t, x)$, где \mathbf{K} — произвольная постоянная матрицы размера $n \times n$, $\mathbf{U}(t, x)$ и $\mathbf{V}(t, x)$ — неизвестные матрицы такого же размера. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{W}(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial t} \mathbf{K} \mathbf{V}(t,x) + \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{V}(t,x)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial x} \mathbf{K} \mathbf{V}(t,x) + \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{V}(t,x)}{\partial x}$$

и $\mathbf{W}^*(t,x) = \mathbf{V}^*(t,x) \mathbf{K}^* \mathbf{U}^*(t,x)$. Подставляя эти выражения в уравнение (42), имеем

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial t} \mathbf{K} \mathbf{V}(t,x) + \mathbf{C} \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{V}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial x} \mathbf{K} \mathbf{V}(t,x) +$$

$$+ \mathbf{A} \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{V}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{V}^*(t,x) \mathbf{K}^* \mathbf{U}^*(t,x) \mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_1 \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \mathbf{V}(t,x)$$

Это равенство запишем в следующей эквивалентной форме

$$\left[\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial t} - \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{B}_1 \mathbf{U}(t,x) \right] \mathbf{K} \mathbf{V}(t,x) =$$

$$+ \mathbf{A} \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{V}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{V}^*(t,x) \mathbf{K}^* \mathbf{U}^*(t,x) \mathbf{B}_1^* - \mathbf{C} \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{V}(t,x)}{\partial t}. \quad (43)$$

Если теперь функцию $\mathbf{U}(t,x)$ выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{U}(t,x), \quad (44)$$

то соотношение (43) будет выглядеть так

$$\mathbf{C} \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{V}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A} \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{V}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{V}^*(t,x) \mathbf{K}^* \mathbf{U}^*(t,x) \mathbf{B}_1^*. \quad (45)$$

Поскольку имеет место соотношение $\mathbf{C}^* \mathbf{Q}^{-1}(t,x) = \mathbf{Q}^{*-1}(t,x) \mathbf{C}$, то отсюда находим $\mathbf{Q}^*(t,x) \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \mathbf{Q}(t,x)$. Из равенств

$$\mathbf{Q}^*(t,x) \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \mathbf{Q}(t,x), \quad \mathbf{Q}(t,x) = \mathbf{W}(t,x) + \mathbf{Q}_1(t,x) \text{ имеем } \mathbf{W}^*(t,x) \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \mathbf{W}(t,x).$$

Так как $\mathbf{W}(t,x) = \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \mathbf{V}(t,x)$ и $\mathbf{W}^*(t,x) = \mathbf{V}^*(t,x) \mathbf{K}^* \mathbf{U}^*(t,x)$, то можно написать равенство $\mathbf{V}^*(t,x) \mathbf{K}^* \mathbf{U}^*(t,x) \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} \mathbf{V}(t,x)$ или $\mathbf{C} \mathbf{U}(t,x) \mathbf{K} = \mathbf{V}^*(t,x) \mathbf{K}^* \mathbf{U}^*(t,x) \mathbf{C}^* \mathbf{V}^{-1}(t,x)$, если матрица $\mathbf{V}^{-1}(t,x)$ существует.

Также из равенства $\mathbf{Q}^*(t, x)\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{Q}(t, x)$ получаем $\mathbf{A}\mathbf{U}(t, x)\mathbf{K} = \mathbf{V}^*(t, x)\mathbf{K}^*\mathbf{U}^*(t, x)\mathbf{A}^*\mathbf{V}^{-1}(t, x)$. С учетом этих замечаний вместо уравнения (45) получим следующее уравнение

$$\mathbf{V}^*(t, x)\mathbf{K}^*\mathbf{U}^*(t, x) \left[\mathbf{C}^*\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial t} - \mathbf{A}^*\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}_1^* \right] = \mathbf{0}$$

или

$$\mathbf{C}^*\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial t} - \mathbf{A}^*\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}_1^* = \mathbf{0}$$

Умножая справа последнее равенство на матрицу $\mathbf{V}^{-1}(t, x)$, находим

$$\mathbf{C}^*\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial t} \mathbf{V}^{-1}(t, x) - \mathbf{A}^*\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial x} \mathbf{V}^{-1}(t, x) - \mathbf{B}_1^* \mathbf{V}^{-1}(t, x) = \mathbf{0}$$

Если теперь в этом уравнении сделать замену $\mathbf{N}(t, x) = \mathbf{V}^{-1}(t, x)$ и учесть, что $\frac{\partial \mathbf{N}(t, x)}{\partial t} = -\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial t} \mathbf{V}^{-1}(t, x)$ и $\frac{\partial \mathbf{N}(t, x)}{\partial x} = -\mathbf{V}^{-1}(t, x) \frac{\partial \mathbf{V}(t, x)}{\partial x} \mathbf{V}^{-1}(t, x)$, то окончательно находим

$$\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{N}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{N}(t, x)}{\partial x} - \mathbf{B}_1^* \mathbf{N}(t, x) \quad (46)$$

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 9. Решение уравнения (42) имеет вид $\mathbf{W}(t, x) = \mathbf{U}(t, x)\mathbf{K}\mathbf{N}^{-1}(t, x)$, где \mathbf{K} — произвольная постоянная матрицы размера $n \times n$, $\mathbf{U}(t, x)$ и $\mathbf{N}(t, x)$ — матричнозначные функции такого же размера, удовлетворяющие уравнениям (44) и (46) соответственно при условии, что матрица $\mathbf{N}^{-1}(t, x)$ существует.

Уравнение (10) можно представить в симметрической форме. В самом деле, из условия $\mathbf{A}^*\mathbf{R}(t, x)\mathbf{C} = \mathbf{C}^*\mathbf{R}(t, x)\mathbf{A}$ следует, что

$$\mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}. \quad \text{Поэтому} \quad \frac{\mathbf{A}^* \partial \mathbf{R}(t, x)}{2 \partial x} \mathbf{C} = \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \frac{\mathbf{A}}{2} \quad \text{и}$$

$$\mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} = \frac{\mathbf{A}^* \partial \mathbf{R}(t, x)}{2 \partial x} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \frac{\mathbf{A}}{2} \quad \text{Отсюда следует, что уравнение}$$

(10) можно переписать так

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} &= \frac{\mathbf{A}^* \partial \mathbf{R}(t, x)}{2 \partial x} \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \frac{\mathbf{A}}{2} + \\ &+ \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (47)$$

Уравнение (47) естественным образом порождает следующую блочную матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & -\mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \\ -\frac{\mathbf{A}}{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & \frac{\mathbf{A}^*}{2} & -\mathbf{B}^* \end{bmatrix} \quad (48)$$

размера $3n \times 3n$.

Теорема 10. С помощью матрицы (48) уравнение (47) можно представить таким образом

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) & -\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} \\ \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. С помощью непосредственного вычисления находим

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} \\ \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & -\mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \\ -\frac{\mathbf{A}}{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & \frac{\mathbf{A}^*}{2} & -\mathbf{B}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} \\ \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \\ \frac{\mathbf{A}}{2} \\ -\mathbf{F} + \frac{\mathbf{A}^* \partial \mathbf{R}(t, x)}{2 \partial x} \mathbf{C} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \quad -\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \quad \mathbf{I} \right] \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} \\ \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \end{bmatrix} = \\
& = \left[-\mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \quad -\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \quad \mathbf{I} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{B} - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \\ -\frac{\mathbf{A}}{2} \\ -\mathbf{F} + \frac{\mathbf{A}^*}{2} \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \end{bmatrix} = \\
& = -\mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \frac{\mathbf{A}}{2} - \mathbf{F} + \frac{\mathbf{A}^*}{2} \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} - \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Вычисление минимального значения критерия оптимальности

На основании формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x)] dx dt = \\
& = \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(T, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(T, x) dx - \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t_0, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t_0, x) dx.
\end{aligned}$$

Так как имеет место равенство $\mathbf{M} = \mathbf{C}^* \mathbf{R}(T, x) \mathbf{C}$, то отсюда непосредственно находим

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(T, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(T, x) dx = \int_0^l \mathbf{z}^*(T, x) \mathbf{M} \mathbf{z}(T, x) dx = \\
& = \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t_0, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t_0, x) dx + \int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x)] dx dt. \quad (49)
\end{aligned}$$

С учетом этого замечания функционал (6) можно представить таким образом

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{z}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t_0, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t_0, x) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \mathbf{z}(t, x) + \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x)] + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \mathbf{u}(t, x) \right] dx dt. \quad (50)
\end{aligned}$$

Согласно формуле дифференцирования произведения трех сомножителей получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{Cz}(t, x)] &= \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{Cz}(t, x) + \\ &+ \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Cz}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (51)$$

С учетом соотношения (51) функционал (50) примет вид

$$\begin{aligned} I(\mathbf{z}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t_0, x) \mathbf{Cz}(t_0, x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{Fz}(t, x) + \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{Cz}(t, x) + \right. \\ &\left. + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{Cz}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} + \mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \mathbf{u}(t, x) \right] dx dt. \end{aligned} \quad (52)$$

Подставляя выражение $\mathbf{u}(x, t) = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{Cz}(x, t)$ в уравнение (3), имеем

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + [\mathbf{B} - \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{C}] \mathbf{z}(x, t). \quad (53)$$

Выполняя операцию транспонирования в соотношении (53) . получим

$$\frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{C}^* = \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* + \mathbf{z}^*(x, t) [\mathbf{B}^* - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^*]. \quad (54)$$

Поскольку $\mathbf{u}(x, t) = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{Cz}(x, t)$, то

$$\mathbf{u}^*(x, t) = -\mathbf{z}^*(x, t) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \text{ и}$$

$$\mathbf{u}^*(t, x) \mathbf{G} \mathbf{u}(t, x) = \mathbf{z}^*(x, t) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{Cz}(x, t). \quad (55)$$

Дальше на основании соотношений (53) и (54) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t} &= \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \\ &+ \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{C}] \mathbf{z}(x, t), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial t} \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) = \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) + \\ & + \mathbf{z}^*(x, t) \left[\mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \right] \mathbf{z}(t, x), \end{aligned} \quad (57)$$

С учетом соотношений (55) — (57) функционал (52) примет вид

$$\begin{aligned} I(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t_0, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t_0, x) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{F} \mathbf{z}(t, x) + \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) + \right. \\ & + \mathbf{z}^*(x, t) \left[\mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \right] \mathbf{z}(t, x) + \\ & + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \\ & + \mathbf{z}^*(t, x) \left[\mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{C} \right] \mathbf{z}(x, t) + \\ & \left. \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) \right] dx = \mathbf{z}^*(t, l) \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, l) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, l) - \mathbf{z}^*(t, 0) \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, 0) \mathbf{z}(t, 0) = \mathbf{0} \right. \\ & \left. + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(x, t) \mathbf{C} \mathbf{z}(x, t) \right] dx dt. \end{aligned} \quad (58)$$

Поскольку справедливы равенства $\mathbf{R}(t, 0) = \mathbf{R}(t, l) = \mathbf{0}$, то на основании формулы Ньютона-Лейбница получим

Из очевидного соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) \right] - \\ & - \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) - \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x}, \end{aligned}$$

с учетом равенства (59) находим

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \int_0^l \frac{\partial \mathbf{z}^*(t, x)}{\partial x} \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) dx dt = \\ & = - \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) + \mathbf{z}^*(t, x) \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} \right] dx dt. \end{aligned} \quad (60)$$

Теперь принимая во внимание соотношение (60) и приводя подобные члены в (58), имеем

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t_0, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t_0, x) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_0^l \left[\mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{F} + \mathbf{B}^* \mathbf{R}(t, x) - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C}] + \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial t} \right. \\
 & - \mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{R}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{R}(t, x) \mathbf{B} - \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} + \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t, x) + \\
 & \left. + \mathbf{z}^*(t, x) [\mathbf{C}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{A} - \mathbf{A}^* \mathbf{R}(t, x) \mathbf{C}] \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x} \right] dx dt.
 \end{aligned}$$

Поскольку справедливы соотношения (10) и (11), то окончательно получим

$$I_{\min}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^*(t_0, x) \mathbf{C}^* \mathbf{R}(t_0, x) \mathbf{C} \mathbf{z}(t_0, x) dx \quad (61)$$

Теорема 11. Минимальное значение функционала (4) вычисляется по формуле (61), где функция $\mathbf{R}(t, x)$ — решение матричного уравнения с частными производными (10) и удовлетворяет дополнительными условиям (11) — (12).

Список литературы:

1. Бормотова О.В., Гайдомак С.В., Чистяков В.Ф.В. О разрешимости вырожденных систем дифференциальных уравнений в частных производных. // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 4 (515). — С. 18—29.
2. Бормотова О.В., Чистяков В.Ф. В. О методах численного решения и исследования систем не типа Коши-Ковалевской. // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2004. — Т. 44, № 8. — С. 1380—1387.
3. Копец М.М. Оптимальное управление объектом, описываемым сингулярной системой линейных уравнений с частными производными. // «Математика и информационные технологии в современном мире», материалы международной заочной научно-практической конференции. — Новосибирск, 2011. — с. 5—17.
4. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. — 480 с.

5. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. — 384 с.
6. Campbell S.L. Singular system of differential equations. Research Notes in Math., No 40. San Francisco: Pitman, 1980. — 176 p.
7. Campbell S.L. Singular system of differential equations. II. Research Notes in Math., No 61. San Francisco: Pitman, 1982. — 234 p.
8. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. Printed in Germany, 2006. — 377 p.

1.2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ОПТИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ИНТЕРВАЛОВ ГИСТОГРАММЫ

Бардасов Сергей Александрович

канд. физ.-мат. наук, доцент ТюмГУ, г. Тюмень

E-mail: sbard@mail.ru

Одной из основных идей в статистике является понятие функции плотности распределения (плотности вероятности) $f(x)$. В связи с этим важной является проблема ее оценки. Для этого широко используется гистограмма. При ее построении необходимо определить число интервалов (групп) m , на которые будет разбита выборочная совокупность. Для этого часто применяют формулу Стерджесса:

$$m = 1 + \log_2 n \approx 1 + 3,322 \lg n, \quad (1)$$

где n — объем выборки. Результат округляют до ближайшего целого числа.

При получении этого результата полагается, что число элементов выборки в i -й группе равно биномиальному коэффициенту

$$C_{m-1}^{i-1} = \frac{(m-1)!}{(i-1)! (m-i)!}, \quad i = 1, \dots, m$$

Сумма коэффициентов (групповых частот) равна

$$\sum_{i=1}^m C_{m-1}^{i-1} = 2^{m-1},$$

она должна совпадать с объемом выборки n , следовательно,

$$2^{m-1} = n.$$

Логарифмируя последнее выражение, получим формулу Стерджесса, которая статистически необоснованна, но широко распространена в учебной литературе.

Ниже рассмотрим статистические критерии, применяемые для оценки числа интервалов гистограммы или их длины. Используемые формулы являются асимптотическими, т.е. их следует применять при больших объемах выборочных совокупностей.

Минимизации интегральной среднеквадратической ошибки

Обозначим через $\varphi(x)$ оценку истинной функции $f(x)$,

Еще в работе [1, с. 189] Н.В. Смирнов показал, что уклонение гистограммы от неизвестного графика плотности убывает, как $n^{-1/3}$. В работе [3, с. 605] Д. Скотт для оценки длины интервала гистограммы минимизировал интегральную среднеквадратическую ошибку

$$IMSE = \int E[\varphi(x) - f(x)]^2 dx = \int Var[\varphi(x)] dx + \int Bias^2[\varphi(x)] dx$$

где $Var[\varphi(x)]$ — точечная дисперсия, $Bias[\varphi(x)]$ — точечное смещение, $E(\cdot)$ — символ математического ожидания.

Была получена следующая оценка [3, с. 607]

$$IMSE = 1/(nh) + (1/12)h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2 dx + O(1/n + h^3)$$

где h — длина группового интервала.

Таким образом,

$$IMSE \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, nh \rightarrow \infty.$$

Минимизируя два первых слагаемых, Скотт получил асимптотическую оценку оптимальной длины интервала [3, с. 607]

$$h^* = \sqrt[3]{\frac{6}{n \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2 dx}} \quad (2)$$

Таким образом, в отличие от формулы Стерджесса число интервалов будет пропорционально $\sqrt[3]{n}$, а не $\log_2(n)$.

Например, для нормального распределения получим

$$h^* = 2\sigma \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{\pi}}{n}} \approx \frac{3,49\sigma}{\sqrt[3]{n}}, \quad (3)$$

где σ — стандартное отклонение. Формулу (3) часто применяют для первоначальной оценки длины интервалов независимо от вида распределения.

Пусть истинная функция плотности распределения имеет вид (линейное распределение):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0), \\ 2x, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \in (0; \infty). \end{cases} \quad (4)$$

В данном случае

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0), \\ 2, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \in (0; \infty); \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx = 4 \int_0^1 dx = 4.$$

Тогда оптимальная длина интервала будет равна

$$h^* = \sqrt[3]{\frac{3}{2n}}.$$

Для числа интервалов получим

$$m^* = \frac{1}{h} = \sqrt[3]{\frac{2n}{3}}. \quad (5)$$

Применение информационного критерия Акаике (АИС)

Для оценки оптимального числа интервалов критерий Акаике [2] применяется редко. При этом обычно упоминается работа Тейлора [4]. АИС для оценки оптимального числа интервалов гистограммы m^* примет вид

$$m^* = \arg \min_m [-2 \ln(L(m)) + 2m] \quad (6)$$

Здесь $L(m)$ — функция правдоподобия. Использование коэффициента 2 в формуле (6) является общепринятым (так сложилось исторически). Функция правдоподобия для гистограммы имеет вид

$$L(m) = \left(\frac{n_1}{nh_1} \right)^{n_1} \times \left(\frac{n_2}{nh_2} \right)^{n_2} \times \dots \times \left(\frac{n_m}{nh_m} \right)^{n_m},$$

где n_i — количество выборочных значений переменной в i -й группе;

h_i — длина i -го интервала гистограммы. При определении функции правдоподобия полагаем, что не должно быть пустых групп и групповых интервалов, равных нулю.

В случае равных интервалов, имеем:

$$\begin{aligned} L(m) &= \left(\frac{n_1}{nh} \right)^{n_1} \times \left(\frac{n_2}{nh} \right)^{n_2} \times \dots \times \left(\frac{n_m}{nh} \right)^{n_m} = \frac{n_1^{n_1} \times n_2^{n_2} \times \dots \times n_m^{n_m}}{n^n h^n} = \\ &= \frac{n_1^{n_1} \times n_2^{n_2} \times \dots \times n_m^{n_m} \times m^n}{n^n \Lambda^n}, \quad h = \frac{\Lambda}{m}, \end{aligned}$$

где Λ — размах вариации.

Натуральный логарифм функции правдоподобия равен:

$$\ln(L(m)) = \sum_{i=1}^m n_i \ln(n_i) + n \ln(m) - n \ln(n) - n \ln(\Lambda),$$

$$\ln(L(m)) = \sum_{i=1}^m n_i \ln(n_i) + n \ln(m) + const, \quad (7)$$

где $const$ — слагаемые независящие от числа групп.

Не принимая в расчет величины, независимые от числа групп m , подставим (7) в (6), поменяем знак и разделим на 2. Получим, что в случае равных интервалов, оптимальное число групп m^* равно:

$$m^* = \arg \max_m \left(\sum_{i=1}^m n_i \ln(n_i) + n \ln(m) - m \right). \quad (8)$$

Рассмотрим равновероятные (равночастотные) интервалы. В этом случае

$$\begin{aligned} L(m) &= \left(\frac{v}{nh_1} \right)^v \times \left(\frac{v}{nh_2} \right)^v \times \dots \times \left(\frac{v}{nh_m} \right)^v = \frac{v^n}{n^n (h_1 \times h_2 \times \dots \times h_m)^v} = \\ &= \frac{1}{m^n (h_1 \times h_2 \times \dots \times h_m)^{\frac{n}{m}}}, \quad v = \frac{n}{m}, \end{aligned}$$

где h_i — длины

Логарифмируя, получим

$$\ln(L(m)) = -\frac{n}{m} \sum_{i=1}^m \ln(h_i) - n \ln(m).$$

Тогда, согласно критерию Акаике, оптимальное число интервалов m^* равно:

$$m^* = \arg \min_m \left(\frac{n}{m} \sum_{i=1}^m \ln(h_i) + n \ln(m) + m \right). \quad (9)$$

Соотношения (8), (9) не содержат предположений о виде функции распределения вероятностей, поэтому являются непараметрическими.

Представляет интерес изучить характер зависимости числа групп m от объема выборки n для различных методов. Поэтому целесообразно получить явные формулы $m = m(n)$, соответствующие критериям (8), (9).

