



# ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

*Сборник статей по материалам  
XXI международной научно-практической  
конференции*

№ 8 (20)  
Август 2014 г.

Издается с декабря 2012 года

Новосибирск  
2014

УДК 50  
ББК 20  
Е 86

Ответственный редактор: Гулин А.И.

Председатель редакционной коллегии:

**Козьминых Владислав Олегович** — д-р хим. наук, проф., зав. кафедрой химии естественнонаучного факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета.

Редакционная коллегия:

**Гукалова Ирина Владимировна** — д-р геогр. наук, доц. ведущий научный сотрудник Института географии НАН Украины, доц. кафедры экономической и социальной географии Киевского национального университета им. Т. Шевченко;

**Данилов Виктор Павлович** – канд. с.-х. наук, зам. дир. по научной работе СибНИИ кормов СО Россельхозакадемии;

**Елисеев Дмитрий Викторович** — канд. техн. наук, доцент, бизнес-консультант Академии менеджмента и рынка, ведущий консультант по стратегии и бизнес-процессам, «Консалтинговая фирма «Партнеры и Боровков»;

**Зеленская Татьяна Евгеньевна** — канд. физ.-мат, доц. кафедры высшей математики Югорского государственного университета;

**Романова Алла Александровна** — канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной физики Санкт-Петербургского государственного экономического университета;

**Рыжков Павел Павлович** — канд. физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры физики Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, чл.-кор. Международной академии наук экологии, безопасности человека и природы, член Экспертного совета по энергоэффективности зданий и сооружений Санкт-Петербурга;

**Сулеймен Ерлан Мэлхұлы** — д-р филос. наук, канд. хим. наук, директор института прикладной химии при Евразийском национальном университет им. Л.Н. Гумилева;

**Харченко Виктория Евгеньевна** — канд. биол. наук, доц. Луганского национального аграрного университета;

**Яковичина Татьяна Федоровна** — канд. с.-хоз. наук, доц., заместитель заведующего кафедрой экологии и охраны окружающей среды Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры, член Всеукраинской экологической Лиги.

**Е 86 Естественные и математические науки в современном мире /**  
Сб. ст. по материалам XXI междунар. науч.-практ. конф. № 8 (20).  
Новосибирск: Изд. «СибАК», 2014. 100 с.

Учредитель: НП «СибАК»

Сборник статей «Естественные и математические науки в современном мире» включен в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

При перепечатке материалов издания ссылка на сборник статей обязательна.

## **Оглавление.**

<b>1. Математика</b>	<b>6</b>
<b>1.1. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление</b>	<b>6</b>
МЕТОДЫ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ Гридина Александра Анатольевна Сабитова Юлия Камилевна	6
СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО УСЛОВИЮ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ Смакова Фаниля Фиргатовна Сабитова Юлия Камилевна	11
<b>1.2. Математическая физика</b>	<b>16</b>
ВЫРОЖДЕННОЕ СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА Хусаинова Галина Владимировна Хусаинов Дамир Зиннурович	16
<b>1.3. Математическая логика, алгебра и теория чисел</b>	<b>22</b>
УДИВИТЕЛЬНЫЙ ЧИСЛОВОЙ КОРТЕЖ Мамедяров Даглар Мамедярович	22
ГРУППЫ ЧИСЛОВЫХ «СОЗВЕЗДИЙ» Мамедяров Даглар Мамедярович	27
<b>Секция 2. Информационные технологии</b>	<b>45</b>
<b>2.1. Системный анализ, управление и обработка информации</b>	<b>45</b>
ПОТРЕБНОСТЬ ОРГАНИЗАЦИЙ В НОВОЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ВЫБОРА СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ Сироткин Григорий Вячеславович	45