Пусть функция плотности распределения имеет вид (4). Рассмотрим случай равных интервалов. Разделим отрезок $[0; 1]$ на m частей и вычислим вероятность того, что значение признака окажется в i — ом интервале:

$$\int_{\left(\frac{i-1}{m}\right)}^{\left(\frac{i}{m}\right)} 2x dx = \frac{2i-1}{m^2}, \quad (i = 1, \dots, m)$$

Следовательно, число наблюдений в i — ом интервале оценим как $n_i = \frac{2i-1}{m^2} n$. В этом случае

$$\sum_{i=1}^m n_i \ln(n_i) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{n(2i-1)}{m^2} \ln \left[\frac{n(2i-1)}{m^2} \right] \right].$$

Тогда при заданном количестве данных n оптимальное число групп находится из условия

$$m^* = \arg \max_m \left[\sum_{i=1}^m \left[\frac{n(2i-1)}{m^2} \ln \left[\frac{n(2i-1)}{m^2} \right] \right] + n \ln m - m \right]. \quad (10)$$

Проанализируем выражение (10):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left[\frac{n(2i-1)}{m^2} \ln \left[\frac{n(2i-1)}{m^2} \right] \right] + n \ln m - m = \\ &= \frac{1}{m^2} \left[\sum_{i=1}^m [n(2i-1) \ln(n(2i-1)) - 2n(2i-1) \ln m] \right] + n \ln m - m = \\ &= n \ln n - 2n \ln m + \frac{n}{m^2} \left[\sum_{i=1}^m [(2i-1) \ln(2i-1)] \right] + n \ln m - m = \\ &= n \ln n + n \frac{1}{m^2} \left[\sum_{i=1}^m [(2i-1) \ln(2i-1)] \right] - n \ln m - m. \end{aligned}$$

При упрощениях учли, что $\sum_{i=1}^m (2i-1) = m^2$. Отбросим слагаемое $n \ln n$, которое не зависит от числа групп. Введем обозначение

$$G(m) = \frac{1}{m^2} \left[\sum_{i=1}^m [(2i-1) \ln(2i-1)] \right] - \ln m.$$

Тогда оптимальное число групп при заданном объеме выборки n соответствует максимуму выражения

$$n G(m) - m. \quad (11)$$

Дифференцируя (11) по m получим, что при заданном объеме выборки n оптимальное число групп находится из уравнения

$$n \frac{dG(m)}{dm} - 1 = 0. \quad (12)$$

Оценим сумму

$$\sum_{i=1}^m [(2i-1) \ln(2i-1)] = \sum_{i=1}^m g(i), \quad g(i) \equiv [(2i-1) \ln(2i-1)]$$

Согласно формуле Эйлера-Маклорена

$$\sum_{i=1}^m g(i) \approx \int_1^m g(x) dx + \frac{g(m) + g(1)}{2} + \frac{B_2}{2!} [g'(m) - g'(1)],$$

где коэффициент Бернулли $B_2 = \frac{1}{6}$.

Следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m g(i) &= \sum_{i=1}^m [(2i-1) \ln(2i-1)] \approx \int_1^m (2x-1) \ln(2x-1) dx + \\ &+ \frac{(2m-1) \ln(2m-1) + 1 \times \ln 1}{2} + \frac{1}{12} [2 \ln(2x-1) + 2] \Big|_1^m = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{(2x-1)^2}{4} \ln(2x-1) - \frac{(2x-1)^2}{8} \right]_1^m + \frac{(2m-1)}{2} \ln(2m-1) + \frac{\ln(2m-1)}{6} = \\
&= \frac{(2m-1)^2}{4} \ln(2m-1) - \frac{(2m-1)^2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{(2m-1)}{2} \ln(2m-1) + \frac{\ln(2m-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$G(m) = \frac{1}{m^2} \left[\frac{(2m-1)^2}{4} \ln(2m-1) - \frac{(2m-1)^2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{(2m-1)}{2} \ln(2m-1) + \frac{\ln(2m-1)}{6} \right] - \ln m.$$

Дифференцируя и упрощая, получим

$$\frac{dG(m)}{dm} = \frac{1}{6m^3} \left[\ln(2m-1) + \frac{2m}{2m-1} \right]. \quad (13)$$

Согласно (12, 13) оптимальное число интервалов m^* гистограммы находится из уравнения

$$\frac{n}{6m^3} \left[\ln(2m-1) + \frac{2m}{2m-1} \right] = 1. \quad (14)$$

В таблице 1 приведены результаты оценки m^* для функции плотности вероятности (4) по формулам Стерджесса, Скотта и (14).

Таблица 1.

Число интервалов гистограммы для линейной функции плотности вероятности

n	Оптимальное число интервалов		
	$1 + \log_2 n$	$\sqrt[3]{\frac{2n}{3}}$	$\frac{n}{6m^3} \left[\ln(2m-1) + \frac{2m}{2m-1} \right] = 1$
500	10	7	7
1000	11	9	9
5000	13	15	15
10000	14	20	19
50000	17	35	32
100000	18	45	41
200000	19	58	51
500000	20	80	70
1000000	21	102	87

Таким образом, при больших n формула Скотта и информационный критерий рекомендуют значительно большее число интервалов по сравнению с формулой Стерджесса.

Список литературы:

1. Смирнов Н.В. О построении доверительной области для плотности распределения случайной величины // Доклады АН СССР. — 1950. — Т. 74. — № 2. — С. 189—192.
2. Akaike H. Information theory as an extension of the maximum likelihood principle. In B. N. Petrov & F. Csaki (Eds.). Second International Symposium on Information Theory. — Budapest: Akademiai Kiado, 1973. — P. 267—281.
3. Scott D.W. On optimal and data-based histograms // Biometrika. — 1979. — Vol. 66. — P. 605—610.
4. Taylor C. Akaike's information criterion and the histogram // Biometrika. — 1987. — Vol. 74. — P. 636—639.

СЕКЦИЯ 2.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

2.1. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Кораблев Юрий Анатольевич

*канд. техн. наук, доцент каф АПУ, СПбГЭТУ, г. Санкт-Петербург
E-mail: Korablev@pochta.tvoe.tv*

Шестопалов Михаил Юрьевич

*канд. техн. наук, проректор по научной работе, доцент каф. АПУ,
СПбГЭТУ, г. Санкт-Петербург*

В статье для решения задачи определения множества потенциально возможных отказов технологического оборудования предлагается подход на основе обобщенной методологии, построенной по принципу эволюционного исследования сложных систем [3, 4] с привлечением классических статистических и нечетких технологий [1, 7, 9], позволяющей упорядочить процесс анализа в виде поэтапной процедуры, организованной иерархически.

Организационную последовательность проведения исследований можно представить в виде трех этапов.

I. Этап сбора экспериментальных данных для построения топологической модели непрерывного технологического процесса

II. Нечеткая топологическая идентификация

Выходным результатом этого этапа является ориентированный нечеткий граф модели технологического процесса, т. е. модель первого ранга неопределенности. Представление модели в виде нечеткого графа в рамках предлагаемой процедуры имеет свои особенности.

Традиционно нечеткий ориентированный граф определяется как граф $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$, у которого $X = \{x_i\}$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ — четкое множество вершин, а $\tilde{U} = \{ \langle \mu_U(x_i, x_j) / (x_i, x_j) \rangle \}$ — нечеткое множество ребер, где $x_i, x_j \in X$, $\mu_U(x_i, x_j) \in [0, 1]$ — значение функции принадлежности μ_U для ребра (x_i, x_j) .

Здесь целесообразно рассматривать множество вершин графа также как нечеткое множество, т. е. $X = \{ \langle \mu_x(x_i) / (x_i) \rangle \}$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ — нечеткое множество вершин и $\mu_x(x_i) \in [0, 1]$.

Топология объекта включает в себя множество координат и множество отношений между ними. Определение наличия этих отношений является целью нечеткой топологической идентификации. Таким образом, процесс построения топологии модели естественным образом разбивается на:

1. проверку координат на изолированность
2. проверку координат на наличие связи
3. ориентацию связи

Процедуры проверки координат на изолированность и наличие связи предполагают формирование матрицы корреляции R :

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{pmatrix},$$

состоящей из парных коэффициентов корреляции (ПКК), учитывающих тесноту линейной корреляционной связи между всеми парами координат с учетом их взаимного влияния и взаимодействия. Коэффициент корреляции между каждой парой координат X и Y r_{XY} рассчитывается по формуле:

$$r_{XY} = \frac{N \sum_{i=1}^N X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N Y_i \right)}{\sqrt{\left(N \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2 \right) \cdot \left(N \sum_{i=1}^N Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N Y_i \right)^2 \right)}}$$

Для проверки координат на изолированность на основе матрицы корреляции рассчитывается для каждой координаты множественный коэффициент корреляции (МКК) $R_{0,1,2,\dots,m}$, характеризующий степень тесноты связи между координатой и всеми остальными независимыми переменными:

$$R_{0,1,2,\dots,m} = \sqrt{1 - \frac{|R|}{|R_*|}}$$

где $|R|$ — определитель матрицы корреляции,

$|R_*|$ — алгебраическое дополнение матрицы корреляции для исследуемой координаты.

Величина МКК лежит в пределах $0 \leq R_{0,1,2,\dots,m} \leq 1$. При этом идеальными с точки зрения процедуры проверки являются крайние точки диапазона. При значении 0 для МКК делается вывод, что координата изолированная. При значении МКК=1 является справедливым альтернативное утверждение.

Для проверки на наличие связи на основе матрицы корреляции рассчитывается для каждой пары координат частный коэффициент корреляции (ЧКК) $r_{ij/km}$, характеризующий тесноту линейной корреляционной связи между парой анализируемых координат x_i и x_j без учета влияния на эту пару других переменных x_k, x_m и т. д. В матричном виде формула для расчета частных коэффициентов корреляции выглядит следующим образом:

$$r_{ij/km} = \frac{A_{ij}}{\sqrt{(A_{ii}A_{jj})}},$$

где A_{ii}, A_{jj}, A_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы парных корреляций R .

Величина ЧКК лежит в пределах $-1 \leq r_{ij/km} \leq 1$. Значение ЧКК, равное 0, говорит об отсутствии связи между координатами, 1 — о положительной функциональной зависимости, -1 — о полной обратной линейной связи.

Для оценки значимости МКК и ЧКК применяют два подхода.

Первый подход базируется на применении методов математической статистики [5, 6]. В рамках этого подхода требуется оценить значимость выборочной величины коэффициента или, в соответствии с постановкой задач проверки статистических гипотез, проверить гипотезу о равенстве нулю соответствующего коэффициента корреляции. Если гипотеза H_0 о равенстве нулю коэффициента корреляции будет принята, то оценка коэффициента не значима, и делается вывод об изолированности координаты для МКК и отсутствии связи для ЧКК. Если гипотеза H_0 будет отвергнута, то выборочный коэффициент значим, справедливы альтернативные предположения.

Для МКК в качестве критерия проверки нулевой гипотезы H_0 применяют критерий Фишера

$$F = \frac{R_{0,1,2,\dots,m}^2}{1 - R_{0,1,2,\dots,m}^2} \frac{n - m - 1}{m},$$

где m — число координат,

n — объем выборки.

Проверка гипотезы H_0 о равенстве нулю МКК проводится следующим образом. Фактическое значение частного F -критерия сравнивается с табличным значением распределения Фишера при заданном уровне значимости α ($\alpha = 0.05, 0.01$ и т.д.). Если фактическое значение превышает табличное, то включение координаты x_i в модель статистически оправданно. Если же фактическое значение меньше табличного, то нецелесообразно включение этой координаты в модель, координата изолирована.

Для ЧКК как критерий проверки нулевой гипотезы H_0 применяют:

$$t = \frac{|r_{ij/km}| \sqrt{n - k - 2}}{\sqrt{1 - r_{ij/km}^2}},$$

где k — число пассивных координат,

n — объем выборки.

Величина t при справедливости нулевой гипотезы распределена по закону Стьюдента с $n-k-2$ степенями свободы. Конкурирующая гипотеза H_1 соответствует утверждению, что значение $r_{ij/km}$ не равно нулю. Проверка гипотезы H_0 о равенстве нулю ЧКК двумерной нормально распределенной случайной величины проводится аналогично проверке равенства нулю МКК.

Таким образом, данный подход находится фактически в русле классической логики: решение по каждой координате или связи принимается по принципу «нет/да». Но так как при этом вводится вероятностная оценка, то в полученной топологической модели в форме нечеткого графа значения функций принадлежности для всех ребер и вершин будут равны $1-\alpha$.

Процедура ориентации связей, т. е. проведение причинно-следственного анализа может осуществляться разными способами:

1. Сравнение интервалов корреляций взаимнокорреляционных функций для каждой пары координат

Это подход основан на выявлении временной задержки, возникающей при прохождении сигнала по ориентируемой динамической связи, что проявляется в несимметричности взаимных корреляционных функций для любой пары координат. Правило для ориентации связи:

Если $\tau_{xy} > \tau_{yx}$, то $x \rightarrow y$,

где τ_{xy} , τ_{yx} — интервалы корреляции для взаимно-корреляционных функций $K_{xy}(\tau)$ и $K_{yx}(\tau)$ соответственно.

2. Перекрестно-отсроченные корреляции (ПОК) Кэмпбелла [8]

Для анализа методом ПОК две переменные должны быть измерены несколько раз через один и тот же промежуток времени. В основе данного метода лежит положение о том, что если A — более сильная причина B , чем наоборот, то можно ожидать, что коэффициент корреляции r_{A1B1} больше, чем r_{A2B1} , r_{A1B3} больше, чем r_{A3B1} и т. д.

3. Причинный анализ сопутствий в непрерывных временных сериях

Основан на следующем положении: X можно рассматривать как причину Y , если она вносит вклад в предсказание Y свыше того, которое дает упорядоченное поведение самого Y . Применяя приемы перекрестно-отсроченных корреляций к временным сериям, можно попытаться установить направленность причинно-следственных связей ($X \rightarrow Y$ или $Y \rightarrow X$). Это осуществляется путем сравнения

перекрестно-отсроченных корреляций, когда X упреждает Y и когда Y упреждает X на 1, 2... n сдвигов.

4. Путьевой анализ

Путьевой анализ состоит в построении схем, изображающих систему корреляционных отношений в виде путьевых диаграмм.

Если в рассматриваемых подходах корреляционную связь нельзя считать линейной, что справедливо в случаях заметных отклонений распределений вероятностей исследуемых координат от нормальных, то в основу предлагаемой методики должно быть положено корреляционное отношение.

Корреляционное отношение — это отношение двух средних квадратичных отклонений, одно из которых характеризует часть изменчивости первого признака, обусловленную его зависимостью от второго признака, а второе является обычной мерой общей изменчивости первого признака:

$$\eta_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\sigma_y}; \quad \eta_{x/y} = \frac{\sigma_{x/y}}{\sigma_x}$$

Второй подход базируется на применении методов нечеткой логики. В этом случае исходят из качественной оценки тесноты связи между каждой координатой и всеми остальными (при проверке на изолированность) или между каждой парой координат (при проверке на наличие связи).

Для качественной оценки тесноты связи на основе МКК И ЧКК можно использовать следующую классификацию, часто применяемую на практике:

- 0.0 — нет связи (точно нет);
- 0.25 — слабая связь (скорее нет, чем есть);
- 0.5 — неопределенная связь (трудно отнести к слабой или сильной);
- 0.75 — возможная связь (скорее есть, чем нет);
- 1.0 — есть связь (точно есть);

Это экспертное представление о тесноте связи позволяет построить механизм нечетких логических выводов для оценки нечеткой вероятности (значения функции принадлежности) наличия координаты и связи в нечетком графе, представляющем топологическую модель технологического процесса.

Входной лингвистической переменной R в процедуре проверки координаты на изолированность является МКК, а в процедуре

проверки на наличие связи модуль ЧКК со следующими нечеткими значениями (термами):

- Ноль (Z);
- Меньше половины (LTH);
- Половина (H);
- Больше половины (MTH);
- Единица (O);

Начальное распределение термов входной переменной R показано на рис. 1:

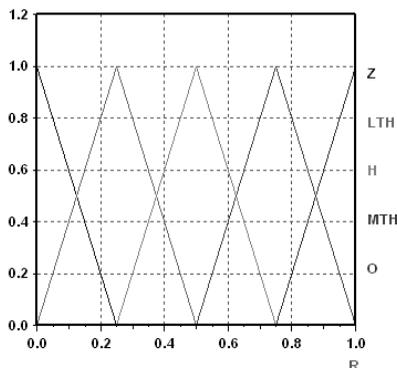


Рисунок 1. Начальное распределение термов входной переменной R

В рамках данной методики целесообразно сохранить информацию о знаке ЧКК, т.е. о характере линейной связи: о положительной функциональной зависимости или о полной обратной линейной связи.

Выходной лингвистической переменной P будет нечеткая вероятность наличия координаты при проверке на изолированность и тесноты связи при проверке наличия связи:

- Нет связи (N)
- Слабая связь (WC)
- Неопределенная связь (UC)
- Возможная связь (PC)
- Есть связь (E)

Начальное распределение термов выходной переменной P показано на рис. 2:

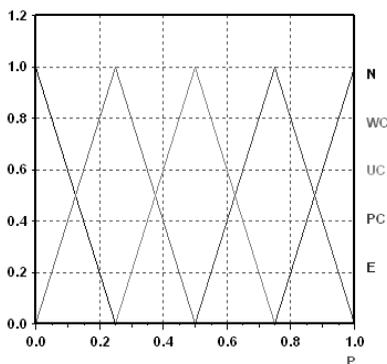


Рисунок 2. Начальное распределение термов выходной переменной P

База правил имеет вид:

ЕСЛИ R=Z *ТО P=N*

ЕСЛИ R=LTH *ТО P=WC*

ЕСЛИ R=H *ТО P=UC*

ЕСЛИ R=MTH *ТО P=PC*

ЕСЛИ R=O *ТО P=E*

Полученные значения нечеткой вероятности устанавливаются на вершинах и дугах нечеткого графа, причем на дугах с учетом знака ЧКК для пары координат, которые они соединяют.

Механизм нечетких логических выводов может быть реализован по схеме MAX-MIN или MAX-PROD. В качестве метода дефазификации целесообразно использовать модифицированный метод центра тяжести.

III. Анализ возникновения потенциальных отказов на основе нечеткого ориентированного графа технологического процесса

Идея анализа основывается на рассмотрении нечеткого ориентированного графа технологического процесса как нечеткой когнитивной карты (Fuzzy Cognitive Maps), введенной Коско [10]. В когнитивном анализе решаются два типа задач: *статические* и *динамические*. *Статический анализ* — это анализ путей влияния одних факторов на другие. *Динамический анализ* — это генерация и анализ сценариев развития ситуации во времени.

Среди координат процесса выделяются управляющие и регулируемые, изменение или стабилизация которых является целью управления. Путем внесения в нечеткую когнитивную карту отказа

оценивается степень влияния управляющих координат на регулируемые, что классифицирует отказ как:

- несущественный, не требующий коррекции
- компенсируемый полностью
- компенсируемый с потерей качества управления
- фатальный, когда коррекция не является возможной

Отказы моделируются на топологическом уровне изменением величины нечетких вероятностей:

1. Выпадение (или ослабление влияния) вершин графа.
2. Выпадение (или ослабление силы) связи между вершинами графа.

Физическая интерпретация каждого конкретного топологического отказа возлагается на экспертов в данной предметной области исследований.

Задача может решаться статически: путем расчета и анализа выбранных системных показателей нечеткой когнитивной карты (взаимных консонансов, диссонансов, положительных и отрицательных влияний концептов друг на друга и на систему в целом). Но более предпочтительно использование динамического анализа, т. е. анализ когнитивной карты во времени.

Базовым элементом нечеткой когнитивной карты [2] является связь, описывающая влияние одного концепта K_i на другой K_j . Направленность связи w_{ij} означает, что концепт-источник *влияет* на концепт-приемник. При положительной связи и увеличении концепта K_i K_j увеличивается, при уменьшении K_i K_j уменьшается. При отрицательном значении связи увеличение значения K_i вызовет уменьшение K_j и наоборот. Влияния входных концептов суммируются и для предотвращения выхода за пределы диапазона выходного концепта используется специальная нелинейная функция f :

$$K_j = f \left[\sum_{i=1}^N w_{ij} K_i \right]$$

где w_{ij} — вес влияния концепта i на концепт j ,

N — число концептов, влияющих на концепт j ,

K_i и K_j — значения входного и выходного концептов.

Нелинейная функция $f[\bullet]$ используется для нормализации вычислений в диапазоне $[0, 1]$. Обычно используется сигмоидальная функция:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}, \lambda > 0$$

Функционирование нечеткой когнитивной карты в дискретном времени:

$$K_j(t+1) = f \left[\sum_{i=1}^N w_{ij} K_i(t) \right]$$

Если в нечеткой когнитивной карте имеются петли обратной связи, то:

$$K_j(t+1) = f \left[\sum_{i=1}^N w_{ij} K_i(t) + K_j(t) \right].$$

Список литературы:

1. Алексеев А.А., Кораблев Ю.А., Шестопалов М.Ю. Идентификация и диагностика систем. М.: Издательский центр «Академия», 2009.
2. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. М.: Горячая линия — Телеком, 2007.
3. Вавилов А.А. Структурный и параметрический синтез сложных систем. Л.: ЛЭТИ, 1979.
4. Вавилов А.А., Имаев Д.Х. Эволюционный синтез систем управления. Л.: ЛЭТИ, 1983.
5. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. 4-е издание, переработанное и дополненное. Москва: Финансы и Статистика, 2002.
6. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. М.: Физматлит, 2006.
7. Кораблев Ю.А., Шестопалов М.Ю. Идентификация технологических процессов и управление ими на основе FUZZY- и NEURO-FUZZY-технологий: Учебное пособие. СПб.: изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2007.
8. Корнилова Т.В., Шуранова О.И. Корреляционные исследования: пути приближения к причинному анализу. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 14, Психология. 1987. № 4.
9. Прикладные нечеткие системы: Перевод с япон. /К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др.; под. ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. М.: Мир, 1993.
10. Kosko B. Fuzzy Cognitive Maps // Int. Journal of Man-Machine Studies. 1986. V. 24. P. 65—75.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПОИСКА МАРШРУТА НА ГИПЕРГРАФЕ ДЛЯ РЕКОНСИЛИЦИИ ПРИКЛАДНЫХ ДАННЫХ

Покачалов Вадим Анатольевич

Аспирант, ЛГТУ, г. Липецк

E-mail: konsul_p_v@mail.ru

Семантическая реконсильция — фундаментальная научная и прикладная проблема, тесно связанная с применением современных технологий оптимистической репликации в распределенных системах и имеющая индустриально важные приложения. Использование в них оптимистической репликации позволяет отказаться от необходимой централизации управления распределенными информационными ресурсами, свойственной пессимистическим моделям транзакций, и обеспечить возможность эффективной одновременной работы пользователей и приложений с реплицированными версиями данных. На основе формального анализа конкурентных транзакций выявляются возможные отношения между элементами данных и операциями, и применяется логический вывод для их семантически корректного и функционально содержательного слияния. При подобном подходе операции транзакций рассматриваются как объекты системы посылок и заключений, а отношения зависимости и порядка между ними — как правила логического вывода.

В соответствии с принципом оптимистической репликации, приложения, выполняющиеся в распределенной среде, находятся либо на этапе изолированного исполнения, либо на этапе реконсильции. При изолированном выполнении приложение оперирует локальной репликой разделяемых данных, приводя их в некоторые новые состояния. Все выполняемые действия записываются в журналах транзакций, являющихся упорядоченными множествами локально применяемых операций. Все действия детерминированы и обратимы. Применение всех операций, занесенных в журнал, к начальной версии данных должно приводить к той же окончательной версии. И наоборот, применение обратных операций в противоположном порядке должно возвращать данные из конечного состояния в первоначальное состояние [4].

Все операции транзакций из двух журналов анализируются с учетом семантики самих операций и семантики ограничений для элементов данных; эти ограничения определяются формально специфицированной информационной моделью. Между операциями

устанавливаются отношения зависимости и отношения порядка (предшествования). На основе анализа отношений определяются классы эквивалентности, импликативные цепочки и свободные группы операций. Для сформированных групп операций переустанавливаются отношения зависимости с другими операциями и группами.

Реализация намеченного подхода тесно связана с проведением логического анализа отношений зависимости и порядка, выявленных между операциями в конкурентных транзакциях. Удобно использовать представление логической системы отношений в виде графа и/или матрицы реконсиляции (сверки) и применить для эффективного поиска решений аппарат математической логики. При этом декомпозиция и редукция логической системы рассматриваются и как самостоятельные этапы общего процесса реконсиляции, предваряющие непосредственный поиск решения, и как алгоритмические элементы единого метода, распространяемого на все переменные и отношения формализованной логической системы.

Главной особенностью рассматриваемого метода является поиск непротиворечивых, семантически корректных решений, удовлетворяющих всем логическим отношениям, при обеспечении их полноты, поскольку для функциональной содержательности решения важно включить в итоговую транзакцию как можно больше операций исходных транзакций [4].

В случаях, когда в логической системе присутствуют только бинарные отношения, удобно иллюстрировать применение метода с помощью введенного графа реконсиляции, имеющего прозрачную графическую нотацию. Для представления множественных отношений в логической системе естественным выглядит обобщение понятия на гиперграф.

В общем случае гиперграф можно задать различными способами. Определим гиперграф согласно [2; 5]. Гиперграф $H(V, E)$ есть пара, где V — множество вершин $V = \{v_i\}$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, а E — множество ребер $E = \{e_j\}$, $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$; каждое ребро представляет собой подмножество V . Вершина v и ребро e называются инцидентными, если $v \in e$. Для $v \in V$ через $d(v)$ обозначается число ребер, инцидентных вершине v ; $d(v)$ называется степенью вершины v . Степень ребра e — число вершин инцидентных этому ребру — обозначается через $r(e)$. Гиперграф H является r -однородным, если все его ребра имеют одинаковую степень r .

Гиперграфы бывают ориентированные и неориентированные. В случае ориентированного гиперграфа (оргиперграфа) ребро $e \in E$ называется гипердугой и представляется как упорядоченная

пара (h, T) , где $h \in V$, $T \in V \setminus \{h\}$, $T \neq \emptyset$. При этом вершина h называется началом дуги e , а каждая вершина из T — конечной вершиной дугие. Будем говорить, что дуга e исходит из вершины h и заходит в каждую из вершин множества T [5]. Также введём обозначение $h \rightarrow (t_1, t_2, \dots, t_k)$, и будем называть такую гипердугу k -дугой.

Существуют разные подходы к определению веса гипердуги. В первом случае [3], вес k -дуги равен числу её концевых узлов, то есть

$$w(h \rightarrow (t_1, t_2, \dots, t_k)) = k \quad (1)$$

В другом случае, вес определяется как максимальный вес рёбер, составляющих гипердугу.

Введем понятие частично ориентированного гиперграфа. Гиперграф $H=(V, E_1, E_2)$ называется частично ориентированным или квази ориентированным гиперграфом, если $E_1 \subset E$ и $E_1 \neq \emptyset$ — множество ребер (звеньев), а $E_2 \subset E$ и $E_2 \neq \emptyset$ множество дуг и $E_1 \cup E_2 = E$. Если $E_1 = E$ и $E_2 = \emptyset$, то гиперграф является неориентированным, а если $E_2 = E$ и $E_1 = \emptyset$, то гиперграф является (полностью) ориентированным. В зависимости от мощности множеств E_1 и E_2 вводятся соответствующие понятия. Если $|E_1| = |E_2|$, то гиперграф будет ориентированно-неориентированным. Если $|E_1| > |E_2|$, то гиперграф будет почти неориентированным. Если $|E_1| < |E_2|$, то гиперграф будет почти ориентированным.

Если элементам гиперграфа приписаны символы (или цепочки символов) из некоторого множества, то он является раскрашенным гиперграфом или гиперграфом с помеченными вершинами и ребрами. Цепочки символов — это имена понятий и отношений онтологии, представленной раскрашенным, частично ориентированным гиперграфом. Такой гиперграф будем называть семантическим гиперграфом.

Существует несколько подходов к определению маршрута наименьшего веса в гиперграфе. В первом из них, нам необходимо расширить решение задачи с гиперграфа на метаграф [6; 1]. Для этого используется обобщение алгоритма Дейкстры на метаграф. При использовании данного подхода подразумевается использование определение веса гипердуг через максимальный вес рёбер, составляющих гипердуге. Во втором — используется обобщённый метод поиска в ширину и глубину [3]. В нём используется итерационное расширение числа вершин в рассматриваемом гиперграфе.

В связи с тем, что в случае, связанном с семантической реконсильацией, используется частично ориентированный гиперграф, можно сделать вывод о целесообразности рассматривания для различных дуг и гипердуг полученного метаграфа комбинированный метод, в основе которого лежит различное определение понятия длина гипердуги для разных гипердуг.

Список литературы:

1. Блюмин С.Л. Метаграфы: матричные представления, связи с орграфами и гиперграфами, с идемпотентной математикой. // Сборник трудов ИИТО. Липецк: ЛГПУ, 2011. 3 с.
2. Визинг В.Г. О раскраске инцидентов в гиперграфе // Дискретный анализ и исследование операций, июль — сентябрь 2007. Серия 1, Том 14, № 3. С. 40—45.
3. Новиков, Ф.А. Искусственный интеллект: представление знаний и методы поиска решений // учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 240 с.
4. Семенов В.А. [и др.] Семантическая реконсильация прикладных данных на основе моделей // Труды Института системного программирования РАН.: Институт системного программирования РАН, 2007. Том 13, № 2. С. 141—164.
5. Хахалин Г.К. Прикладная онтология на языке гиперграфов // Труды второй Всероссийской Конференции с международным участием «Знания-Онтологии-Теории» (ЗОНТ-09). Новосибирск, 20—22 октября 2009.: Новосибирск, 2009. 9 с.
6. Черных О.О., Попова Д.И. Алгоритмы поиска пути наименьшего веса в метаграфе и их практическое применение // 13 Региональная молодежная научная и инженерная выставка «Шаг в будущее, Центральная Россия». Липецк: ЛГТУ, 2010. 15 с.

МОДУЛЬ АКТИВНЫХ ИНТЕЛЛЕКТ-КАРТ

Рубан Иван Анатольевич

аспирант ИСОиП (филиал) ДГТУ г. Шахты

E-mail: ivcgl@yandex.ru

Введение

В настоящее время существует огромное количество массового программного обеспечения для офиса, дома, мобильных устройств и т. д. Но массовая продукция не ориентирована на конкретного потребителя и поэтому часто возникает необходимость небольших усовершенствований существующего программного обеспечения. Безусловно, разработчики стараются предоставить такие возможности по средствам встраивания плагинов, поддержки скриптовых языков, которые позволяют подстроить функциональность программ под собственные нужды. Но такие правки по силу лишь программистам.

Целью работы является найти метод, позволяющий обычным пользователям конфигурировать программное обеспечение. Кроме того, требуется разработать интерфейс взаимодействия с любым приложением. Поэтому метод должен выполнять функцию категоризации информации и передавать результат приложению через поддерживаемый интерфейс.

Поиск метода

Метод интеллект-карт является практическим приложением концепции радиантного мышления [2]. Он является удобным и интуитивно понятным средством по работе с информацией. Интеллект-карты являются пассивными структурами, то есть они не предназначены для категоризации потоков информации.

Существует множество методов категоризации информации, например, метод на основе искусственных нейронных сетей, статистический, вероятностный метод на основе теоремы Байеса и т. д. Наиболее схожим с методом интеллект-карт и гармонично дополняющим является метод деревьев решений.

Деревья решений — это способ представления правил в иерархической, последовательной структуре, где каждому объекту соответствует единственный узел, дающий решение [3]. Деревья решений способны работать с потоками информации с целью ее категоризации. Синтезировав оба метода мы получим «активные» интеллект-карты как инструмент управления информацией.

Активная интеллект-карта является ориентированным графом, состоящим из узлов ввода/вывода и узлов проверки условий. В качестве типа передаваемого значения используется число с двойной точностью — для удобства и универсальности представления данных.

Условия узла позволяют формировать на выходе конкретное значение в случае выполнения результатов проверки входных значений. В случае если ни одно условие не выполняется, то на выходе узла формируется нулевое значение.

Узлы ввода/вывода осуществляют взаимодействие с приложением. В зависимости от получаемого значения, приложение может установить параметр, вызвать функцию или ничего не сделать.

Вычисления выполняются от узлов ввода до окончательных узлов графа по степени получения необходимых данных. Проверка условий и передача значения от узла к узлам происходит только после получения всех входных значений.

Особенности программирования предполагают передачу параметров в функцию, после чего происходит ее вызов. Поэтому узлы вывода являются «сквозными», то есть значения направленные на вывод так же передаются последующим узлам. Данная особенность позволяет управлять последовательностью установки параметров и вызова функций приложения.

Память является важнейшей функцией информационных систем. Но граф не имеет функций хранения данных, поэтому важнейшей и необходимой функциональностью метода является возможность редактирования собственной структуры.

Используемое преимущество интеллект-карт предполагает всеобъемлющее описание. Поэтому необходима возможность хранить описания узлов и используемых значений графа во время его построения.

Реализация метода

Российские разработчики отдают предпочтение среде разработки Delphi [7]. Кроме того, внедрение средств поддержки активных интеллект-карт должно быть наиболее простым и наименее затратным. Поэтому программный модуль был разработан в виде библиотеки классов платформы .Net Framework 4.0 [8], что упрощает подключение модуля для современных высокоуровневых языков. Кроме того, используемая в модуле платформа Hydra [6], позволяет комбинировать управляемый и неуправляемый код в рамках приложения, а так же использовать модуль в приложении, написанном в популярной версии Delphi 7.

Интеграция модуля реализуется через следующие интерфейсы:

1. IAMMPluginEvents — интерфейс событий модуля. Используется для взаимодействия модуля с приложением.
2. IAMMPluginController — интерфейс главного модуля. Используется приложением для управления модулем.
3. IAMMValueRepresentation — интерфейс представления чисел двойной точности в текстовой форме. Используется для интерпретации параметров полученных от приложения.

Модуль содержит необходимый минимум для работы активных интеллект-карт:

1. Интерфейс редактирования и запуска. Возможность редактирования и просмотра графов обеспечивается компонентом GraphSharp [4], который использует современную графику и является удобным, быстрым и бесплатным компонентом представления графов.
2. Управляемый конвейер, имеющий интерфейс управления и реализующий исполнение активных интеллект-карт.
3. База данных, которая хранит активные интеллект-карты и дополнительные описания. Реализована она по средствам бесплатно распространяемой библиотеки sqlite.Net [1].
4. Группа встроенных объектов интерпретации значений даты и времени, идентификаторов объектов активных интеллект-карт.

От разработчиков интегрирующих модуль требуется обеспечить поддержку соответствующих интерфейсов, тем самым обеспечить не только связь модуля и основных сущностей приложения, но и их описательность.

Интерфейс позволяет включать/отключать сохраненные активные интеллект-карты по степени необходимости, что значительно увеличивает удобство использования конфигураций программного обеспечения.

Результаты эксперимента

В качестве эксперимента решено было проверить возможности метода по решению простейшей задачи, а именно вызвать функцию оповещения пользователя в случае, если дело пользователя, сохраненное по средствам тестового приложения, является просроченным. Тестовое приложение представляет собой средство назначения и выполнения дел пользователя. Каждое дело содержит:

1. Уникальный идентификатор ID, являющийся индексом записи в базе данных.
2. Планируемое время начала выполнения дела.
3. Планируемое время окончания выполнения дела.
4. Статус завершенности дела.

В тестовом приложении, как и в любой типичной электронной записной книжке, каждую минуту выполняется проверка сроков выполнения дела. При проверке в модуль передается идентификатор дела, который поступает на вход активной интеллект-карты представленной на рисунке 1.

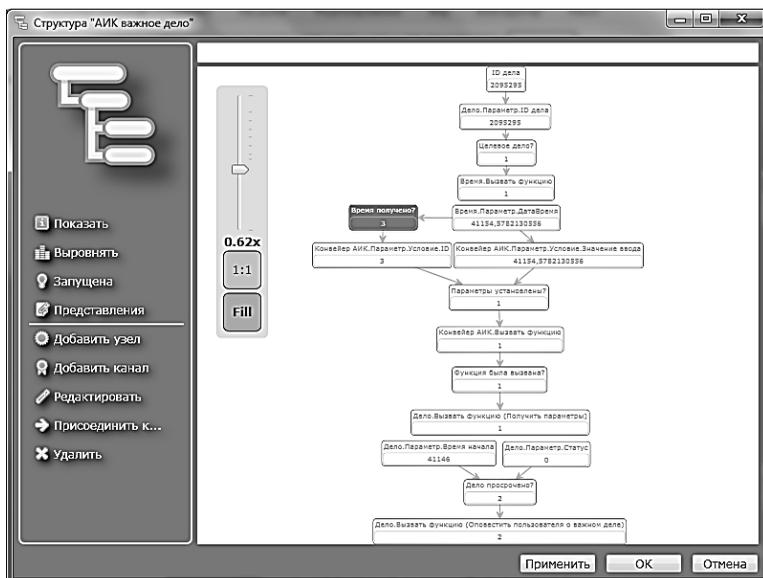


Рисунок 1. Активная интеллект-карта оповещения пользователя о просроченном деле

Приложение передает идентификатор проверяемого дела на узел «ID дела», который имеет соответствующее имя интерфейса. Полученное значение устанавливается в выделенную приложением переменную для использования функцией получения и установки параметров дела. Затем если значение проходит проверку узла «Целевое дело?», то на его выходе формируется индекс функции получения текущей даты в виде числа с двойной точностью. «АИК. Параметр. Условие. Значение ввода» получает текущую дату и время. В случае если полученное время больше нуля, тогда «Время получено?» передает идентификатор условия проверки времени начала дела узла «Дело просрочено?» узлу «Конвейер АИК. Параметр. Условие. ID». Таким образом, «Дело просрочено?» сверяет время начала дела не с нулевым значением, а с текущим временем. Такая

сложность обуславливается тем, что граф выполняет только распознавание — соотносит входные данные с шаблоном, и поэтому для точного сравнения двух входных значений потребуется сверить все возможные комбинации, что не приемлемо. «Параметры установлены?» в случае безошибочных входных данных формирует на выходе индекс функции установки параметра условия узла «Дело просрочено?», иначе индекс ничего не выполняющей функции. Последующие узлы проверяют просроченное ли дело. В случае если дело просрочено вызывается функция оповещения пользователя использующее идентификатор текущего дела для отображения его названия, в противном случае ничего не выполняется.

В таблице 1 представлены условия узлов проверки входных значений.

Таблица 1.

Условия узлов

Имя узла	Предшествующий узел	Условие	Значение	Текстовое представление	Выход
Целевое дело?	Дело. Параметр. ID дела	=	2095295	Важное дело	1
Время получено?	Время. Параметр. Дата Время	>	0	Не выбрано	3
Параметры установлены?	Конвейер АИК. Параметр. Условие.ID	>	0	идентификаторы в базе данных начинаются с единицы	1
	АИК. Параметр. Условие. Значение ввода	>	0	Текущее время не может быть равно 0	
Функция была вызвана?	Конвейер АИК. Вызвать функцию	>	0	Ничего не делать	1
Дело просрочено?	Дело.Параметр. Время начала	<	0 (изменяемое)	Не выбрано	2
	Дело.Параметр. Статус	=	0	Запланировано	

Заключение

Удобный и интуитивно понятный метод разработки интеллект-карт дает возможность обычному пользователю выстроить свою функциональность, не вникая в особенности языков программирования и скриптов. Простота внедрения модуля заключается в написании кода взаимодействия и описания основных функций и параметров приложения, что снимает с разработчиков необходимость решать нечеткие и слабоструктурированные задачи, поставленные пользователем.

В дальнейшем планируется исследовать возможности генерации активных интеллект-карт на основе входных данных. Данная возможность подобна шаблонному программированию [5], когда программист частично выражает свое умение писать часто повторяемые конструкции языка в более абстрактные описатели. Но какой бы ни был уровень абстракции языка, он не позволяет создавать новые описатели во время выполнения приложения, то есть заставить приложение само генерировать нужный код в зависимости от поступающих данных.

Список литературы:

1. Библиотека управления базой данных System.Data.SQLite. [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://sqlite.phxsoftware.com/> (дата обращения: 09.09.2012).
2. Бьюзен Т. и Б. Супермышление/Пер. с англ. Е.А. Самсонов, Мн.: ООО «Попурри», 2003. 304 с.
3. Дюк В. Data Mining — Интеллектуальный анализ данных. http://www.iteam.ru/publications/it/section_92/article_1448 (дата обращения: 09.09.2012).
4. Модуль отображения графов GraphSharp. [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://graphsharp.codeplex.com/> (дата обращения: 09.09.2012).
5. Остерн М.Г. Обобщенное программирование и STL: использование и наращивание стандартной библиотеки шаблонов C++ / Пер. с англ. под ред. А. Махоткина и И.В. Романовского. СПб.: Невский Диалект, 2004. — 544 с.
6. Платформа Hydra 4. [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.remobjects.com/hydra/> (дата обращения: 09.09.2012).
7. Фленов М.Е. Библия Delphi. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 799 с.
8. Шеферд Дж. Программирование на Microsoft Visual C++ .NET. СПб.: Питер, 2007. — 928 с.

2.2. ЭЛЕМЕНТЫ И УСТРОЙСТВА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ БАЗОВЫХ СТРУКТУР МОДЕЛЕЙ ПОВЕДЕНИЯ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ

Иванов Александр Леонидович

канд. техн. наук, доцент, РГСУ, г. Москва

E-mail: Alex_Ivanov1949@mail.ru

Широко известно, что моделью поведения (МЛП) одновыходной комбинационной схемы (КС) является булева функция (БФ) вида:

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_L), x_i \in X, \quad (1)$$

где y — выходной сигнал, соответствующий в каждый момент автоматного времени комбинации входных переменных x_i . При дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) представления БФ X — это конъюнкция БФ. Канонические методы оптимизации БФ подразумевают её минимизацию, в том числе и факторизацию — вынесение за скобки переменных x_i , входящих в разные конъюнкции.

Как было показано в [1] каноническая минимизация теряет смысл в случае микроэлектронной реализации цифрового устройства с жесткой логикой (ЦУ), когда уровень структурной избыточности ЦУ не имеет решающего значения.

Если считать, что структуру ЦУ образует совокупность конструктивных модулей (КМ) и, если решается задача унификации КМ при микроэлектронной реализации ЦУ, а при этом каждый КМ отображает базовую структуру ЦУ [3], то качество КМ при достигнутом уровне унификации целиком зависит прежде всего от интенсивности отказов их коммутационных узлов λ_Q [1].

Условимся, что конструктивный модуль реализует некоторую подфункцию $\varphi_i(X^n) | X^n \subset X$. При этом $y = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_i$. Следовательно, всегда можно положить, что для КМ i -го типа интенсивность его отказов $\lambda_i = \lambda_{Qi}$. В то же время

$$\lambda_{Qi} = \lambda_{Qi1} + \lambda_{Qi2} * q,$$

где λ_{Qi1} и λ_{Qi2} — интенсивность отказов внешнего и внутреннего коммутационных узлов (КУ), соответственно.

Хорошо известно, что заведомо $q=Q_2/Q_1 \geq 1$ и всегда $\lambda_{Q_{i2}} > \lambda_{Q_{i1}}$, а $\lambda_{Q_{i2}} * q \gg \lambda_{Q_{i1}}$.