<b>Секция 3. Физика</b>	<b>53</b>
<b>3.1. Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры</b>	<b>53</b>
ЭКСПЛУАТАЦИОННАЯ НАДЁЖНОСТЬ ГОРНЫХ МАШИН	53
Афанасьев Юрий Александрович Жадан Григорий Юрьевич	
<b>Секция 4. Биология</b>	<b>58</b>
<b>4.1. Экология и природопользование</b>	<b>58</b>
ВОЗДЕЙСТВИЕ ЛЕГКИХ УГЛЕВОДОРОДОВ НА ВЫСОКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ РАСТИТЕЛЬНЫЙ ТЕСТ-ОБЪЕКТ TRADESCANTIA (CLON 02)	58
Аниськина Мария Валерьевна	
ПРОРАСТАНИЕ СЕМЯН ОГУРЦОВ И РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ВОДЫ	63
Лыгин Сергей Александрович Тебенькова Ангелина Павловна	
ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЖИВОЙ ОРГАНИЗМ (НА ПРИМЕРЕ ТОМАТА)	70
Лыгин Сергей Александрович Пурина Елена Сергеевна Лыгина Раиса Ивановна	
МОБИЛЬНОЕ РЕАГИРОВАНИЕ ПЧЕЛИНЫХ СЕМЕЙ НА МЕХАНИЧЕСКУЮ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНУЮ СТИМУЛЯЦИЮ	76
Тобоев Вячеслав Андреевич Кириллов Алексей Васильевич	
<b>4.2. Ветеринария</b>	<b>90</b>
ИННЕРВАЦИЯ ОРГАНОВ ТАЗОВОЙ ПОЛОСТИ КОТОВ	90
Ситдиков Рашид Исламутдинович Миншагаева Фарида Имамутдиновна Шамсутдинова Нажия Вагизовна	

<b>Секция 5. Химия</b>	<b>95</b>
<b>5.1. Неорганическая химия</b>	<b>95</b>
МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ $\text{V}_3\text{Nb}_{1-x}\text{Ni}_x\text{O}_{7-\Delta}$	95
Жук Надежда Алексеевна Кокшарова Людмила Алексеевна	

## СЕКЦИЯ 1.

### МАТЕМАТИКА

#### 1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

##### МЕТОДЫ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

*Гридина Александра Анатольевна*

*студент 2 курса*

*физико-математического факультета Стерлитамакского филиала  
Башкирского государственного университета, РФ, г. Стерлитамак*

*E-mail: [MatricA93@mail.ru](mailto:MatricA93@mail.ru)*

*Сабитова Юлия Камилевна*

*канд. физ.-мат. наук, доцент*

*кафедры математического анализа Стерлитамакского филиала  
Башкирского государственного университета, РФ, г. Стерлитамак*

*E-mail: [sabitovauk@rambler.ru](mailto:sabitovauk@rambler.ru)*

##### METHODS OF REDUCING THE ORDER OF THE DIFFERENTIAL EQUATION

*Gridina Alexander*

*2nd year student of Physics and Mathematics Faculty Sterlitamak's branch  
of the Bashkir State University, Russia, Sterlitamak*

*Sabitova Julia*

*candidate of physical and mathematical Science, assistant professor  
of the mathematical analysis of Sterlitamak branch  
of the Bashkir State University, Russia, Sterlitamak*

## АННОТАЦИЯ

В данной работе изучены методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Приведены примеры решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка путем сведения к решению двух задач Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Также решена краевая задача диффузии-теплопроводности.

## ABSTRACT

In this paper, we study methods for reducing the order differential equations. Examples of solutions of the Cauchy problem for second order differential equation by reducing it to the solution of two Cauchy problems for first order differential equation. Also solved the boundary value problem-diffusion thermal conductivity.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение; задача Коши; метод; порядок.

**Keywords:** differential equation; Cauchy problem; method; order.

С помощью замены переменных удастся свести изучение дифференциального уравнения к изучению дифференциального уравнения более низкого порядка. На примере дифференциального уравнения второго порядка в условиях теоремы Коши изучены два основных метода понижения порядка дифференциального уравнения. Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка будет сведена к решению двух задач Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение второго порядка в предположении, что его правая часть не зависит от  $y$ :

$$y'' = f(x, y') \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1. \quad (2)$$

Введем новую неизвестную функцию  $p(x) = y'(x)$ . Тогда  $y''(x) = p'(x)$ . Для функции  $p(x)$  имеем задачу Коши первого порядка

$$p' = f(x, p), p(x_0) = y_1.$$

Пусть  $p = p(x)$  — решение этой задачи. Возвращаясь к переменной  $y$ , получаем для нее задачу Коши также первого порядка  $y' = p(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ , решение которой выписывается явно:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x p(s) ds.$$

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение с правой частью, не зависящей от  $x$ :

$$y'' = f(y, y'), \quad (3)$$

и с теми же начальными условиями (2). Возможны два случая.

Пусть начальное значение производной  $y_1 = 0$  и выполняется равенство  $f(y_0, 0) = 0$ . Здесь решение задачи Коши выписывается явно: это постоянная функция  $y(x) = y_0$ .