Непосредственно отсюда следует вывод, что для минимизации критерия качества K [1]:

$$K = \sum_{i=1}^t (a q_i + h_i) / N_i, \quad (2)$$

необходимо, чтобы КМ i -го типа реализовывал бы подфункцию ϕ_i БФ (1), содержащую минимальное число букв — переменных x_i и их отрицаний. Совершенно очевидно, что подфункция ϕ_i должна быть скобочным булевым выражением (СБВ).

В формуле (2) t — число типов КМ; $a=2-3$ — доля затрат на амортизационные отчисления и текущий ремонт ЦУ; q_i — число морфологически однородных подфункций i -го типа в БФ (1) [2]; h_i — число морфологически однородных подфункций i -го типа, реализуемых в КМ дополнительно к основным и коммутируемым либо в процессе изготовления ЦУ металлизацией, если часть подфункций при тестировании ЦУ не воспроизводится, либо в процессе настройки или эксплуатации электрической коммутацией; N_i — число морфологически однородных подфункций i -го типа, реализуемых в КМ.

Если выполняется факторизация Λ_k букв из p_k конъюнкций БФ (1), то эффект факторизации определяется как:

$$\Delta q = \sum_{k=1}^G [\Lambda_k (p_k - 1) - 2], \quad (3)$$

где G — число групп конъюнкций p_k .

Поскольку число КМ i -го типа, помещаемых в ЗИП, определяется по следующей формуле [1]:

$$h_i = \lceil \lambda_i q_i t_n + 1 \rceil, \quad (4)$$

где $\lceil \]$ — знак округления до ближайшего меньшего целого числа;

t_n — время пополнения ЗИП;

T_i — среднее время безотказной работы КМ i -го типа;

$\lambda_i = 1/T_i$ — интенсивность отказов КМ i -типа, то с учетом вышесказанного, выражение (4) приобретает вид:

$$h_i = \lceil [\lambda_{Q_{i1}} + \lambda_{Q_{i2}} (L_i - \Lambda_i p_i + 2) q_i t_n + 1] \rceil \quad (5)$$

где $L_i = r_{ij} p_i$, а r_{ij} — ранг j -той конъюнкции в i -той группе конъюнкций ДНФ БФ (1).

Исходя из выражений (2) и (5), можно сделать вывод о том, что оптимизацию качества МЛП КС можно проводить по пути увеличения надежности КМ, т. е. уменьшения числа букв в БФ (1), при ограничении на общее число КМ, по пути уменьшения числа типов морфологически однородных подфункций [1] φ_i при ограничении на величину Λ_i , либо одновременно по двум названным параметрам при указанных ограничениях, а также ограничении на число букв в подфункции (v).

Определение 1. Морфологической оптимизацией МЛП КС называется её представление в виде декомпозиции таких подфункций φ_i , которые обеспечивают их реализацию КМ минимального числа типов, имеющих заданные конструктивные характеристики.

Поэтому, согласно определению 1, задачей морфологической оптимизации МЛП КС является получение такого скобочного булева выражения, которое представляется декомпозицией морфологически однородных подфункций (базовых структур МЛП КС), являющихся простыми (с одним вложением скобок) скобочными булевыми выражениями (СБВ) при ограничениях:

$$v \leq v_{\text{крит.}}; R \leq R_{\text{доп.}}; \Lambda_i > 0, \quad (6)$$

где $v_{\text{крит.}}$ — максимально допустимое число букв (переменных или их отрицаний) в подфункции;

R — общее число подфункций, реализованных в КМ.

Это обеспечивает максимальный уровень унификации КМ при минимальных значениях КУ и числа КМ в ЗИП при прочих равных условиях.

Правила формирования СБВ связаны с вопросом связности БФ. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_L\}$ — множество булевых переменных, тогда булево пространство M над множеством X определяется как множество комбинаций значений переменных x_i . Комбинация значений некоторого подмножества $X' \subset X$ определяет интервал \mathcal{U}'_i на пространстве M . В алгебраической форме интервал — это конъюнкция \mathcal{U}_L переменных x_i^σ ;

$$\sigma \in \{0,1\}; x_i^0 = \bar{x}_i, x_i^1 = x_i.$$

Понятие связности БФ определено, когда $\forall \mathcal{U}'_i | i = \overline{1, T}$ существует такая последовательность интервалов \mathcal{U}_i , что $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i+1} \neq \emptyset$. Это понятие характеризует связность БФ с точки зрения наличия

пересечения её интервалов, на которых она принимает единичное значение.

Две конъюнкции v_i и v_j считаются связными на множестве X , если пересечение множеств букв, их определяющих, не пусто. Степень связности v_i и v_j :

$$\mu_{ij} = \text{card}(v_i \cap v_j) / (r_i + r_j), \quad (7)$$

где r_i, r_j — ранги конъюнкций v_i и v_j , соответственно.

Степень связности ДНФ БФ (1) — это:

$$\mu_f = \frac{1}{T(T-1)} \left(\sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=i+1}^T \mu_{ij} \right),$$

где T — число конъюнкций ДНФ.

В связи с конкретным значением μ_f различают БФ сильносвязные и слабосвязные. В дальнейшем под слабосвязной БФ будем понимать такое булево выражение, что:

$$\exists \mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j | i, j \in \{\overline{1, T}\} \rightarrow (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \neq \emptyset, i \neq j$$

Очевидно, что факторизация сильносвязной ДНФ БФ дает возможность получения сложного СБВ (имеющего несколько уровней вложения скобок), а факторизация слабосвязной ДНФ — как правило лишь простые СБВ.

При оптимизации БФ с использованием автоматизированных методов факторизации (не канонических) необходимо определить метод поиска морфологически однородных подфункций в формуле СБВ. Для этого следует получить аналитическое выражение порядка следования (\vec{P}_k) [2] бинарных операторов в формуле СБВ.

БФ в классе ДНФ имеет морфологическую структуру, которая характеризуется порядком \vec{P}_d [2]

$$\vec{P}_d = \langle n^0 \text{НЕ}, d[(n-n_i^x) \text{И}, \text{ИЛИ}], (n-n_7^x) \text{И} \rangle, (i = \overline{1-T-1}) \quad (8)$$

при $(n - n_j^x) \leq v_{\text{крит.}}$ ($j \in \{\overline{1, T}\}$),

где n^0 — максимальное число инвертированных переменных в БФ;

d — число периодов следования операторов И-И-...-ИЛИ;

n — число переменных БФ;

n_i^x — число переменных, отсутствующих в i -той конъюнкции;

$v_{\text{крит.}}$ — допустимое число букв в подфункциях.

Пусть, например, задана БФ F вида:

$$F = x_1 x_2 \bar{x}_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 \bar{x}_4 + x_2 x_3 x_4,$$

Тогда $n=4$ и $\vec{P}_d(F) = \langle 2 \text{ НЕ}, 3[\text{ЗИ}, \text{ИЛИ}], \text{ЗИ} \rangle$ при $v_{\text{крит.}}=4$.

Пусть задано начальное покрытие БФ (1) комплексом кубов C_0 . Хорошо известно, что при получении СБВ каноническими методами факторизации, выделяющий куб C_{mj} содержит λ — часть и μ -часть. Считаем, что λ — часть куба C_{mj} ($j=\overline{1, S}$) содержит Λ_j координат. Пусть \tilde{M}_j — множество кубов, у которых из C_{mj} удалены λ — части и пусть $C_j = C_j - 1 \setminus \tilde{M}_j$, $|\tilde{C}_j| = C$, тогда порядок следования бинарных операторов в пределах простого СБВ задается формулой [4]:

$$\vec{P}_{\text{сп}} = \langle n^0 \text{ НЕ}, M\{dj[(n-n_i^x - \Lambda_j - 1)\text{И}, \text{ИЛИ}], (n - n_{|Mj|}^x - |M_j| - \Lambda_j - 1)\text{И}, \Lambda_j \text{ И}, \text{ИЛИ}\}, (C-1)[(n-n_k^x)\text{И}, \text{ИЛИ}], (n-n_c^x)\text{И} \rangle \quad (9)$$

при $(n - n_i^x - \Lambda_j - 1) \leq v_{\text{крит.}}$, $(n - n_k^x) \leq v_{\text{крит.}}$, $\forall k \in \overline{1, C}$, $\Lambda_j \leq v_{\text{крит.}}$, $i=\overline{1, (|M_j| - 1)}$; $j=\overline{1, S}$; $k=\overline{1, (C - 1)}$,

где $M=|\tilde{M}_j|$; dj — число периодов следования бинарных операторов И-И-...-ИЛИ в кубах из множества Mj ;

n_i^x — число переменных отсутствующих в кубах из множества Mj ;

n_k^x — число переменных отсутствующих в кубах из множества \tilde{C}_j .

В формуле (9) выражение

$$\vec{P}_{\varphi_i} = \langle n_\varphi^0 \text{ НЕ}, d_\varphi[(n-n_i^x - \Lambda_\varphi - 1)\text{И}, \text{ИЛИ}], (n - n_{|M_\varphi|}^x - \Lambda_\varphi - 1)\text{И}, \Lambda_\varphi \text{ И} \rangle \quad (10)$$

задает порядок следования бинарных операторов в подфункциях φ_i , являющихся простыми СБВ. Здесь n_φ^0 — число инвертированных переменных в выражении φ_i .

Очевидно, что в случае определения $\vec{P}_{\text{сп}}(f)$, где f — это БФ (1), в формулах (9) и (10) значения $n_i^x = n_{|Mj|}^x = n_k^x = n_c^x = 0$.

Например, для СБВ $F = x_1 \bar{x}_2 x_3 (x_5 \bar{x}_6 + x_7 x_8 + x_4)$

$\vec{P}_{\text{сп}}(F) = \langle 2 \text{ НЕ}, 2[\text{И}, \text{ИЛИ}], \text{ЗИ} \rangle$. Отметим, что литерал можно представить как $x_i^\sigma = x_i^\sigma * 1$, поэтому в формуле \vec{P}_k литерал отмечается оператором «И».

Пусть задана ДНФ БФ $F = \bigvee_{t=1}^T X_t$ множества переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_L\}$, $X_t = \bigwedge_{r=1}^R x_{t_r}^\sigma$, $t=\overline{1, T}$; $x_{t_r} \in \{X\}$; $\sigma \in \{0, 1\}$.

Возможным факторизационным методом получения сложного СБВ может быть алгоритм, на каждом шаге которого всевозможными попарными пересечениями во множестве $C_0 = \{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_T\}$ (здесь X_t — интервал булева пространства) находят общие части интервалов $\tilde{X}_i = \{x_{t_1}, \dots, x_{t_{R_t}}\}$ и выносят за скобки ту конъюнкцию Z из элементов множества $\tilde{Z} = \bigcap_{j=1}^J \tilde{X}_j$; $J \subseteq T$; $Z = \{z_1, \dots, z_s\}$, $z_i \in X$, которая обеспечивает наибольший выигрыш согласно выражениям [4]:

$$\left. \begin{aligned} W(Z) &= m(n-1) - 2 + r, \text{ при } n < T \\ W(Z) &= m(n-1) - 1 + r, \text{ при } n = T \end{aligned} \right\} \max, \quad (11)$$

где m — максимальное число общих переменных в первых n кубах из множества C_0 ;

n — число исходных конъюнкций, в которых после вынесения за скобки остается по одной букве.

Тогда БФ F на первом шаге факторизации приобретает вид:

$$F = Z_1^{(1)} \left(\bigvee_{j=1}^{f_1} X_j^{(1)} \vee \left(\bigvee_{t=f_1+1}^T X_t \right) \right),$$

на втором шаге:

$$F = Z_1^{(1)} \left(\bigvee_{j=1}^{f_1} Z_2^{(1)} \left(\bigvee_{j=1}^{l_2^{(1)}} X_j^{(2)} \right) \vee \bigvee_{j=l_2^{(1)}+1}^{l_1^{(2)}} X_j^{(1)} \right) \vee Z_1^{(2)} \left(\bigvee_{j=f_1+1}^{l_1^{(2)}} X_j^{(1)} \right) \vee \left(\bigvee_{t=l_1^{(2)}+1}^T X_t \right),$$

на S -ом шаге факторизации

$$\begin{aligned} F = & Z_1^{(1)} \left(\bigvee_{j=1}^{f_1} Z_2^{(1)} \left(\bigvee_{j=1}^{f_2} \dots \left(Z_S^{(1)} \left(\bigvee_{j=1}^{l_S^{(1)}} X_j^{(S)} \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \bigvee_{j=l_{S-1}^{(1)}}^{l_{S-1}^{(1)}} X_j^{(S-1)} \right) \dots \right) \bigvee_{j=l_S^{(1)}+1}^{f_1} X_j^{(1)} \vee \dots \right. \\ & \left. \dots \vee \left(\bigvee_{t=l_S^{(S)}+1}^T X_t \right) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где интервал $\tilde{X}_j^{(S)} = \tilde{X}_j^{(S-1)} \setminus \bigcup_{k=1}^S \tilde{Z}_k^{(S)}$,

а $l_S^{(i)}$ — число кубов начального покрытия, из которых извлекаются конъюнкции $Z_S^{(i)}$. $\bigcup_S l_S^{(i)} \subseteq \{f_i\}$; $l_{S-1}^{(i)} \subset l_S^{(i)}$.

Конъюнкция $Z_S^{(1)}$ в БВ (12) определяется как конъюнкция, вынесенная за скобки, уровень вложения которых равен S (скобка снизу для наглядности отмечена символом S), на S -ом шаге факторизации из первых (f_1) L — кубов БФ F . Тот факт, что вынесение за скобки производится из первых L — кубов, отмечен единицей, заключенной в скобки, вверху символа Z_S .

В БВ (12) конъюнкция $Z_1^{(2)}$ может иметь нижний индекс 1. Но это не противоречит сказанному выше, т.к. после всех возможных вынесений за скобки из первых (f_1) L — кубов покрытия подобная процедура повторяется для второй группы (f_2) L — кубов, т.е. алгоритм начинает «работать» снова, и на первом шаге ($S=1$) извлекается конъюнкция $Z_1^{(2)}$. Таким образом может быть сформирована МЛП КС, отображаемая конструктивными модулями с минимальным числом внешних коммутационных узлов.

Выводы и основные результаты:

1. При микроэлектронной реализации цифрового устройства с жесткой логикой (ЦУ), допускающей высокий уровень его структурной избыточности, канонические методы структурного синтеза комбинационных схем (КС) теряют свою актуальность.

2. Решающим фактором оптимизации ЦУ становится получение модели поведения (МЛП) КС в виде декомпозиции морфологически однородных подфункций (базовых структур КС), каждая из которых представляет собой простое скобочное булево выражение (СБВ).

3. Определено понятие морфологической оптимизации МЛП КС и сформулирована её задача.

4. Сформулированы признаки слабосвязных и сильносвязных МЛП КС.

5. Сформулировано правило получения аналитического выражения порядка следования бинарных операторов в формуле СБВ.

6. Предложен факторизационный метод получения сложного СБВ, позволяющего создать МЛП КС, отображаемую конструктивными модулями с минимальным числом внешних коммутационных узлов.

Список литературы:

1. Иванов А.Л., Угрюмов Е.П. Принципы морфологической оптимизации моделей поведения комбинационных схем стационарных восстанавливаемых цифровых устройств. — Электронное моделирование, 1985, т. 7, № 6, с. 31—34.
2. Иванов А.Л., Угрюмов Е.П. Особенности оптимизации структур комбинационных схем. — Известия ВУЗов. Приборостроение, 1980, т. 23, № 8, с. 34—37.
3. Иванов А.Л. Оценка качества операционных автоматов цифровых устройств с жесткой логикой. — Отраслевые аспекты технических наук, 2012, № 6, с. 16—18.
4. Иванов А.Л. Проектирование структурно-избыточных микроэлектронных цифровых устройств. — В кн.: Методы построения алгоритмических моделей сложных систем, Таганрог: ТРТИ. 1979, вып. 4, с. 150—153.

2.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН, КОМПЛЕКСОВ И КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ

ПРОБЛЕМНЫЕ АСПЕКТЫ РЕДАКТИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО КОНТЕНТА

Рыженков Максим Евгеньевич

Аспирант, ПГТУ, г. Йошкар-Ола

E-mail: maxchely@mail.ru

Введение

Обучение в виртуальных 3D образовательных средах в настоящее время перестало быть педагогическим экспериментом и перешло в разряд постоянной учебной деятельности, которую ведут десятки университетов в разных концах мира [2].

В образовательном процессе важным моментом является создание обучающих видеокурсов с целью использования их в асинхронном режиме образования. Данное направление активно развивается и в области виртуальных миров, однако главным образом запись виртуального занятия сохраняется только в формате видео, что не дает возможность раскрыть преимущества 3D представления [4]. Запись виртуального занятия — новый и ценный образовательный контент, так как её возможно просмотреть уже после того, как занятие завершилось, в отличие от обычного занятия. Запись осуществляется в 3D-пространстве и представляет из себя 3D-контент. Однако, как и видеозапись, 3D-запись занятия должна быть отредактирована преподавателем, чтобы исключить ненужные фрагменты и оставить в записи только ценное содержание.

Способы и инструменты, позволяющие учителю редактировать образовательный 3D-контент на основе 3D-записи на текущий момент не исследованы и нуждаются в изучении. Это объясняется тем, что понятие образовательного 3D-контента (виртуальной записи 3D-занятия) появилось относительно недавно. Между тем, как будет показано реализация редактирования 3D-записи сопряжена с решением серьезных технических задач.

Обзор системы воспроизведения 3D-занятия и постановка проблем

Подсистема 3D-записей в vAcademia тесно интегрирована в систему синхронизации виртуального мира, которая позволяет обеспечить различные формы совместной учебной деятельности, что является немаловажным для образовательного процесса в виртуальном мире [2]. Данная система так же реализует алгоритмы и структуры данных для обеспечения идентичности воспроизведения виртуального мира на компьютерах всех участников, а также сохраняющая данные необходимые для восстановления визуального состояния виртуального мира в процессе воспроизведения 3D-записи. Существенным недостатком системы синхронизации является возможность лишь линейного воспроизведения 3D-записи. Такое ограничение обусловлено отсутствием механизма восстановления состояния объектов участвующих в записи на определенный момент времени, что является необходимым условием для корректного воспроизведения записанного занятия и реализации редактора записанных занятий.

Синхронизация состояния виртуального мира обеспечивается за счет эквивалентности реплик виртуального мира [1].

Основным отличием воспроизведения 3D-записи от воспроизведения видеозаписи является то, что видеозаписи основной единицей является кадр, а основной единицей записанного занятия являются действия, которые могут быть как мгновенными, так и длительными во времени. Несмотря на то, что наступление действий можно обозначить как событие, которое может быть рассмотрено как ключевой кадр в видео потоке, все длительные операции над объектами нельзя рассматривать в такой аналогии. Их особенностью является длительность, что существенно затрудняет процесс отсечения фрагментов друг от друга при редактировании. Вследствие этого возникает проблема восстановления состояния объекта на любой из моментов проведения длительной операции. Такие ситуации возникают при быстрой перемотке, удалении, вставке или копировании фрагментов записи. Таким образом, возникает задача оптимальной перемотки воспроизведения трехмерной записи занятия.

Помимо задачи восстановления состояния объекта в определенный период совершения длительного действия, большой проблемой является производительность системы воспроизведения записи в момент склейки двух фрагментов. В момент склейки при переходе от отрисовки одного кадра 3D-сцены к отрисовке кадра следующей 3D-сцены требуется применить ко всем объектам записи

последовательно все изменения свойств синхронизации, которые произошли от конца первого фрагмента и до начала второго фрагмента в оригинальной 3D-записи. Кроме того, существует задача оптимального хранения данных ресурсов, ведь в случае, если из записи был удален фрагмент, хранение связанных с ним ресурсов (если они не были использованы где-либо еще) становится необязательным, они могут быть удалены или перемещены на сервер-архив.

Коллекция ресурсов

При проведении занятий учитель генерирует 3D-контент (запись виртуального занятия) с помощью инструментов виртуального образовательного мира и ресурсов (блоков 2D-контента и пользовательских объектов с настройками интерактивности). Такие ресурсы могут повторяться в записях 3D-занятий, кроме того часть из них должна получаться в результате конвертации учебного материала в требуемый формат. Таким образом, есть необходимость в организации хранилища ресурсов, в которое материалы занятия могут быть загружены заранее и использоваться в требуемом числе занятий без дублирования и повторных преобразований.

Роль такого хранилища в vAcademia выполняет коллекция ресурсов. Коллекция ресурсов имеет иерархическую структуру и состоит из папок и отдельных ресурсов. Ресурсы бывают двух видов: конвертируемые (презентации, пользовательские 3D-модели) и неконвертируемые (картинки). Конвертируемые ресурсы преобразуются на сервере ресурсов в момент загрузки в коллекцию ресурсов, например, презентации преобразуются в набор изображений слайдов, а пользовательские модели преобразуются из формата Collada во внутренний формат VMF5.

Коллекция ресурсов поделена на три части с разными правами доступа: общая коллекция ресурсов (доступ открыт для всех пользователей), коллекция ресурсов занятия (доступ открыт для участников урока), коллекция ресурсов автора (доступна только автору).

Запись виртуального занятия описывается следующим образом

$$P(t) = \{f_1(O_i, t), f_{i+1}(O_{i+1}, t), \dots, f_n(O_n, t)\} \quad (1),$$

где t — время от начала записи,

O — записываемый объект,

$f_i(O_i, t)$ — это дискретная функция преобразования состояния объекта от времени.

Чтобы математическая модель соответствовала задаче генерации 3D-контента, представим выражение (1) в виде

$$P(a)=\{B_1, B_2, \dots B_n\} \quad (2),$$

где a — идентификатор автора записи и B_i — множество данных необходимых для воспроизведения i -го объекта записи $P(a)$. В свою очередь B_i выражается формулой:

$$B_i=\{O_i, A(t), R_i\} \quad (3),$$

где $A(t)$ — функция синхронизируемого состояния объекта от времени t ,

R_i — множество ресурсов, необходимое для воспроизведения объекта O_i в записи.

Пусть ресурс $r \in R_i$, тогда справедливо, что $r \in R_g$ или $r \in R_1$ или $r \in R_a$, где R_g — множество ресурсов «общей коллекции» ресурсов, R_a — «пользовательской коллекции», R_1 — «коллекции ресурсов» занятия.

Коллекция ресурсов в общем виде представляется формулой:

$$R=\{R_1, R_a, R_g\} \quad (4).$$

Директория коллекции ресурсов в свою очередь может быть представлена как

$$F=\{F_p, F_r\} \quad 5),$$

где F_p — множество поддиректорий, а F_r — множество ресурсов в данной директории. Таким образом, директория в коллекции ресурсов задается рекурсивно.

R_1, R_a, R_g по сути представляют собой папки в коллекции ресурсов с особыми правами доступа:

$$R_i=\{F_i, C_i\} \quad (6),$$

где C_i — множество правил доступа к директории.

Для того, чтобы ресурсы удаленного фрагмента 3D-записи можно было удалить, необходимо, чтобы у каждого ресурса был счетчик использования в записях. Если этот счетчик равен 0, то ресурс может быть удален или перенесен на сервер-архив. Таким образом, понятие ресурса в новой интерпретации расширяется:

$$r_i'=\{r, J_i\} \quad (7),$$

где r_i' — расширенный ресурс,

J_i — количество ссылок на ресурс в 3D-записях, которая может быть выражена формулой:

$$J_i = \sum_{k=1}^{k \leq N_R} \sum_{m=1}^{m < N_S(k)} H(P_K, B_M) \quad (8),$$

где N_R — количество всех 3D-записей,

$N_S(k)$ — размер множества P_k , а функция $H(P_K, B_M)$ задана следующим образом:

$$H(P_K, B_M) = \begin{cases} 1, & \exists R : r \in R, \forall R \in B_M \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (9),$$

Таким образом, ресурс может быть удален, если он удален из всех коллекций ресурс и счетчик ссылок равен 0, иначе говоря выполняется система:

$$\begin{cases} J_i = 0 \\ \forall R, r \notin R \end{cases} \quad (10),$$

Если выполняется только первое условие системы, то ресурс может быть перенесен на архивный сервер.

Обработка длительных действий

Для обработки длительных действий, в каждое длительное состояние, устанавливающееся объекту, было добавлено временное смещение от начала выполнения длительного действия относительно времени установки синхронизируемого свойства. Таким образом, при обработке синхронизируемых свойств в клиенте виртуального мира для каждого длительного действия частным образом обрабатывается смещение относительно начала действия. Формула (3) переписывается в виде

$$B_i' = \{B_i, T\} \quad (11),$$

где B_i' — расширенные данные синхронизации свойства объекта,
 T — временное смещение.

Для корректной реализации такого принципа введено требование на инвариантность выполнения длительного действия относительно времени. Таким образом, независимо от любых обстоятельств, временных и сетевых задержек, при воспроизведении одного и того же синхронизируемого действия, декомпозированные аудиовизуальные свойства синхронизируемого объекта в один и тот же момент времени совпадут на любом клиенте виртуального мира.

Оптимальная перемотка записи

Быструю перемотку записи была достигнута несколькими способами: оптимизацией применения конкретных синхронизированных свойств, переводом установки свойства на асинхронный принцип и более оптимальной установкой таких свойств. Так при реализации инструмента рисования на доски на графических потоковых процессорах [3] было получено ускорение в 50 и более раз, что позволяет устанавливать бинарное состояние виртуальной доски менее чем за 1 мс. Асинхронная загрузка тела и одежды аватаров позволила исключить провалы производительности в тех случаях, когда смена тела и одежды аватара происходила в вырезанном фрагменте.

Однако, если бинарное состояние само по себе исключает дублирование установки свойств, то другие свойства в момент «склейки» фрагментов или прокрутки могут быть установлены многократно, что ведет к ухудшению производительности. Поэтому на клиенте в момент проигрывания «склейки» фрагментов посылаются не все синхронизируемые пакеты, относящиеся к вырезанному фрагменту, а набор полных состояний объектов, которые присутствуют в начале второго фрагмента. На клиенте при установке синхронизируемого свойства выполняется проверка, новым ли является его значение.

Побочной задачей становится сборка полных состояний на сервере в момент проигрывания момента «склейки» фрагментов. Данная процедура занимает значительное время, т. к. полное состояние объекта хранится только на момент начала записи, а в течение записи записываются изменения этого состояния. С целью оптимизации, в момент удаления фрагмента записи в месте склейки, сервером генерируется дополнительный набор полных состояний, который используется при проигрывании момента «склейки» фрагментов.

Результаты

Предложенные подходы были реализованы в виртуальном образовательном мире vAcademia [5]. Для редактирования сгенерированного контента был разработан редактор записей занятий [2]. Ключевыми функциями разработанного редактора являются: поиск нужного фрагмента, удаление, копирование и вставка. Так же в качестве дополнительной возможности в редактор записей включены функции отмены и повтора проделанных операций.

Поддержка разрыва длительных синхронизируемых действий позволяет снять какие-либо ограничения на удаление фрагментов

записи. Результаты оптимизации проигрывания момента «склейки» двух фрагментов представлены в табл. 1. Приведены усредненные данные по результатам редактирования около 100 записей в ходе внутреннего тестирования продукта.

Таблица 1.

Результаты оптимизации

Параметры	До	После
Средний размер сетевого пакета	871,1 кб	133,4 кб
Среднее время обработки момента склейки фрагментов	541 мс	73 мс
Среднее время ожидания загрузки ресурсов, нужных на момент начала загрузки, после момента «склейки»	2423 мс	200 мс

Разработанная коллекция ресурсов позволяет загружать различные типы файлов. На примере статистики по открытым и закрытым курсам в «Виртуальной академии», был проведен расчет экономии дискового пространства, составил 23 %. Исключение ресурсов, использованных в удаленных фрагментах, отредактированных записей, позволяет в среднем уменьшить размер дискового пространства сервера для одной записи на 31 %.

Список литературы:

1. Быстров Д.А., Морозов М.Н., Кудрина И.Н. Синхронизация многопользовательских электронных образовательных ресурсов с насыщенным мультимедиа контентом.
2. Рыженков М.Е., Морозов М.Н., Герасимов А.В. Генерация и редактирование 3D-контента в виртуальных образовательных средах. //Образовательные технологии и общество. — 2011. — Т. 14. — № 3. — С. 425—439.
3. Сморкалов, А.Ю. Поддержка операций рисования в системе обработки растровых изображений на потоковых процессорах. Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии в профессиональной деятельности и научной работе». — Йошкар-Ола: МарГТУ, 2011. — С. 201—206.
4. Monahan, T., McArdle, G., Bertolotto, M.: Virtual Reality for Collaborative ELearning. In Journal of Computers and Education, Elsevier Science, 2007, pp. 1339—1353.
5. <http://www.vacademia.com/>.

ИНТЕРАКТИВНЫЙ ГОЛОСОВОЙ ИНТЕРФЕЙС

Феррейра Опасо Елена Владимировна

аспирантка ВолгГТУ, г. Волгоград

E-mail: lenulchik8@mail.ru

Методы и средства взаимодействия пользователя с операционной системой и прикладными программами называют пользовательским интерфейсом [3, с. 49]. Развитие программных средств идет по пути увеличения дружелюбности интерфейса, то есть такого упрощения управления ими, что от пользователя не требуется специальной подготовки, а система создает максимально комфортные условия для его работы. Основной ориентир в совершенствовании вычислительных систем — превращение их в удобного партнера конечного пользователя при решении задач в ходе его профессиональной деятельности.

Для обеспечения наибольшей дружелюбности интерфейса необходим не только более удобный и наглядный доступ к информации, но и интерактивный, то есть диалоговый характер взаимодействия человека с компьютерной информационной системой [6, с. 10]. Под диалогом в данном случае будем понимать регламентированный обмен информацией между человеком и компьютером, осуществляемый в реальном масштабе времени и направленный на совместное решение конкретной задачи. Каждый диалог состоит из отдельных процессов ввода/вывода, которые физически обеспечивают интерактивную связь пользователя и компьютера.

Для решения практических задач структура диалога включает различные возможные способы обмена информацией между пользователем и компьютером, то есть диалоговая система содержит множество запросов и соответствующих им ответных сообщений. Естественный язык — это тип диалога, при котором запрос и ответ со стороны пользователя ведется на языке, близком к естественному. Пользователь свободно формулирует задачу, но с набором установленных программной средой слов, фраз и синтаксиса языка. Система может уточнять формулировку пользователя.

Разновидностью интерактивного естественного диалога является речевое общение с компьютерной системой. В этом случае человеческий голос может преобразовываться, например, в текст, использоваться для интерактивного управления системой или для идентификации личности. В основе данных процессов лежит технология распознавания речи.

Общий принцип распознавания речи можно представить с помощью структурной схемы, приведенной на рисунке 1 [6, с. 163].

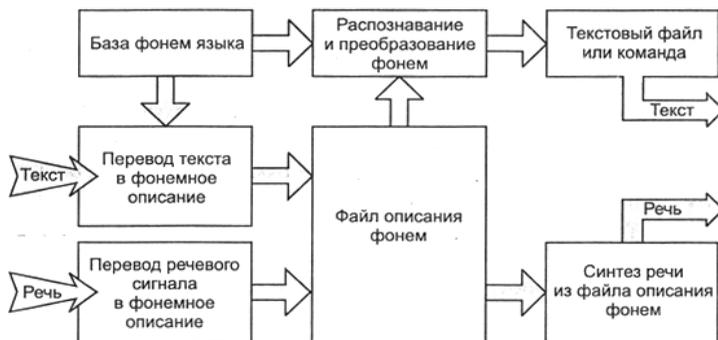


Рисунок 1. Структура технологии распознавания речи

На рисунке 1 показано, что при произнесении слов человек генерирует звуки (фонемы), которые несут информацию о тех символах, с помощью которых эти слова могут быть записаны в виде текста. Заблаговременно формируется база фонем языка, содержащая шаблоны базового набора слов при «усредненной» речи, то есть независимой от диктора. Речь переводится в фонемное описание и поступает в файл описания фонем, откуда это описание поступает в блок распознавания, проводящий сравнение поступившей информации с той, которая хранится в базе. Формируются распознанные слова, которые образуют текстовый файл или команду [6, с. 163—164].

По характеру распознаваемой речи системы речевого ввода разделяются на:

1. системы, ориентированные на распознавание слов, команд и вопросов;
2. системы распознавания предложений и слитной речи;
3. системы идентификации по образцу речи [4, с. 280].

Системы распознавания слов, команд и вопросов обеспечивают выполнение компьютерной системой действий, задаваемых голосом. К системам данного типа относятся:

1. системы распознавания чисел, которые являются средствами распознавания первого поколения (созданная в 1952 году, первая система распознавания речи — система Audrey от Bell Laboratories работала только с числами [2]);

2. системы распознавания отдельных слов — основаны на использовании ключевых слов, хранимых в базе данных системы (например, система Voice Writer от Curzvail или система компании Charles Schwab & Co, распознающие около десяти тысяч слов английского языка [4, с. 280]);

3. системы, строящие диалог с помощью системы голосовых меню (например, Natural Dialogue System от Philips) [4, с. 281]; в настоящее время широко используются IVR-системы (Interactive Voice Response) с технологией распознавания речи **ASR** (Automatic Speech Recognition) и **синтеза речи TTS** (Text to Speech) — интерактивные телефонные информационно-справочные системы, необходимые для автоматизации обработки запросов клиентов.

Системы распознавания предложений и слитной речи делятся на:

1. системы раздельной диктовки — требуют произнесения слов с короткой паузой перед каждым следующим словом (ViaType от IBM, Dragon Dictate от Dragon System) Перечисленные системы позволяют также непосредственно диктовать текст в программы Word, Word Perfect, Internet Explorer, Netscape Navigator. Активный словарь таких систем насчитывает десятки тысяч слов и может пополняться пользователем по его профессиональной тематике.

2. системы распознавания слитной речи (Naturally Speaking от Dragon System, Via Voice от IBM, WildFire от Wildfire Communication, Voice Xpress от Lernout & Hauspie Speech Products) [4, с. 281].

Выделим основные характеристики современных систем автоматического распознавания речи:

1. распознавание слитной речи;
2. словари размером в сотни тысяч слов;
3. возможность работы в голосовом режиме с множеством приложений;
4. работа в реальном времени;
5. работа как с предварительной настройкой на особенности голоса диктора, так и без настройки;
6. точность распознавания речи до 98—99 %.

Данным характеристикам отвечают следующие современные коммерческие программные продукты:

1. Dragon Dictate и Dragon Naturally Speaking от Dragon Systems;
2. Voice Type Dictation и Via Voice от IBM;
3. Voice Xpress Professional от Lernout & Hauspie Speech Products;
4. Listen for Windows от Verbex Voice Systems;
5. Intelligent Voice Recognition System от ComunX и многие другие.

Последние версии программных продуктов **Dragon Naturally Speaking v.11 Premium**, а также **ViaVoice for Windows v.10.0 Pro USB Edition** считаются лучшими на сегодняшний день программами распознавания непрерывной речи. Данные программы могут работать в командном режиме и в режиме диктовки текста. Командный режим позволяет запускать при помощи голоса приложения Windows, управлять работой этих приложений, то есть работать с меню, диалоговыми окнами, инструментальными панелями и другими элементами пользовательского интерфейса, а также форматировать текст, введенный в режиме диктовки [5]. Кроме того, программы позволяют отправлять почту, мгновенные сообщения и осуществлять поиск по интернету и компьютеру голосом.

Системы идентификации по образцу речи относятся к биометрическим технологиям идентификации человека по его уникальным физическим признакам, таким как отпечатки пальцев и рисунок радужной оболочки глаз. Речь характеризуется множеством постоянных физических параметров. Цель идентификации по образцу речи — установить тождественность конкретного известного системе пользователя [4, с. 282].

Взаимодействие пользователя с системой идентификации состоит из трех этапов:

- регистрация пользователя с целью запоминания особенностей его голоса и формирования для него речевой модели;
- тестирование, во время которого выполняется сравнение поступившего образца речи с запомненной речевой моделью пользователя;
- допуска к работе в системе, если тестирование прошло успешно [4, с. 283].

Таким образом, технология распознавания речи позволяет использовать естественный для человека голосовой интерфейс, который является более удобным. В связи с этим, системы автоматического распознавания речи находят широкое применение в различных областях жизнедеятельности человека и открывают новые возможности интерактивного естественного взаимодействия человека и компьютера.

Список литературы:

1. Голосовой пользовательский интерфейс: научная фантастика или реальность? [Электронный ресурс] // Речевые технологии: сайт. Аналитическая статья. — Режим доступа: <http://www.speetech.by/press/11> (дата обращения: 1.09.2012).
2. История систем распознавания речи. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: URL: <http://antonkozlov.ru/istoriya/istoriya-sistem-raspoznavaniya-rechi.html> (дата обращения 30.08.2012).
3. Симонович, С.В. Информатика для юристов и экономистов: Учебник для вузов / С.В. Симонович. СПб.: Питер, 2002. — 688 с.
4. Федотова, Е.Л. Информационные технологии и системы: учеб. пособие / Е.Л. Федотова. М.: ИНФРА-М, 2009. — 352 с.
5. Фролов, А.В. Синтез и распознавание речи. Современные решения / А.В. Фролов, Г.В. Фролов [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.frolov-lib.ru/books/hi/ch06.html> (дата обращения: 29.08.2012).
6. Черников, Б.В. Информационные технологии управления: учебник / Б.В Черников. М.: ИНФРА-М, 2008. — 352 с.

2.4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА МАРШРУТОВ ШКОЛЬНЫХ АВТОБУСОВ

Назмутдинова Айгуль Венеровна

выпускник УГАТУ по специальности «экономист-математик», г. Уфа

E-mail: nav40162@gmail.com

Уже на протяжении многих десятилетий оптимизационным задачам уделяется значительное внимание. К ним относят также задачи в области логистики. **Логистика** — это процесс планирования, обеспечения и контроля эффективного поступления товаров, услуг и сопутствующей информации из места производства к месту потребления, с целью удовлетворить потребности целевой группы. Минимизация временных затрат является актуальным решением проблемы в условиях перевозки пассажиров, в особенности школьников (соблюдение санитарных норм). Кроме того, в сложившейся на сегодняшний день экономической ситуации, когда не каждая семья имеет возможность владеть индивидуальным видом транспорта, организуемый и контролируемый перевоз детей является адекватным решением проблемы [2, с. 96].

Задача о школьном автобусе впервые была поставлена в 1969 г. математиками Р.М. Ньютоном и В.Х. Томасом (SBRP — School Bus Routing Problem). В данной статье рассматриваются два метода решения задачи, позволяющие минимизировать время движения и сформировать маршруты транспортных средств.

В качестве элементов задачи о школьном автобусе выступают:

1. транспортные средства (автобусы);
2. пассажиры (ученики);
3. базовое депо (школа);
4. множество остановок, где должны выйти ученики.

Кроме того, в качестве входных данных используются также количество пассажиров, которое необходимо посадить на каждой остановке; вместимость автобусов (рассмотрен случай, когда все автобусы имеют одинаковую вместимость); время проезда от одной остановки до другой [3].

Неизвестным является количество учеников, которое каждый автобус высаживает на каждой остановке (возможна ситуация, что на каждую остановку студентов можно доставить на разных автобусах). И впоследствии строится маршрут каждого автобуса.

Математически формализовать задачу можно следующим образом: Пусть $G=(S,A)$ — исходный ориентированный граф, в котором $S=\{0,\dots,n\}$ — множество вершин (остановок), причем O_{0i} пункт — это школа.

Дано:

S_i — автобусная остановка ($i=1,\dots,n$),

где n — количество остановок.

O_{0i} пункт — база, откуда отходят все автобусы с пассажирами (школа).

D_i — число пассажиров, которое необходимо высадить на i -й остановке ($i=1,\dots,n$).

A_{ij} — время движения от i -й до j -й остановки ($i,j=1,\dots,n$).

T^k — вместимость k -го автобуса, где $k=1,\dots,K$ — количество имеющихся автобусов.

Неизвестные параметры:

P_i^k — количество пассажиров, которое k -й автобус высаживает на i -ой остановке.

$C(\mathbf{R}^k)$ — время, которое k -й автобус затрачивает на свой маршрут с целью развезти пассажиров по остановкам, где \mathbf{R}^k — подмножество остановок, которые проезжает k -й автобус на своем пути, $\mathbf{R}^k=\{i: P_i^k > 0\}$

Ограничения:

1. Суммарное число пассажиров, которое автобусы высаживают на i -й остановке должно быть равно числу пассажиров, которое необходимо доставить на i -ю остановку:

$$\sum_{k=1}^K P_i^k = D_i \quad (1)$$

2. Суммарное число пассажиров, попавших в k -й автобус не может превышать вместимости данного автобуса:

$$\sum_{i=1}^n P_i^k \leq T^k \quad (2)$$

3. Со всех $k=1,\dots,K$ автобусов пассажиры только высаживаются на остановках $i=1,\dots,n$:

$$P_i^k \geq 0,$$

где P_i^k — целые (3)

Целевая функция: $\max\{C(R^k)\} \rightarrow \min$

т. е. необходимо минимизировать время высадки самого последнего пассажира на последней остановке в маршруте самого «долгого» автобуса. Под маршрутом автобуса k понимается цепь остановок, которые данный k -й автобус проезжает, высаживая пассажиров на каждой из посещаемых, за исключением 0 -го пункта (базы/школы), откуда начинается непосредственное движение автобуса. Из 0 -го пункта отправляются все пассажиры и никто не высаживается [1, с. 139].

Вторая математическая модель имеет следующий линейный вид: введем новую булеву переменную Y_i^k такую, что:

$$Y_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } P_i^k > 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, если $Y_i^k = 1$, это говорит о том, что k -ый автобус высаживает на i -ой остановке пассажиров. В противном случае, $Y_i^k = 0$.

Количество пассажиров, которое k -й автобус высаживает на i -й остановке не может превосходить вместимости k -го автобуса, согласно условию (2), тогда $\frac{P_i^k}{T^k} \in [0; 1]$. Для введенной булевой переменной будет справедливо следующее неравенство:

$$Y_i^k \geq \frac{P_i^k}{T^k} \quad (5)$$

где $i=1, \dots, n$ и $k=1, \dots, K$.