Пусть теперь  $y_1 = y'(x_0) \neq 0$ . По теореме о сохранении знака непрерывной функцией найдется окрестность  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  точки  $x_0$ , в котором производная решения задачи Коши  $y'(x)$  имеет тот же знак, что и число  $y_1$ . Но тогда в этой окрестности решение  $y = y(x)$  является строго монотонной функцией. Значит существует единственная обратная функция  $x = x(y)$  на интервале  $(y(x_0 - \delta), y(x_0 + \delta))$ , если  $y_1 > 0$ .

Это обстоятельство позволяет считать здесь  $y$  новой независимой переменной, а  $x = x(y)$  новой неизвестной функцией. По правилу вычисления производной обратной функции имеем  $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$ .

Приступим к понижению порядка дифференциального уравнения. Введем новую неизвестную функцию  $y'(x) = q(y)$ . Но тогда по правилу дифференцирования сложной функции  $y''(x) = \frac{d}{dx} q(y) = q'(y)y'(x)$ . Следовательно,  $y''(x) = q'(y)q(y)$ . Таким образом, нахождение  $q = q(y)$  сводится к следующей задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка :  $q' = \frac{f(y, q)}{q}$ ,  $q(y_0) = y_1$ . Поскольку здесь выполнены условия теоремы Коши для дифференциального уравнения первого порядка ( $q \neq 0$  в окрестности точки  $y_0$ ), то полученная задача Коши имеет единственное локальное решение  $q = q(y)$ .

Возвращаясь к  $y = y(x)$ , получаем задачу Коши для дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:  $y' = q(y)$ ,  $y'(x_0) = y_0$ . Заметим, что  $q(y(0)) \neq 0$ .



Остался неисследованным случай, когда  $y_1 = 0$ , но  $f(y_0, 0) \neq 0$ . Применяя метод понижение порядка чисто формально, для определения  $q(y)$  получим ту же задачу Коши, но с правой частью, не являющейся непрерывной функцией в точке  $y = y_0, q = 0$ . Здесь теорема Коши неприменима. Это может привести или к отсутствию решения задачи Коши или к его не единственности. Приведем несколько примеров.

**Пример 1.** Решить задачу Коши

$$y'' = 2(y')^3, y(0) = 1, y'(0) = -1/2.$$

**Решение.** Полагая  $y'(x) = p(x)$  и переходя к  $p = p(x)$ , имеем задачу Коши для дифференциального уравнения с разделяющимися переменными  $p' = 2p^3, p(0) = -1/2$ . Решение данной задачи определяется по формуле  $p(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ . Для нахождения  $y = y(x)$  имеем задачу Коши  $y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, y(0) = 1$ . Следовательно,  $y = \sqrt{1-x}$ . Решение определено на полуоси  $(-\infty, 1)$ . Точка  $x = 1$  не является какой-либо особенностью для дифференциального уравнения. В ней решение  $y(x)$  хотя и определено, но не дифференцируемо, так как его производная стремится к бесконечности при  $x \rightarrow 1 - 0$ . Здесь имеет место явление взрыва для  $y'(x)$ .

Методы понижения порядка полезны и для исследования краевых задач.

**Пример 2.** Решить краевую задачу  $2y'' = 3y^2, y(0) = 0, y(1) = 1$ .

**Решение.** Полагаем  $y' = q(y)$ , тогда  $y'' = q(y)q'(y)$ . Для  $q$  получаем дифференциальное уравнение  $2qq' = 3y^2$ . Но тогда  $q^2 = y^3 + C$ , где постоянная интегрирования  $C$  пока неизвестна. Будем искать положительное решение  $q = \sqrt{y^3 + C}$ . Разделяя переменные, получаем  $\frac{dy}{\sqrt{y^3 + C}} = dx$ . Учитывая первое граничное условие для  $y$  имеем

$$\int_0^y \frac{ds}{\sqrt{s^3 + C}} = x.$$

Постоянную  $C$  вычислим из второго граничного условия  $y(1) = 1$ , т. е. из равенства  $\varphi(C) = 1$ , где  $\varphi(C) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s^3 + C}}$ . Функция  $\varphi(C)$  строго убывает на  $(0, +\infty)$ , так как  $\varphi'(C) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{(s^3 + C)^{3/2}} < 0$ .