Введем следующую булеву переменную Z_{uv}^k такую, что:

$$Z_{uv}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } k - \text{й автобус едет из } u - \text{й остановки в } v - \text{ю} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6)$$

где $u, v=0, \dots, n$

Если k -й автобус после u -ой остановки заезжает v -ую остановку, он должен будет в v -ой остановке обязательно высадить пассажиров. Таким образом, справедливы следующие ограничения (7.1) — (8.2). При этом важно отметить, что мы рассматриваем ситуацию, когда автобусы после отправления из 0 -го пункта и проезда через все остановки в соответствующих маршрутах необязательно возвращаются в 0 -ой пункт (рассматривается цепь, а не цикл остановок

в маршруте). Таким образом, необходимо исключить вариант, где в качестве v -ой остановки выступает 0 -ой пункт.

$$\sum_{u=0}^n Z_{uv}^k \leq Y_v^k \quad (7.1)$$

$$\sum_{v=0}^n Z_{uv}^k \leq Y_u^k \quad (7.2)$$

$$Z_{00}^k = 0 \quad (7.3)$$

Для любого k -го автобуса, отправляющегося из 0 -го пункта справедливо, что он может попасть в v -ую остановку (8.1), но не сможет вернуться в 0 -ой пункт (базу) — (8.2)

$$\sum_{v=0}^n Z_{0v}^k = 1 \quad (8.1)$$

$$\sum_{u=0}^n Z_{u0}^k = 0 \quad (8.2)$$

Кроме того, количество ветвей между остановками, которые посещает k -ый автобус последовательно, направляясь из u -ой остановки в v -ую, будет равно общему количеству посещенных остановок, на которых k -ый автобус высаживает пассажиров за вычетом 1. (основываясь на правиле, что число связей между вершинами в цепи равно $w=f-1$, где w — количество связей(ветвей), f — количество вершин(остановок):

$$\sum \sum_{uv} z_{uv}^k = \sum Y_u^k - 1 \quad (9)$$

Введем целочисленные переменные α_u^k ($u=0,..n$) такие, что:

$$1 \leq \alpha_u^k \leq \sum_{i=1}^n Y_i^k \quad (10)$$

$$(\alpha_u^k - \alpha_v^k) + n Z_{uv}^k \leq n - 1 \quad (11)$$

Переменные α_u^k имеют смысл номеров остановок в порядке прохождения в маршруте автобуса.

Время, которое затрачивают все автобусы на то, чтобы развезти всех пассажиров на остановки не превышает некоего t , где t — новая переменная:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{v=0}^n \sum_{u=0}^n c_{uv} z_{uv}^k \leq t \quad (12)$$

где c_{uv} — это время, затрачиваемое на перевоз пассажиров от остановки u до v

Тогда целевая функция в нашей задаче примет следующий вид:

$$t + \max \left\{ \sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^n C_{uv} * K, \mathbf{1} \right\} * \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n Y_i^k \rightarrow \min \quad (13)$$

Таким образом, мы составили две модели: линейную и нелинейную. Методы, применяемые для решения задачи, естественным образом будут отличаться друг от друга. Сначала рассмотрим методы решения линейной задачи [5].

Сформулировав линейную целочисленную задачу, мы можем применить точные методы, которые, в свою очередь, гарантируют нахождение оптимального решения. Кроме точных методов существуют аппроксимирующие, эвристические методы. Но, безусловно, нахождение оптимального решения проблемы является главным достоинством точных методов. Однако, имея дело с большой размерностью, попытка полного перебора решений не даст необходимого результата даже на самых современных компьютерах. Произведена попытка определить эти границы «перехода» от решения линейной к нелинейной задаче. Схема проведенной работы выглядит следующим образом: на первом шаге строится матрица кратчайших путей (времени) от i остановки до j . На втором шаге, если решается нелинейная задача, применяется новый эвристический метод гармонического поиска, а в случае линейной задачи — метод ветвей и границ. Точный метод ветвей и границ позволяет найти оптимальное решение — маршруты школьных автобусов. Но при этом нахождение решения возможно лишь при малой размерности (пример 1, количество остановок = 3). В реально жизни мы сталкиваемся с проблемами, где размерность задачи намного больше. При количестве остановок равным 8 математическая среда

Matlab, где производились вычисления, не справилась с решением данной задачи за выделенное компьютером время. Расчет производился более 6000 секунд, после чего происходит прерывание и выдача ошибки: «Превышение временного лимита вычисления». Таким образом, можно сделать вывод, что при реальной размерности задачи, точные методы не разрешают проблемы, и приходится обращаться к эвристическим методам.

Как было отмечено, для решения задачи применяется относительно новый эвристический алгоритм Harmony Search, разработанный в 2005 году [4]. Отличительная черта его адаптации к этой задаче о школьном автобусе заключается в том, что в русской литературе еще не встречалось аналогов применения. Достоинство любой эвристики — быстрота вычисления при любой размерности. Но главный недостаток заключается в том, что, к сожалению, применения эвристические алгоритмы, не удается найти оптимальное решение, а только допустимое. Таким образом, невозможно гарантировать правильность выбора маршрутов школьных автобусов, используя эвристику. Но на сегодняшний день это единственная возможность получить решение такого типа задач — использование эвристических алгоритмов.

Список литературы:

1. Лукинский В.С., Лукинский В.В., Пластунок И.А., Плетнева Н.Г.: Транспортировка в логистике: учеб. пособ. / Спб.:СПбГИУЭ, 2005. — 139 с.
2. Плоткин Б.К., Делюкин Л.А. Экономико-математические методы и модели в логистике: учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ 2010 — 96 с.
3. Dantzig G. B., Fulkerson D.R, Johnson S.M.: Solution of a large-scale traveling salesman problem, Oper. Res.,2(1954), p. 393—410.
4. Geem Z.W.: School Bus Routing using Harmony Search, Johns Hopkins University, Rockville, p. 1—6.
5. Goldberg D.E.: Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning. Addison Wesley, MA, 1989.

2.5. МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ, ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ВУЗОВ НА ПРИМЕРЕ ДАГЕСТАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Куделина Мария Вячеславовна

*студент 5-го курса кафедры «Математические методы
в экономике», Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала*

Магомедова Елена Сергеевна

*канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математические методы
в экономике», Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала
E-mail: maria_k@mail.ru*

В развитии компьютерной техники и программного обеспечения ВУЗы сыграли ключевую роль. В них разрабатываются, испытываются и внедряются передовые проекты в сфере ИТ. С ростом киберпреступности защита конфиденциальной информации и разработок в учебных учреждениях становится особенно актуальной [1, с. 544].

В качестве примера рассмотрим информационную систему Дагестанского государственного университета.

Информационная система «Университет» начала разрабатываться в 2001 году группой сотрудников Вычислительного Центра (ВЦ) Дагестанского Государственного Университета Кабачевским Андреем, Амирбековым Русланом и Алиевым Магомедом и была внедрена в 2006 году. Постоянно развиваясь, система «Университет» представляет собой комплекс приложений, объединенных в единую информационную среду. Это сочетание новейших информационных технологий с современными тенденциями управления ВУЗом.

Главное назначение АИС «Университет» — автоматизация процесса обучения студентов, учет текущей успеваемости, статистика, реализация учебных планов.

Все средства и механизмы, используемые в АИС «Университет», делают ее простой и удобной в изучении и работе. Опыт внедрения АИС в ДГУ показал, что при использовании системы:

- качественно уменьшается нагрузка на методистов и секретарей деканатов;
- сокращается бумажный документооборот;
- упрощается система оповещения студентов;
- повышается безопасность обрабатываемых данных.

При написании АИС «Университет» был использован объектно-ориентированный язык программирования VisualBasic.NET. В системе использован:

- проприетарный набор серверов для нескольких служб Интернета от компании Майкрософт - InternetInformationServices 6.0;
- аппаратно-программный комплекс ASP.NET 1.2;
- программное обеспечение — framework 1.2.

При этом предусмотрено четыре группы пользователей: администраторы, операторы, пользователи, пользователи системы HEAD (статистика). АИС содержит в себе такие приложения, как «Система Деканат», «Студент», «УМУ» (учебно-методическое управление), «HEAD» (рис. 1.).



Рисунок 1. Информационная система «Университет»

1. В приложении «Система Деканат» можно просмотреть составы кафедр университета, списки студентов, контроль модульно-рейтинговой системы и т. п. (рис. 2.)



Рисунок 2. Система «Деканат»

Основная информация о каждом студенте может быть получена при необходимости деканатом факультета (рис. 3.).

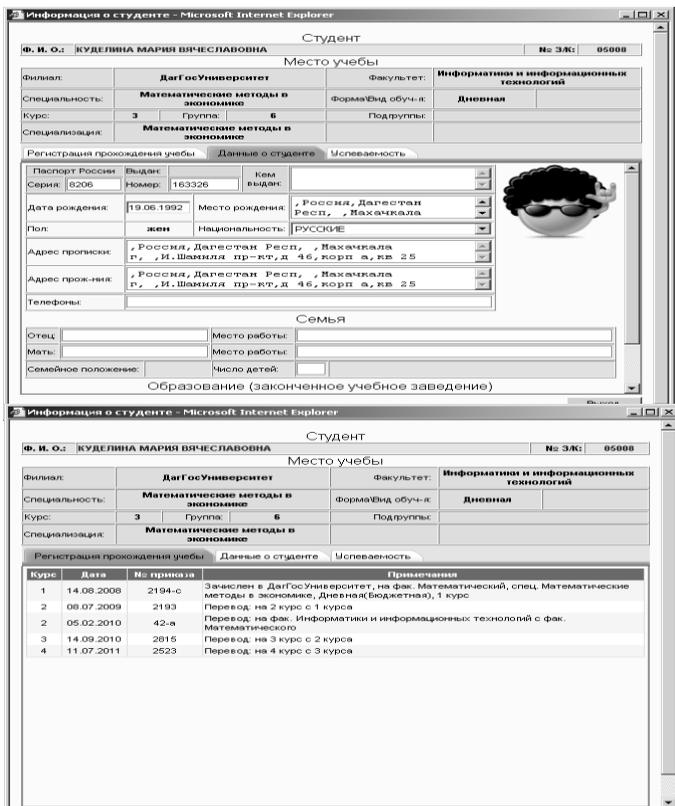


Рисунок 3. Информация о студенте

2. Приложение «Студент» содержит в себе информацию об успеваемости студентов (рис 4.).



Рисунок 4. Приложение «Студент»

Необходимую информацию о результатах модульно-рейтинговой системы можно получить во вкладке «Успеваемость» (рис. 5).



Рисунок 5. Успеваемость отдельного студента

3. Приложение «HEAD» представляет собой возможность статистической обработки информации и ее динамике, необходимой при учете и контроле успеваемости групп (в рамках факультета) и факультетов (в рамках университета) (рис. 6).

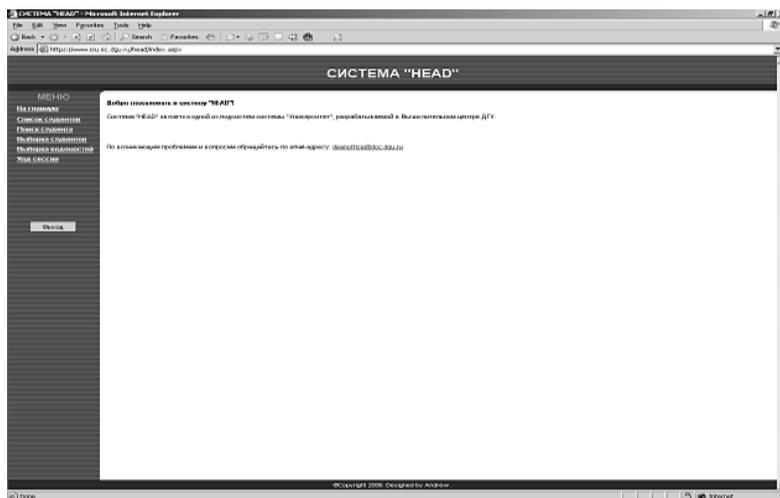


Рисунок 6. Приложение «HEAD»

Как же реализована система безопасности АИС «Университет»?

- защита передачи данных по уровню протокола HTTP реализовано в виде криптографического протокола SSL;
- пароли пользователей шифруются с помощью алгоритма криптографического хеширования SHA1;

- после 5 ошибочных попыток ввода пароля, система блокирует данный IP адрес;
- доступ извне ограничен диапазоном IP на основе ИС (InternetInformationServices);
- в качестве антивируса используется продукт с клиент-серверной архитектурой AVP 6.0 for Windows Servers;

АИС «Университет» находится в постоянной универсализации, в частности:

- учет состава студентов — автоматизация процессов, связанных с обучением студента в университете (зачисление, учет личных данных, проживание в общежитии и т. д.);
- расписание занятий факультетов;
- организация и проведение тестирования абитуриентов;
- организация автоматизированного отдела бухгалтерии.

Аналоги АИС «Университет» используются во многих вузах России, помогая им в организации контроля передачи информации, обеспечения экономической безопасности вуза, сохранности государственных секретов. И, естественно, ключевой задачей вуза должно стать обеспечение безопасности данной системы. От уровня безопасности системы напрямую зависит качество обучения в ВУЗе.

В современных условиях обеспечение информационной безопасности в вузах должно носить комплексный характер, причем как по целям, так и по способам и используемым средствам, включающим традиционные и новые, ориентированные на обеспечение информационной безопасности в автоматизированных системах.

Список литературы:

1. Основы информационной безопасности. Учебное пособие для вузов / Белов Е.Б., Лось В.П., Мещеряков Р.В., Шелупанов А.А.. М.: Горячая линия — Телеком, 2006. — 544 с.

АНАЛИЗ РИСКОВ ЗАЩИТЫ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА БАЗЕ КГУЗ «ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР АЛТАЙСКОГО КРАЯ»

Покрышкина Екатерина Владимировна

*магистр кафедры Систем автоматизированного проектирования
Алтайского государственного технического университета
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул*

Левкин Игорь Васильевич

*канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой САПР, АлтГТУ, г. Барнаул
E-mail: funnykatja@mail.ru*

В связи с вводом новых законов РФ об обработке персональных данных в диагностическом центре Алтайского края был проведен анализ объекта информационной безопасности. Целью работы является анализ рисков системы защиты персональных данных в сфере здравоохранения на примере Диагностического центра Алтайского края.

Актуальность защиты персональных данных обусловлена не только законодательными нововведениями. Сегодня все большее число компаний использует базы данных своих заказчиков, сотрудники компаний имеют полный доступ к персональным данным клиентов. Неудивительно, что с развитием информационных технологий и распространением Интернета специалисты по защите персональных данных сталкиваются с возрастающим объемом утечек персональных данных со стороны злоумышленников и инсайдеров. Поэтому защита персональных данных в организациях становится не только законодательной обязанностью, но и насущной потребностью.

В связи с вышесказанным были поставлены следующие задачи научно-исследовательской работы:

1. Первичная оценка защищенности персональных данных в диагностическом центре с помощью описания объекта информационной безопасности.
2. Наблюдение за системой и возможными атаками, сбор данных об устойчивости системы.
3. Разработка нового алгоритма анализа угроз безопасности персональных данных и рекомендаций по повышению уровня защиты.

Для первичной оценки защищенности персональных данных в диагностическом центре мы произвели описание объекта информационной безопасности и сопоставили с требованиями Федеральной службы технического и экспортного контроля (ФСТЭК).

Основные пункты проверки защищенности информационной системы включают в себя оценку вероятности возникновения, реализуемости, опасности и актуальности угроз [3].

Актуальной считается угроза, которая может быть реализована в информационной системе персональных данных (ИСПДн) и представляет опасность для персональных данных (ПДн). Подход к составлению перечня актуальных угроз состоит в следующем [2].

Для оценки возможности реализации угрозы применяются два показателя: уровень исходной защищенности ИСПДн и частота (вероятность) реализации рассматриваемой угрозы.

Под уровнем исходной защищенности ИСПДн понимается обобщенный показатель, зависящий от технических и эксплуатационных характеристик ИСПДн.

Исходная степень защищенности определяется следующим образом.

1. ИСПДн имеет **высокий** уровень исходной защищенности, если не менее 70 % характеристик ИСПДн соответствуют уровню «высокий» (суммируются положительные решения по первому столбцу, соответствующему высокому уровню защищенности), а остальные — среднему уровню защищенности (положительные решения по второму столбцу).

2. ИСПДн имеет **средний** уровень исходной защищенности, если не выполняются условия по пункту 1 и не менее 70 % характеристик ИСПДн соответствуют уровню не ниже «средний» (берется отношение суммы положительных решений по второму столбцу, соответствующему среднему уровню защищенности, к общему количеству решений), а остальные — низкому уровню защищенности.

3. ИСПДн имеет **низкую** степень исходной защищенности, если не выполняются условия по пунктам 1 и 2.

При составлении перечня актуальных угроз безопасности ПДн каждой степени исходной защищенности ставится в соответствие числовой коэффициент Y_1 , а именно:

0 — для высокой степени исходной защищенности;

5 — для средней степени исходной защищенности;

10 — для низкой степени исходной защищенности.

Под частотой (вероятностью) реализации угрозы понимается определяемый экспертным путем показатель, характеризующий, насколько вероятным является реализация конкретной угрозы безопасности ПДн для данной ИСПДн в складывающихся условиях обстановки. Вводятся четыре вербальных градации этого показателя:

- **маловероятно** — отсутствуют объективные предпосылки для осуществления угрозы (например, угроза хищения носителей информации лицами, не имеющими легального доступа в помещение, где последние хранятся);

- **низкая вероятность** — объективные предпосылки для реализации угрозы существуют, но принятые меры существенно затрудняют ее реализацию (использованы соответствующие средства защиты информации);

- **средняя вероятность** — объективные предпосылки для реализации угрозы существуют, но принятые меры обеспечения безопасности ПДн недостаточны;

- **высокая вероятность** — объективные предпосылки для реализации угрозы существуют, и меры по обеспечению безопасности ПДн не приняты.

При составлении перечня актуальных угроз безопасности ПДн каждой градации вероятности возникновения угрозы ставится в соответствие числовой коэффициент Y_2 , а именно:

0 — для маловероятной угрозы;

2 — для низкой вероятности угрозы;

5 — для средней вероятности угрозы;

10 — для высокой вероятности угрозы.

С учетом выше изложенного коэффициент реализуемости угрозы Y будет определяться соотношением:

$$Y = (Y_1 + Y_2) / 20 = 5 + 6 / 20 = 0,55$$

Для оценки реализуемости угроз предполагается, что нарушитель имеет цель (непосредственно персональные данные), обладает всей информацией, средствами, каналами и способами реализации.

По значению коэффициента реализуемости угрозы Y формируется вербальная интерпретация реализуемости угрозы следующим образом:

- если $0 \leq Y \leq 0,3$, то возможность реализации угрозы признается низкой;

- если $0,3 < Y \leq 0,6$, то возможность реализации угрозы признается средней;

- если $0,6 < Y \leq 0,8$, то возможность реализации угрозы признается высокой.

Обратим внимание лишь на те типы угроз, которые имеют среднюю возможность реализации, а именно:

- Действия вредоносных программ (вирусов);

- Не декларированные возможности системного ПО и ПО для обработки персональных данных;
- Утрата ключей и атрибутов доступа;
- Разглашение информации, модификация, уничтожение сотрудниками, допущенными к ее обработке;
- Перехват за пределами с контролируемой зоны;
- Угрозы выявления паролей по сети;
- Угрозы типа «Отказ в обслуживании»;
- Угрозы удаленного запуска приложений;
- Угрозы внедрения по сети вредоносных программ.

Оценка опасности угроз производится на основе опроса специалистов по защите информации и определяется вербальным показателем опасности, который имеет три значения:

- низкая опасность — если реализация угрозы может привести к незначительным негативным последствиям для субъектов персональных данных;
- средняя опасность — если реализация угрозы может привести к негативным последствиям для субъектов персональных данных;
- высокая опасность — если реализация угрозы может привести к значительным негативным последствиям для субъектов персональных данных [1].

Затем осуществляется выбор из общего (предварительного) перечня угроз безопасности тех, которые относятся к актуальным для данной ИСПДн, в соответствии с правилами, приведенными в таблице 1.

Таблица 1.

Правила отнесения угрозы безопасности ПДн к актуальной

Возможность реализации угрозы	Показатель опасности угрозы		
	Низкая	Средняя	Высокая
Низкая	неактуальная	неактуальная	актуальная
Средняя	неактуальная	актуальная	актуальная
Высокая	актуальная	актуальная	актуальная
Очень высокая	актуальная	актуальная	актуальная

После консультации с администратором безопасности (специалист по защите информации) выявили, что опасность выше «низкой» в диагностическом центре имеют следующие угрозы, данные

которых основаны на предварительном анализе системы перед исследованием:

- Действия вредоносных программ (вирусов);
- Утрата ключей и атрибутов доступа;
- Угрозы выявления паролей по сети;
- Угрозы внедрения по сети вредоносных программ.

Проведенный анализ объекта персональных данных позволил построить перечень угроз и подвести итоги описания объекта по требованиям ФСТЭК.

После внедрения соответствующей регламенту Ф3 152 информационной системы в диагностический центр, необходимо длительное время производить мониторинг системы для выявления её уязвимостей, как на предмет образования угроз информационной системе персональных данных, так и на несоответствие федерального закона № 152. На основе всех полученных данных наблюдений придумать алгоритм анализа рисков системы защиты ПДн. После нахождения подозрительной программы, процесса или запроса, которая может привести к нежелательным последствиям, система сама принимает решение об устранении зарождающейся угрозы. Исследуя информационную систему персональных данных на предмет обнаружения уязвимостей, а также их устранения, она полностью подавляет угрозу еще до её появления, оценивая риски и вероятность возникновения угрозы.

Список литературы:

1. Базовая модель угроз безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных (Утверждена Заместителем директора ФСТЭК России 15 февраля 2008 г.).
2. Методика определения актуальных угроз безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных (Утверждена Заместителем директора ФСТЭК России 14 февраля 2008 г.).
3. Методические рекомендации по составлению частной модели угроз безопасности персональных данных при их обработке в ИСПДн учреждений здравоохранения, социальные сферы, труда и занятости. Москва, 2009 г. — 215 с.
4. Положение об обеспечении безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных, утвержденное постановлением Правительства Российской Федерации от 17 ноября 2007 года № 781.
5. Федеральный закон от 27 июля 2006 года № 152-ФЗ «О персональных данных».

2.6. ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

ГЕНЕРАЦИЯ ТЕКСТУР НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ГРАФИЧЕСКИХ ПОТОКОВЫХ ПРОЦЕССОРАХ

*Сморкалов Андрей Юрьевич
аспирант, ПГТУ, г. Йошкар-Ола
E-mail: asmorkalov@mail.ru*

Введение

Текстура представляет собой растровое изображение, используемое в 3D-графике для наложения на 3D-модели. Генерация текстур позволяет сократить объем данных, необходимых для воспроизведения изображения, в сотни и даже тысячи раз. Существенным недостатком этого подхода является значительное время, требуемое на генерацию растрового изображения.

Графические потоковые процессоры (далее ГПП) обладают большим потенциалом для решения задачи генерации текстур, обладая в сотни раз большим быстродействием, чем центральный процессор, на котором эти задачи решались ранее. Поэтому, учитывая разнообразие методов генерации, актуальной является реализация генерации текстур на основе обобщенной модели обработки изображений на графических потоковых процессорах.

Генерация текстур и её виды

В общем случае различают генерацию статических и динамических текстур. Под статической текстурой понимают изображение, не меняющееся с течением времени. Генерация статических текстур на ГПП также исследована для частных случаев, например, в [4], однако общая модель генерации статических текстур не представлена.

При генерации статических текстур возможны три подхода. Первый предполагает генерацию текстуры на основе некоторого начального изображения и одного или нескольких примененных к нему фильтров. Второй предполагает растеризацию векторных фигур для генерации текстуры. Третий, комбинированный метод, сочетает в себе первый и второй подходы.

Под динамической текстурой понимают изображение, меняющееся с течением времени. Генерация динамических текстур на графических потоковых процессорах была реализована для различных частных случаев (однако общей модели также не представлено), наиболее известные из которых процедурные материалы [2] и постэффекты [3]. В случае использования процедурных материалов вместо полной генерации текстуры при отображении каждого кадра 3D-сцены рассчитывается только цвет пикселей текстуры, необходимых для отображения 3D-объекта. В определенных случаях смысл повторяемая с определенной периодичностью генерация статической текстуры на ГПП для наложения на 3D-объект вместо использования процедурных материалов.

Таким образом, вычислительные возможности ГПП позволяют осуществлять генерацию текстур в десятки раз быстрее, однако общей модели генерации для текстур на потоковых процессорах не представлено. В статье предлагается реализация генерации текстур на основе обобщенной модели обработки изображений на ГПП, позволяющая:

- организовать генерацию статических и динамических текстур, в том числе реализацию процедурных материалов и постэффектов.
- сравнить оптимальность подходов к генерации динамических текстур.
- реализовать вышеописанные подходы к генерации статических текстур.

Математическая модель

Будем рассматривать изображение в цветовой модели RGBA:

$$U(x, y) = \{f_R(x, y), f_G(x, y), f_B(x, y), f_A(x, y)\}, \quad (1)$$

где $f_R(x, y)$, $f_G(x, y)$, $f_B(x, y)$, $f_A(x, y)$ — это дискретные функции, заданные табличным методом. Значения этих функций лежат в диапазоне $[0, 1]$.

Результатом преобразования G изображения A на основе изображения B будем называть $R=G(A, B, x, y)$ (2), где A — это исходное изображение, B — растеризуемая фигура, G — преобразующая функция. Более подробно данная математическая модель обработки изображений описана в [1].

Такая модель позволяет определить цвет каждой точки сгенерированной текстуры в отдельности, т. к. результирующее изображение — функция от координат точки. Модель подходит и для задачи генерации полного изображения текстуры, и для генерации необходимых для отображения 3D-объекта точек текстуры (процедурные материалы). Обобщенность модели позволяет сравнить эффективность 2 подходов к генерации динамических текстур.

Время генерации полной текстуры на ГПП определяется по формуле

$$T_{PT} = T_{PP} + T_1 * W * H \quad (3), \text{ где}$$

T_{PT} — время генерации полного изображения;

T_{PP} — время подготовки к преобразованию;

T_1 — время расчета цвета одного пикселя, т. е. расчета (2) ;

W, H — высота и ширина рассчитываемого изображения.

Время расчета цвета пикселей при использовании метода процедурных материалов определяется как

$$T_{PM} = T_1 * K_{ВП} * K_K \quad (4), \text{ где}$$

T_{PM} — время на генерацию цвета точек процедурного материала,

$K_{ВП}$ — число точек, нужных для отображения 3D-объекта с процедурным материалом,

K_K — максимальное число кадров, в течение которых содержимое динамической текстуры может не меняться.

Отношение T_{PT}/T_{PM} дает возможность оценить эффективность использования того или иного подхода. Стоит заметить, что по мере увеличения $(W*H)$ отношение T_{PT}/T_{PM} стремится к $(W*H)/(K_{ВП}*K_K)$.

На основе описанной математической модели была построена программная модель генерации текстур.

Программная модель

Программная модель обработки изображений на ГПП на основе математической модели, анализа архитектуры потоковых процессоров и возможностей OpenGL подробно описана в [1]. В основе модели лежат четыре основных объекта: Texture, Drawing Target, Filter и Filter Sequence.

Texture — это изображение в форме (1), хранимое в памяти графического потокового процессора (соответствует генерируемой текстуре). Drawing Target — это объект, который определяет изображение-результат и цветовую маску (применение его настроек соответствует времени $T_{ПР}$ в математической модели). При использовании метода процедурных материалов Drawing Target не используется, а объект-результат Texture становится логическим, т. е. не представленным на аппаратном уровне.

Filter — задает преобразование изображения (2) и в общем случае представляет собой функцию с набором предопределенных и пользовательских параметров, возвращающую цвет точки для заданных координат. Filter Sequence - задает последовательность нескольких фильтров с их параметрами, в общем случае позволяя организовать конвейер обработки. Filter/Filter Sequence являются преобразованиями, генерирующими текстуру.

Для применения комбинированного метода генерации статических текстур программная модель была расширена объектом LayeredPicture (см. рис. 1).

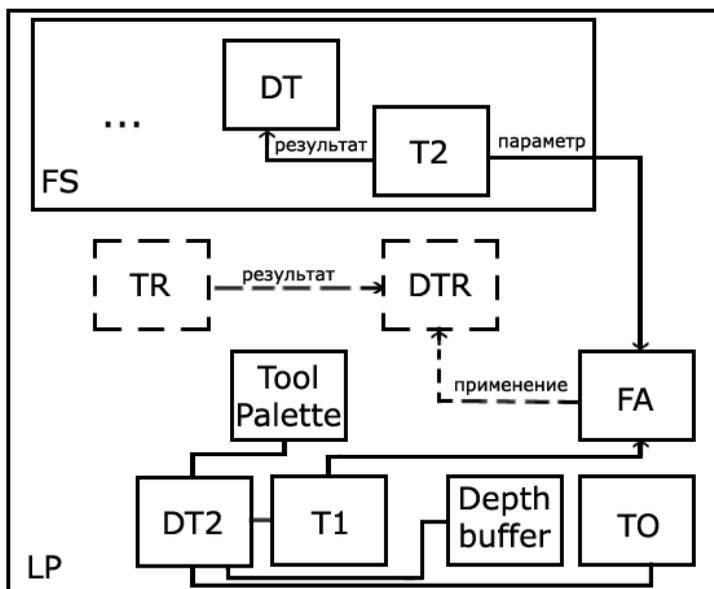


Рисунок 1. Объект LayeredPicture.

Пунктирными линиями обозначены опциональные подобъекты.

Объект LayeredPicture состоит из подобъектов FS типа FilterSequence, ToolPalette с набором связанных с ним подобъектов типа Texture (T1 — текстура-результат и T0 — временная текстура), DepthBuffer и DrawingTarget (DT2), а также предопределенного объекта FA типа Filter (фильтр альфа-смешивания, соответствующий выражению (6)). В FS на рис. 2. выделены подобъекты DT типа DrawingTarget и T2 типа Texture. T2 хранит в себе результирующее изображение FS.

Опционально в LayeredPicture входит подобъект TR типа Texture и DTR типа DrawingTarget. В случае генерации статической текстуры, TR хранит в себе результирующее изображение. В случае использования метода «процедурных материалов», подобъекты TR и DTR физически отсутствуют, оставаясь логическими.

Таким образом, предложенная обобщенная программная модель обработки изображений позволяет осуществлять генерацию статических и динамических текстур, в том числе реализовать процедурные материалы, постэффекты и все три вышеописанных подхода к генерации статических текстур.

Результаты

Обобщенная модель обработки изображений позволяет напрямую сравнить метод процедурных материалов и метод периодической регенерации текстуры как статической. Сравнение на примере генерации текстуры динамического неба (рис. 1) проводилось с использованием ГПП NVidia GF8800GT (табл. 1). T — время, между двумя последовательными обновлениями динамической текстуры. Очевидно, что результаты соответствует приведенной математической модели.

Таблица 1.

Сравнение методов генерации динамической текстуры

T, мс	50	200	500	1000	2500	5000
T _{ГПП} / T _{ГТ}	0.16	0.71	1.63	3.12	7.31	14.53

Генерация статических текстур методом применения серии фильтров была апробирована на примере генерации уникальных текстур кожи аватаров. Преимущество подхода на ГПП иллюстрирует табл. 2. Сравнение проводилось с использованием ГПП NVidia GF8800GT (соответствует T_{ГПП}) и ЦП Intel Core 2 Quad 2.4 ГГц (1 ядро, соответствует T_{ЦП}).

Таблица 3.

Сравнение времени генерации текстуры кожи аватара

Размер	128x128	256x256	512x512	1024x1024	2048x2048
T _{ГПП} , мкс	94	151	280	1041	2001
T _{ЦП} , мкс	495	1654	6032	20853	79504

Заключение

Обобщенная математическая и программная модель обработки изображений на ГПП и описанные подходы к генерации статических и динамических текстур были успешно апробированы в образовательном виртуальном мире vAcademia [5]. Был представлен способ сравнения и определения эффективности способов генерации динамических текстур.

Список литературы:

1. Сморкалов А.Ю. Реализация образовательных инструментов в виртуальных 3D-средах с использованием потоковых процессоров. // Образовательные технологии и общество. — 2011. — № 3. — С. 409 — 425.
2. Ares Lagae, Peter Vangorp, Toon Lenaerts, Philip Dutre. Procedural isotropic stochastic textures by example // Computers & Graphics. — 2010. — № 4. — pp. 312—321.
3. Gilberto Rosado. Motion Blur as a Post-Processing Effect // GPU Gems 3. — Addison-Wesley Professional, 2007. — pp. 575—610.
4. Xiaogang Jin, Chen Shaochun, Xiaoyang Mao. Computer-Generated Marbling Textures: A GPU-based Design System // IEEE Computer Graphics and Applications, IEEE Computer Society. — 2007. — № 2. — pp. 78—84.
5. <http://www.vacademia.com> (дата обращения: 4.06.2011).

СЕКЦИЯ 3.

«ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ»

3.1. ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, В ТОМ ЧИСЛЕ ФИЗИКА ГОРЕНИЯ И ВЗРЫВА

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГОРЕНИЯ ЖИДКИХ ТОПЛИВ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТИ

Аскарова Алия Сандыбаевна

*д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедры Теплофизики и технической
физики, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы*

Болегенова Салтанат Алихановна

*д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедры Теплофизики и технической
физики, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы*

Мукашева Гаухар Канатовна

*магистрант, Казахский национальный университет
имени аль-Фараби, г. Алматы
E-mail: gauhar.010789@mail.ru*

Рахимбаева Назгуль Бахитовна

*магистрант, Казахский национальный университет
имени аль-Фараби, г. Алматы
E-mail: Nazka.90.90@mail.ru*

Моделирование образования дисперсии неизотермических впрысков жидких топлив в развитой турбулентности является актуальным в связи с широким использованием распыленного жидкого топлива (автомобильного, авиационного, дизельного и ракетного) в различных двигателях.

К жидким топливам относятся: нефть, бензин, керосин, солярка, жидкий водород, гептил и др. При горении жидких топлив может быть выделено несколько его стадий. На первой стадии происходит впрыск топлива в камеру сгорания через форсунку с распылением на мелкие капли. Затем происходит испарение капель и смешение их с окислителем, после чего происходит воспламенение и горение топливовоздушной смеси. Первая часть процесса — распыление топлива — во многом определяет эффективность последующего горения, чем меньше капля, тем быстрее происходит испарение, смешение с окислителем и воспламенение. В дизельных двигателях жидкость подается через малые отверстия под действием очень высокого давления, за счет этого происходит распыление топлива — жидкость распадается на тонкие пленки и нити, которые затем принимают капельную форму. В ракетных двигателях распыление часто осуществляют столкновением струй. Это дает возможность подать большое количество топлива в камеру сгорания [2].

Горение жидких топлив отличается рядом специфических особенностей, обусловленных протеканием химических реакций в условиях динамического и теплового взаимодействия реагентов, интенсивного массопереноса при фазовых превращениях, а также зависимостью параметров процесса, как от термодинамического состояния системы, так и от ее структурных характеристик. Многообразие и сложность указанных факторов создают известные трудности при разработке полноценной теории. Существенные результаты в этом направлении могут быть получены на основе последовательного приложения методов механики гетерогенных систем к описанию процессов горения двухфазных сред.

Целью работы является изучение влияния скорости впрыска жидкого топлива на его горение с помощью численного моделирования на основе решения дифференциальных двумерных уравнений турбулентного реагирующего течения. Скорость впрыска жидкого топлива менялась от 150 до 350 м/с.

Ниже приведены результаты численного моделирования по горению впрысков жидких топлив для оптимальных масс и скоростей впрыска и температуры газа в камере сгорания. Рисунок 5 показывает дисперсию и распределение температур капель для трех топлив в камере сгорания при оптимальных массах и скоростей впрыска и температурах газа. На рисунках 1—4 приведены графики изменения со временем (1,1 мс, 1,8 мс, 3 мс, 4 мс) температуры и концентрации паров топлива в камере сгорания при сжигании бензина. Данные получены для оптимальных параметров этого вида топлива [1].

Анализ рисунка 2 показывает изменение температуры в камере сгорания для бензина. Можно заметить, что область максимальных температур (ядро факела) достигает 6,5 см по высоте камеры сгорания, вся остальная часть камеры разогревается до 1300 К.

На следующем рисунке 3 можно наблюдать, как меняется концентрация паров бензина с течением времени: от максимального значения в области до 4 см по высоте камеры сгорания до нуля в конечный момент времени.

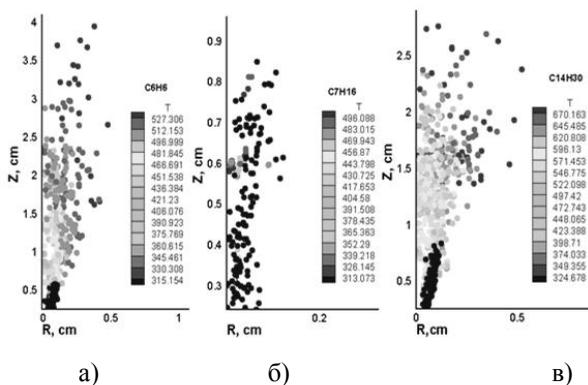


Рисунок 1. Капли жидких топлив при оптимальных параметрах:
а) бензин, б) гептан, в) тетрадекан

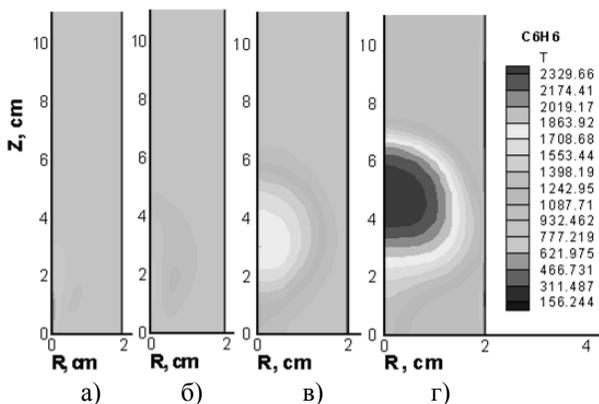


Рисунок 2. Температура в камере сгорания при горении бензина
в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

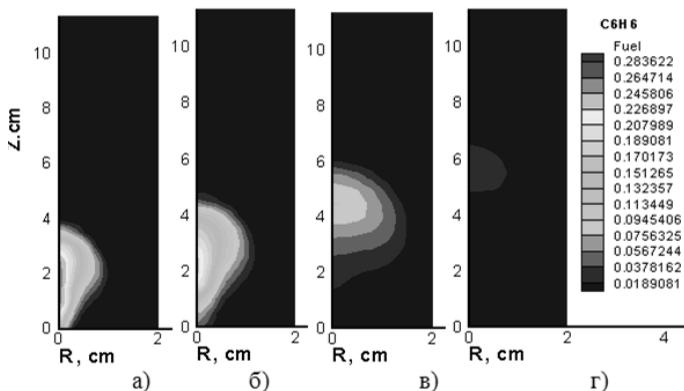


Рисунок 3. Распределение паров топлива в камере сгорания при горении бензина в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

На рисунках 4—7 приведены результаты численных экспериментов по горению гептана и тетрадекана. Результаты для этих топлив аналогичны результатам для бензина в качественном отношении, различаясь количественно. Анализ рисунка 4 показывает, что максимальная температура в камере сгорания при горении гептана равна 1300 К в момент времени 4 мс. Остальная часть камеры сохраняет первоначальное значение температуры 900 К.

На рисунке 5 представлено распределение паров гептана в различные моменты времени. В конечный момент времени для оптимальных параметров концентрация топлива в камере сгорания практически равна нулю.

На рисунках 6—7 представлены результаты численного моделирования горения тетрадекана для оптимальной массы и скорости впрыска тетрадекана и начальной температуры в камере сгорания. Анализ рисунка 6 показывает, что наибольшее значение, до которого прогревается камера сгорания, равно 2022 К, при этом температурный факел расположен выше, чем для гептана (рисунок 4). В камере температура в конечный момент времени 4 мс равна 1200 К.

Из рисунка 7 видно, что в момент времени 4 мс концентрация паров тетрадекана равна нулю, поскольку к этому моменту времени топливо полностью прореагировало с окислителем и в результате этой реакции образовались углекислый газ CO_2 и вода H_2O .

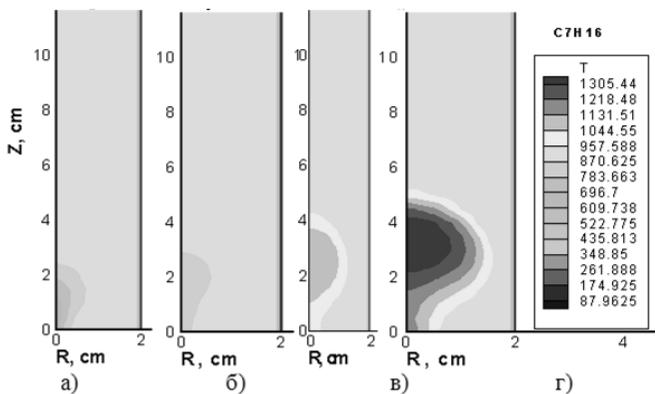


Рисунок 4. Температура в камере сгорания при горении гептана в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

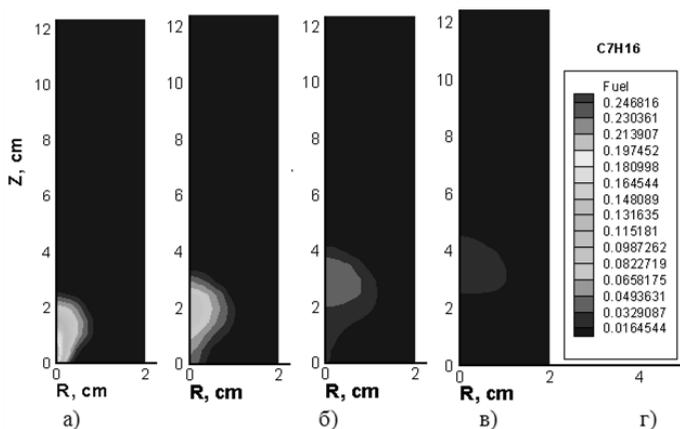


Рисунок 5. Распределение паров топлива в камере сгорания при горении гептана в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

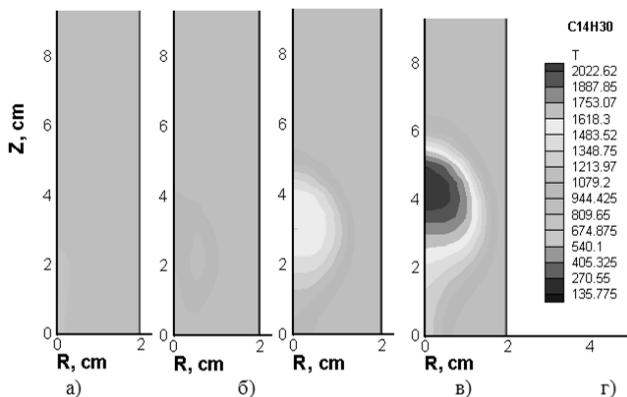


Рисунок 6. Температура в камере сгорания при горении тетрадекана в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

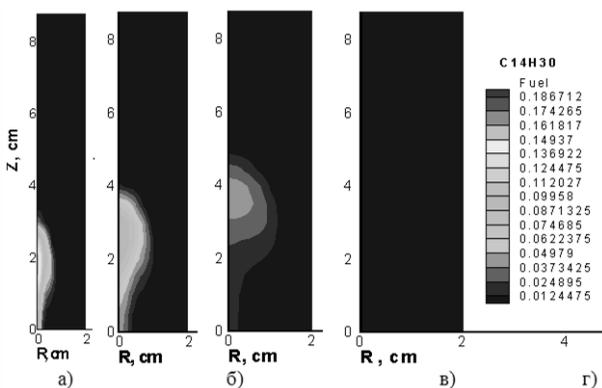


Рисунок 7. Распределение паров топлива в камере сгорания при горении тетрадекана в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

Список литературы:

1. Аскарлова, А.С., Гороховски, М.А., Локтионова, И.В., Рыспаева, М.Ж. Горение жидких топлив в камере сгорания // Известия НАН РК, серия физико-математическая. — 2006. — № 3. — С. 15—20.
2. Ярин, Л.П., Сухов, Г.С. Основы теории горения двухфазных сред. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1987. — 240 с.