Поскольку  $\int_0^1 s^{-3/2} ds$  расходится, то  $\varphi(C) \rightarrow +\infty$  при  $C \rightarrow 0$  и  $\varphi(C) \rightarrow 0$  при  $C \rightarrow +\infty$ . Следовательно, существует единственное число  $C^* \in (0, +\infty)$ , такое, что  $\varphi(C^*) = 1$ . Решение исходной краевой

задачи определяется из уравнения  $\psi(y) = x$ , где  $\psi(y) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s^3 + C}}$ , и дается формулой  $y = \psi^{-1}(x)$ .

**Пример 3.** Решить краевую задачу на полуоси, связанную с одной из задач диффузии-теплопроводности:

$$y'' + \frac{x}{2a^2} y' = 0, x \in [0, +\infty), y(0) = y_0, y(+\infty) = y_1.$$

**Решение.** Методом понижения порядка не трудно убедиться, что общее решение дифференциального уравнения дается формулой

$$y(x) = C_1 + C_2 \int_0^x e^{-s^2/(4a)^2} ds.$$

Используя граничные условия получаем систему для определения  $C_1, C_2$ :

$$C_1 = y_0, C_1 + C_2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2/(4a)^2} ds = y_1.$$

Но  $\int_0^{+\infty} e^{-s^2/(4a)^2} ds = a\sqrt{\pi}$ . Следовательно,  $C_1 = y_0, C_2 = \frac{y_1 - y_0}{a\sqrt{\pi}}$ .

Таким образом

$$y(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2/(4a)^2} ds = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a}} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Функция  $F(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$  называется интегралом ошибок.

Окончательно имеем  $y(x) = y_0 + (y_1 - y_0)F\left(\frac{x}{2a}\right)$ .

### Список литературы:

1. Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2009. — 312 с.

## СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО УСЛОВИЮ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

**Смакова Фаниля Фиргатовна**

*студент 2 курса физико-математического факультета  
Стерлитамакского филиала  
Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Стерлитамак  
E-mail: [mouse.minny2009@yandex.ru](mailto:mouse.minny2009@yandex.ru)*

**Сабитова Юлия Камилевна**

*канд. физ.-мат. наук, доцент  
кафедры математического анализа Стерлитамакского филиала  
Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Стерлитамак  
E-mail: [sabitovauk@rambler.ru](mailto:sabitovauk@rambler.ru)*

## DRAWING UP THE DIFFERENTIAL EQUATION ACCORDING TO A CONDITION OF A PHYSICAL TASK

**Smakova Fanilya**

*student of 2 years of training of physical and mathematical faculty  
of Sterlitamak branch of the Bashkir State University,  
Russia, Sterlitamak*

**Sabitova Julia**

*candidate of physical and mathematical Science,  
assistant professor of the mathematical analysis of Sterlitamak branch  
of the Bashkir State University, Russia, Sterlitamak*

### АННОТАЦИЯ

В данной работе приведен алгоритм составления дифференциального уравнения по условию физической задачи. Решена физическая задача на установление закона изменения физических величин с помощью дифференциального уравнения.

### ABSTRACT

In this article the algorithm of drawing up the differential equation according to condition of physical task. Physical example on establishment

of the law of change of physical quantities by means of the differential equations is reviewed.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение; алгоритм.

**Keywords:** differential equation; algorithm.

Дифференциальные уравнения являются одним из основных средств для математического решения практических задач. Особенно широко они используются в теоретической механике и физике [1, с. 39], [2, с. 391]. Решение задач физики с помощью дифференциальных уравнений состоит из трех этапов: а) составление дифференциального уравнения; б) решения этого уравнения; в) исследования полученного решения. Удобнее воспользоваться следующим алгоритмом действий:

1. установить изменяющиеся в данном явлении величины, выявить физические законы, которые связывают их;
2. выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую необходимо найти;
3. по условию задачи определить начальные или краевые условия;
4. выразить все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и ее производные;
5. составить дифференциальное уравнение по условию задачи и физическому закону;
6. найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения;
7. найти частное решение;
8. исследовать полученное решение.

В течение малого промежутка времени величины изменяются с постоянной скоростью. Данное свойство позволяет применить известные физические законы, которые описывают равномерно протекающие явления, для составления соотношения между значениями  $t, t + \Delta t$ , т. е. величинами, участвующими в процессе и их приращениями. Но равенства будут иметь лишь приближенное значение. Если требуется получить точное решения, то следует разделить обе части получившегося равенства на  $\Delta t$  и перейти к пределу, когда  $\Delta t$  стремится к нулю. Получившееся равенство содержит: время  $t$ , меняющиеся с течением времени физические величины и их производные — являются дифференциальным уравнением, которое описывает данное явление. Существует также второй способ для получения дифференциального

уравнения. Он заключается в замене приращения  $\Delta t$  на дифференциал  $dt$ , а приращение функций — соответствующими дифференциалами.