3.2. ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ

ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПОТЕРИ В ЭКРАНЕ ОДНОЖИЛЬНОГО ПОДЗЕМНОГО СИЛОВОГО КАБЕЛЯ С ДВУМЯ ТОЧКАМИ СОЕДИНЕНИЯ

Хабдуллина Зауреш Кинаятовна

*канд. техн. наук, профессор кафедры «Электроэнергетика
и теплоэнергетика», Рудненский Индустриальный Институт,
г. Рудный*

Чернова Арина Александровна

*магистрант, Омский государственный технический университет,
г. Омск*

Жангельдин Данияр Талгатович

*магистрант, Омский государственный технический университет,
г. Омск*

Акылбек Бахыт Жомартулы

*магистрант, Омский государственный технический университет,
г. Омск*

Шкуренко Виолетта Андреевна

*магистрант, Омский государственный технический университет,
г. Омск*

Байгелов Булат Шамильевич

*магистрант, Омский государственный технический университет,
г. Омск*

E-mail: arisha-1990@mail.ru

В одножильном кабеле металлический слой покрыт с внешней стороны слоем изоляции, чтобы предотвратить попадание влаги. Он защищает жилу от возможных механических повреждений, служит электростатическим экраном (электростатическое поле заключено

между проводником и экраном) и выступает в качестве возвратного пути для тока короткого замыкания и емкостных нагрузочных токов.

При протекании переменного тока в изолированной жиле кабеля, переменное магнитное поле генерируется вокруг него. Если кабель имеет металлический экран, то он будет находиться в поле. Экран одножильного кабеля выступает в качестве вторичного трансформатора: ток в жиле индуцирует напряжение в экране. Когда экраны одножильных кабелей связаны друг с другом, индуцированное напряжение вызывает ток в замкнутой цепи. Это причина текущих потерь в экранах [1, с. 59]. Сухая зона может быть сформирована вокруг подземного кабеля и приводит к термическим повреждениям изоляции кабеля [2]. Была проделана большая работа с целью минимизации потерь путем введения различных методов соединения и других решений. В связи с важностью потерь в экране в одножильном подземном силовом кабеле с двумя точками соединения были исследованы факторы, влияющие на них.

Потери в экране зависят от тока и могут быть разделены на вихревые потери в экране из-за разности потенциалов между внешней и внутренней стороной металлического экрана и циркуляционные потери, когда оба конца экрана заземлены [1, с. 56].

Исследование проводится с помощью одножильного кабеля выполненного из многожильного медного провода с 800 мм^2 с изоляцией из сшитого полиэтилена и покрытого свинцовым экраном, $F=50 \text{ Гц}$, 66 кВ , параметры которого приведены в таблице 1. Расчеты потерь в экране на циркулирующие и вихревые токи были проведены согласно ГОСТ Р МЭК 60287-1-3-2009 [3].

Таблица 1.

Параметры одножильного кабеля 800 мм^2 со свинцовым экраном

Параметры кабеля	
Размер проводника, мм^2	800
Диаметр проводника, мм^2	34
Средний диаметр оболочки, мм	62,6
Наружный диаметр кабеля, мм	80
Сопротивление медного проводника при 20°C , Ом/км	0,0221
Электрическое сопротивление свинца при 20°C , Ом/м	$21,4 \cdot 10^{-8}$
Электрическое сопротивление меди при 20°C , Ом/м	$1,7241 \cdot 10^{-8}$
Температурный коэффициент меди в К при 20°C	$4 \cdot 10^{-3}$
Температурный коэффициент свинца в К при 20°C	$3,93 \cdot 10^{-3}$

Данные кабеля в таблице 1 приведены при условии:

- Температура земли 20°C;
- Глубина закладки 1,0 м;
- Тепловое сопротивление земли 1,0 К·м/Вт;
- Температура экрана (приблизительно) равна 70°C;
- Текущий ток для медных проводников 995 А.

1. Формирование кабельных макетов

Треугольное расположение и плоское расположение, как правило, используются на практике, поэтому они используются в настоящей статье. В таблице 2 приведены значения токов экрана и потери с учетом фактора расположения кабелей в треугольник и плоское расположение, где:

$\lambda_{ЦЭ}$ — циркулирующие токи экрана, коэффициент потерь проводника, %;

$I_{ЦЭ}$ — циркулирующий ток в экране, А;

$\lambda_{ВЭ}$ — потери в экране на вихревые токи, процент потерь проводника, %;

$I_{ВЭ}$ — вихревые токи в экране, А.

Таблица 2.

Токи в свинцовом экране и потери в них

Фаза	Треугольное расположение				Плоское расположение			
	$\lambda_{ЦЭ}$, %	$I_{ЦЭ}$, А	$\lambda_{ВЭ}$, %	$I_{ВЭ}$, А	$\lambda_{ЦЭ}$, %	$I_{ЦЭ}$, А	$\lambda_{ВЭ}$, %	$I_{ВЭ}$, А
А	21,32	116	2,82	42,1	47,38	172,9	1,41	29,8
В	21,32	116	2,82	42,1	12,18	87,7	5,64	59,6
С	21,32	116	2,82	42,1	52,79	182,5	1,41	29,8

Из таблицы 2 видно, что в треугольнике вихревые потери равны во всех фазах экрана кабеля, в то время как при плоском расположении кабелей вихревые потери во внешних экранах кабелей равны и, как правило, меньше, чем значение потерь в экране среднего кабеля, но надо отметить, что общие вихревые потери в цепи в треугольнике равны потерям в кабелях расположенных в линию.

Для треугольника циркулирующие потери равны, в то время как при расположении в линию циркулирующие потери неравной величины, наименьшее значение в экране среднего кабеля, значения в экранах внешних кабелей имеют разную величину. Таким образом, экран кабеля отстающей фазы имеет более высокое значение. В общем, при расположении треугольником будут более низкие суммарные потери в экране, чем при расположении в линию.

2. Сопротивление жилы кабеля

Из металлов медь и алюминий обычно используются для производства кабелей, так что эффект сопротивления проводника при расчете потерь в экране проверяется по расчету для алюминиевого и медного кабеля с теми же размерами. В таблице 3 приведены значения токов экрана, и их факторы потерь для соприкасающегося треугольника и соприкасающейся прямой для двух одножильных кабелей, один из них состоит из многожильного медного провода и другой выполнен из многожильного провода из алюминия.

Таблица 3.

Токи в экране и факторы потерь в одножильных кабелях из медных и алюминиевых проводов

Проводящий материал	Треугольное расположение				Плоское расположение				Фаза
	$\lambda_{ЦЭ}$, %	$I_{ЦЭ}$, А	$\lambda_{ВЭ}$, %	$I_{ВЭ}$, А	$\lambda_{ЦЭ}$, %	$I_{ЦЭ}$, А	$\lambda_{ВЭ}$, %	$I_{ВЭ}$, А	
Медь	21,32	116	2,82	42,1	47,38	172,9	1,41	29,8	А
	21,32	116	2,82	42,1	12,18	87,7	5,64	59,6	В
	21,32	116	2,82	42,1	52,79	182,5	1,41	29,8	С
Алюминий	13,78	92,6	1,82	33,7	30,62	138,1	0,91	23,8	А
	13,78	92,6	1,82	33,7	7,87	70	3,64	47,6	В
	13,78	92,6	1,82	33,7	34,11	145,8	0,91	23,8	С

Из таблицы 3 видно, что в обоих экранах потери на циркулирующие токи и потери на вихревые токи уменьшаются по мере увеличения удельного сопротивления проводника, т. е. факторы потерь в экране ($\lambda_{ВЭ}$ и $\lambda_{ЦЭ}$) являются обратно пропорциональной величиной сопротивлению проводника, поэтому, когда упоминается о преимуществе меди в качестве проводника с меньшими потерями, в сравнении с алюминиевым кабелем того же размера, нужно помнить, что это свойство меди является недостатком для потерь в экране. Циркулирующие потери в экране могут достигать значений более чем в два раза, превышающие потери в жиле в зависимости от расстояния между фазами. Вихревые потери в экране обратно пропорциональны расстоянию между фазами, поэтому можно сделать вывод, что для больших кабелей влияния расстояния на общие потери в экране гораздо меньше, чем для циркулирующих потерь

в экране в отдельности. Вихревые потери в экране уменьшаются быстрее при меньшем интервале, когда как при большом расстоянии они уменьшаются очень медленно. Вихревыми потерями в экране можно пренебречь при большом расстоянии.

3. Чередование фаз

Приведенные выше расчеты выполняются при прямом расположении фаз ABC. Для изучения эффекта чередования фаз на циркулирующие потери в экране с двумя точками соединения, проводятся расчеты с использованием В-А-С и В-С-А конфигураций. Результаты представлены в таблице 4. В этой таблице циркулирующие потери в экране каждой фазы одножильного кабеля рассчитываются в соответствии с тремя различными чередованиями фаз кабеля.

Из полученных результатов в таблице 4 видно, что центральный кабель имеет самые низкие циркулирующие потери экрана в связи с магнитным аннулированием. Циркулирующие потери внешнего кабеля зависят от чередования фаз и его расположения.

Таблица 4.

Коэффициент циркулирующих потерь в экранах кабелей с различным чередованием фаз с расположением в линию

	Конфигурация фаз		
	ABC	BAC	BCA
$\lambda_{ЦЭ-А}$	47,38	12,18	52,79
$\lambda_{ЦЭ-В}$	12,18	52,79	47,38
$\lambda_{ЦЭ-С}$	52,79	47,38	12,18

4. Ток в жиле

Для изучения влияния проводника тока на потери в экране, потери в экране рассчитаны при двух разных значениях тока в жиле (полный ток и 1/2). Результаты представлены в таблице 5.

Из таблицы 5 видно что, токи в экране (вихревые и циркулирующие) удваиваются с удваиванием тока жилы. Коэффициенты потерь в экране (вихревые и циркулирующие) не изменились, поскольку отношение тока в экране и тока в проводнике фиксированы.

Таблица 5.

Ток в экране и их коэффициенты потерь для одножильных кабелей с полным номинальным током и с половинным значением тока

	Треугольное расположение				Плоское расположение				Фаза
	$\lambda_{ЦЭ}, \%$	$I_{ЦЭ}, А$	$\lambda_{ВЭ}, \%$	$I_{ВЭ}, А$	$\lambda_{ЦЭ}, \%$	$I_{ЦЭ}, А$	$\lambda_{ВЭ}, \%$	$I_{ВЭ}, А$	
Полный номинальный ток	21,32	116	2,82	42,1	47,38	172,9	1,41	29,8	А
	21,32	116	2,82	42,1	12,18	87,7	5,64	59,6	В
	21,32	116	2,82	42,1	52,79	182,5	1,41	29,8	С
Половинное значение тока	21,32	58	2,82	21	47,38	86,4	1,41	14,9	А
	21,32	58	2,82	21	12,18	43,8	5,64	29,8	В
	21,32	58	2,82	21	52,79	91,2	1,41	14,9	С

5. Бронирование кабеля

В целях защиты кабелей от механических повреждений используется бронирование [4]. Бронированные одножильные кабеля обычно использующиеся в системах переменного тока и имеют немагнитные брони. Это происходит из-за очень высоких потерь, которые имели бы место в близко расположенных одножильных кабелей с магнитным бронированием. Для расчета потерь в экране и броне для одножильных кабелей с немагнитной броней, но с помощью параллельного соединения сопротивлений экрана и брони вместо отдельного сопротивления экрана и значения квадратного корня из диаметра экрана и брони ставиться средний диаметр экрана, т. е.

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_3 \cdot R_6}{R_3 + R_6};$$

$$d = \sqrt{\frac{d_3^2 + d_6^2}{2}};$$

$$I_3 = \frac{R_{\text{экв}}}{R_3} \cdot I_{63};$$

$$I_3 = \frac{R_{\text{экв}}}{R_6} \cdot I_{63};$$

где: $R_{\text{экв}}$ — эквивалентное сопротивление параллельно соединенных экрана и брони (Вт/м);

R_6 — сопротивление брони на единицу длины кабеля при максимальной рабочей температуре (Вт/м);

d — средний диаметр экрана и брони (мм);

d_3 — средний диаметр экрана (мм);

d_6 — средний диаметр брони (мм);

I_3 — ток в экране (А);

I_6 — ток в броне (А);

I_{63} — сумма токов в броне и экране (А).

Таким образом, использование брони, по крайней мере, эквивалентно снижению сопротивления экрана, если $R_{\text{экв}}$ ниже критического значения сопротивления экрана, то использование брони может привести к уменьшению или увеличению суммарных циркулирующих потерь брони и экрана, а если $R_{\text{экв}}$ выше критического значения сопротивления экрана, то использование брони приведет к увеличению суммарных циркулирующих потерь брони и экрана, в то время, как для суммарных вихревых потерь брони и экрана, а также вихревого тока брони и экрана приведет к увеличению значений, потому что они обратно пропорциональны сопротивлению экрана.

Если сопротивление брони равно сопротивлению экрана, I_{63} одинаковый в экране и броне, то ток в броне будет равен току в оболочке, а если сопротивление брони ниже, чем сопротивление экрана, ток в броне будет выше, чем ток в экране, и наоборот. Параметры кабеля, использованного в этих расчетах, приведены в таблице 6.

Таблица 6.

Бронированный одножильный кабель. Медь со свинцовым покрытием и алюминиевой проволокой в параметрах бронирования

Наружный диаметр кабеля, мм	93
Средний диаметр брони, мм	82,5
Средний диаметр экрана, мм	62,6
Сопротивление медного проводника при 20°C, Ом/км	0,0221
Диаметр проводника, мм	34
Толщина свинца, мм	2,6

В таблице 7 приведены значения токов экрана и соответствующих потерь для бронированных одножильных кабелей расположенных в треугольник и в линию,

где: $I_{ЦЭ-А}$, $I_{ЦЭ-В}$, $I_{ЦЭ-С}$ — циркулирующий ток в экранах фаз А, В и С соответственно;

$\lambda_{ЦЭ-А}$, $\lambda_{ЦЭ-В}$, $\lambda_{ЦЭ-С}$ — циркуляционный коэффициент потерь в экранах фаз А, В и С соответственно;

$I_{ВЭ-А}$, $I_{ВЭ-В}$, $I_{ВЭ-С}$ — вихревые токи в экранах фаз А, В и С соответственно;

$\lambda_{ВЭ-А}$, $\lambda_{ВЭ-В}$, $\lambda_{ВЭ-С}$ — коэффициент вихревых потерь в экранах фаз А, В и С соответственно;

$I_{ЦБ-А}$, $I_{ЦБ-В}$, $I_{ЦБ-С}$ — циркулирующий ток в броне фаз А, В и С соответственно;

$I_{ВБ-А}$, $I_{ВБ-В}$, $I_{ВБ-С}$ — вихревые токи в броне фаз А, В и С соответственно;

$\lambda_{ВБ-А}$, $\lambda_{ВБ-В}$, $\lambda_{ВБ-С}$ — коэффициент вихревых потерь в броне фаз А, В и С соответственно;

$\lambda_{ЦБ-В}$, $\lambda_{ЦБ-В}$, $\lambda_{ЦБ-С}$ — циркулирующий ток в броне фаз А, В и С соответственно.

Из полученных результатов с использованием бронированного одножильного кабеля вместо небронированного одножильного кабеля, которые приведены в таблице 7, можно отметить, что в сочетании экран-броня циркулирующие потери ($\lambda_{ЦЭ} + \lambda_{ЦБ}$) и вихревые потери ($\lambda_{ВЭ} + \lambda_{ВБ}$) увеличились за счет того, что $R_{э\text{кв}}$ сопротивление стало выше критического значения сопротивления экрана. Циркулирующие и вихревые потери в экране меньше, чем циркулирующие и вихревые потери в броне, потому что сопротивление брони ($R_6 = 0,39 \text{ Ом/км}$) ниже, чем сопротивление экрана ($R_3 = 0,5 \text{ Ом/км}$). Отношение тока в экране к току в броне одножильного кабеля зависит в основном от ($R_{э\text{кв}}/R_3$) отношения.

Таблица 7.

**Токи экрана и брони и их коэффициенты потерь
для немагнитных бронированных одножильных кабелей**

Параметры	Треугольное расположение	Плоское расположение
$\lambda_{ЦЭ-A} + \lambda_{ЦБ-A}$	46,01	87,35
$\lambda_{ЦЭ-B} + \lambda_{ЦБ-B}$	46,01	26,8
$\lambda_{ЦЭ-C} + \lambda_{ЦБ-C}$	46,01	110,76
$\lambda_{ВЭ-A} + \lambda_{ВБ-A}$	6,59	3,30
$\lambda_{ВЭ-B} + \lambda_{ВБ-B}$	6,59	13,19
$\lambda_{ВЭ-C} + \lambda_{ВБ-C}$	6,59	3,30
$I_{ЦЭ-A}$	112,1 А	154,4 А
$I_{ЦЭ-B}$	112,1 А	85,5 А
$I_{ЦЭ-C}$	112,1 А	173,9 А
$\lambda_{ЦЭ-A}$	20,10	38,16
$\lambda_{ЦЭ-B}$	20,10	11,71
$\lambda_{ЦЭ-C}$	20,10	48,39
$I_{ВЭ-A}$	42,4 А	30 А
$I_{ВЭ-B}$	42,4 А	60 А
$I_{ВЭ-C}$	42,4 А	30 А
$\lambda_{ВЭ-A}$	2,88	1,44
$\lambda_{ВЭ-B}$	2,88	5,79
$\lambda_{ВЭ-C}$	2,88	1,44
$I_{ЦБ-A}$	144,5 А	199,1 А
$I_{ЦБ-B}$	144,5 А	110,2 А
$I_{ЦБ-C}$	144,5 А	224,2 А
$\lambda_{ЦБ-A}$	25,91	49,19
$\lambda_{ЦБ-B}$	25,91	15,09
$\lambda_{ЦБ-C}$	25,91	62,37
$I_{ВБ-A}$	54,7 А	38,6 А
$I_{ВБ-B}$	54,7 А	77,3 А
$I_{ВБ-C}$	54,7 А	38,6 А
$\lambda_{ВБ-A}$	3,71	1,86
$\lambda_{ВБ-B}$	3,71	7,43
$\lambda_{ВБ-C}$	3,71	1,86

Следует обратить внимание на потери в экранах одножильных кабелей с двумя точками соединения, так как их значения могут превышать значения потерь в жилах. Вихревыми потерями в экранах можно пренебречь относительно циркулирующих потерь в экране при большом сопротивлении экрана и большом расстоянии между жилами. Вихревые потери в экране обратно пропорциональны таким величинам, как сопротивление экрана, сопротивление жилы кабеля и расстояние между кабелями, в то время как эти величины пропорциональны току жилы. Циркулирующие потери в экране пропорциональны расстоянию между кабелями и току жилы, и могут уменьшаться при значительном увеличении сопротивления экрана или большом снижении сопротивления в экране, но при этом приводит к большим значениям циркулирующего тока. Чередования фаз оказывает большое влияние на циркулирующие потери в экранах кабелей с расположением в линию. При расположении кабелей в треугольник потери в экранах имеют симметричные значения.

Список литературы:

1. Дмитриев М.В. Потери в экранах однофазных силовых кабелей 6—500 кВ и эффективность транспозиции экранов // Новости Электротехники. — 2009. — № 1(55). — С. 56—65.
2. Идельчик В.И. Электрические системы и сети: Учебник для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1989. — 592 с.
3. МЭК 60287-1-1-2006. Кабели электрические. Расчет номинального тока. Часть 1—3. Уравнения номинальных токовых нагрузок (при 100 %-ном коэффициенте нагрузок) и расчет потерь. Общие положения.
4. Правила устройства электроустановок. Передача электроэнергии. 7-е изд. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2004. — 160 с.

«АКТУАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ И ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Материалы международной заочной научно-практической
конференции

25 сентября 2012 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 02.07.12. Формат бумаги 60x84/16.
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 8,875. Тираж 550 экз.

Издательство «Сибирская ассоциация консультантов»
630075, г. Новосибирск, Залесского 5/1, оф. 605
E-mail: mail@sibac.info

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного
оригинал-макета в типографии «Allprint»
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3