Рассмотрим конкретный пример.

**Задача.** Парашютист падает под действием силы тяжести. Сопротивление воздуха пропорционально скорости его падения, вначале падения он находился на высоте  $H$  и в состоянии покоя. Найти закон изменения высоты парашютиста над уровнем земной поверхности.

**Решение.** Воспользуемся вторым законом Ньютона:  $F = ma$ . Выберем вертикальное направление оси. Тогда  $F = -mg - kv$ . Сила тяжести направлена в отрицательном направлении, а сила сопротивления воздуха направлена в сторону, противоположную скорости падения. Таким образом, равенство  $F = ma$  принимает вид:  $ma = -mg - kv$ . Известно, что ускорение является производной от скорости  $a = v'$ , тогда получаем следующее дифференциальное уравнение  $mv' = -mg - kv$ , т. е.

$$v' = -g - \frac{k}{m}v. \quad (1)$$

По условию известно, что  $v(0) = 0$ . Разделяя переменные в уравнении (1) и интегрируя, находим:

$$-\int \frac{dv}{g + \frac{k}{m}v} = \int dt,$$

далее

$$-\frac{m}{k} \ln \left| g + \frac{k}{m}v \right| = t + C. \quad (2)$$

Вычислим значение произвольной постоянной  $C$ , используя значение  $v(0) = 0$ . Так как при  $t = 0$  значение  $v = 0$ , то  $C = -\frac{m}{k} \ln g$ . Подставляя значение  $C$  в (2), получим

$$t = \frac{m}{k} \ln g - \frac{m}{k} \ln \left( g + \frac{k}{m}v \right) = \frac{m}{k} \ln \frac{g}{g + \frac{k}{m}v},$$

или  $\frac{g}{g + \frac{k}{m}v} = e^{\frac{kt}{m}}$ ,  $g + \frac{k}{m}v = ge^{-\frac{kt}{m}}$ . Следовательно

$$v = \frac{mg}{k} \left( e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right). \quad (3)$$

Формула (3) представляет собой закон изменения скорости с течением времени. Найдем закон изменения высоты  $h$  парашютиста, так как  $v = h'$ , то получим следующее дифференциальное уравнение

$$h' = \frac{mg}{k} \left( e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right), \quad (4)$$

Из (4) следует

$$h = \frac{mg}{k} \int \left( e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) dt = \frac{mg}{k} \left( -\frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} - t \right) + C, \quad (5)$$

По условию при  $t = 0$  высота  $h$  равна  $H$ . Подставим эти значения в (5), получим, что  $C = H + \frac{m^2g}{k^2}$  и тогда

$$h = H + \frac{m^2g}{k^2} \left( 1 - \frac{k}{m}t - e^{-\frac{k}{m}t} \right), \quad (6)$$

Закон определения высоты парашютиста над уровнем земной поверхности при заданных условиях определяется формулой (6). Исследуя формулу (6), можно прийти к следующим выводам. Воспользуемся формулой Тейлора для функции  $e^x, x = -\frac{k}{m}t$  и при малых значениях  $t$  будем иметь:

$$e^{-\frac{k}{m}t} \approx 1 - \frac{kt}{m} + \frac{k^2t^2}{2m^2}.$$

Сохраняя лишь первые два слагаемых, получаем из формулы (3), что  $v \approx -gt$ . Это показывает, что в начале движения парашютист движется почти равноускоренно. В дальнейшем влияние сопротивления воздуха становится ощутимым, и при  $t \rightarrow +\infty$  имеем:  $e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$ , а потому  $v$  стремится к  $-\frac{mg}{k}$ . Движение становится почти равномерным со скоростью  $-\frac{mg}{k}$ , направленной вниз. Эта скорость пропорциональна силе тяжести  $mg$ , действующей на парашютиста, и обратно

пропорциональна коэффициенту  $k$ , показывающему силу сопротивления воздуха. Из формулы (6) можно приближенно найти время, за которое парашютист упадет на земную поверхность. Для этого учтем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0,$$

и напомним по формуле (6) приближенное равенство  $H + \frac{m^2 g}{k^2} \left(1 - \frac{k}{m} t\right) = 0$ . Из него находим, что  $t \approx \frac{kH}{mg} + \frac{m}{k}$ . Заметим, что слагаемое  $\frac{kH}{mg}$  равно времени, которое заняло бы падение парашютиста с постоянной скоростью  $\frac{mg}{k}$ , а добавка  $\frac{m}{k}$  произошла потому, что вначале падение было более медленным. При решении задачи было сделано предположение о пропорциональности силы сопротивления воздуха скорости падения. Оно было приближенным. Если считать эту силу пропорциональной квадрату скорости падения, то уравнение (1) заменится на линейное неоднородное дифференциальное уравнение вида

$$mv' = -mg + kv^2,$$

здесь направление силы сопротивления воздуха при выбранном направлении оси положительно.

### Список литературы:

1. Виленкин Н.Я., Доброхотова М.А., Сафонов А.Н. Дифференциальные уравнения: учебное пособие. М.: Просвещение, 1984. — 102 с.
2. Сабитов К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения: учебное пособие. М.: Высш. шк., 2005. — 671 с.

## 1.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

### ВЫРОЖДЕННОЕ СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

*Хусаинова Галина Владимировна*

*канд. физ.-мат. наук, доцент Уральской государственной  
архитектурно-художественной академии,*

*РФ, г. Екатеринбург*

*E-mail: [aldisa@mail.ru](mailto:aldisa@mail.ru)*

*Хусаинов Дамир Зиннурович*

*канд. физ.-мат. наук, доцент Уральской государственной  
архитектурно-художественной академии,*

*РФ, г. Екатеринбург*

*E-mail: [damiran@mail.ru](mailto:damiran@mail.ru)*

### DEGENERATE SOLITON SOLUTION OF KORTEVEG-DE VRIES EQUATION

*Khusainova Galina*

*candidate of Science, associate professor  
of the Ural State Architecture and Art Academy,*

*Russia, Ekaterinburg*

*Khusainov Damir*

*candidate of Science, associate professor  
of the Ural State Architecture and Art Academy,*

*Russia, Ekaterinburg*

#### АННОТАЦИЯ

Построено точное вырожденное солитонное решение для уравнения Кортевега-де Фриза как предельный (резонансный) случай двухсолитонного решения. Проведён анализ движения сингулярной точки полученного решения.



## ABSTRACT

The exact degenerate soliton solution of Korteweg-de Vries equation is constructed as limit (resonance) case of two-soliton solution. Analysis has been done of singularity dynamic of the obtained solution.

**Ключевые слова:** точное решение; солитон; сингулярность.

**Keywords:** exact solution; soliton; singularity.

Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) возникает как реалистическая модель, описывающая движение волн в такой среде, где оказываются существенными слабые нелинейные эффекты [2, с. 19]:

$$U_t + 6UU_x + U_{xxx} = 0, \quad (1)$$

Известно, что для данного уравнения были построены [6, с. 1192] в явном виде солитонные решения, представляемые в виде стандартных конечных рядов экспонент, где каждая экспонента зависит от произвольной фазовой постоянной. Начиная с работы Хироты [6, с. 1193] и работ многих других авторов [2, с. 108], эти фазовые постоянные считались вещественными постоянными, не имели особенностей и не зависели от физических параметров солитона, таких как амплитуда и скорость. Однако, если рассматривать фазовые постоянные в солитонных решениях в виде определенных несингулярных функций физических параметров солитона [1, с. 222], тогда можно получить новый класс точных решений в виде рациональных функций по пространственной переменной  $x$  и времени  $t$ .

В данной статье мы построим новое точное решение уравнения КдФ, выбрав, фазовые постоянные в виде определенных сингулярных функций параметров солитона — вырожденное солитонное решение (полиномиально-экспоненциальное решение, имеющее сингулярную особенность).

Рассмотрим двухсолитонное решение [2, с. 1192] уравнения (1):

$$U = 2\partial_x^2(\log f) \quad (2)$$

$$f = 1 + e^{n_1} + e^{n_2} + e^{n_1+n_2+A_2}, \quad (3)$$

где  $\eta_i = P_i x - P_i^3 \cdot t + \eta_i^0$ ;  $P_i, \eta_i^0$  ( $i = 1, 2$ ) — произвольные

$$e^{A_{12}} = \frac{(P_1 - P_2)^2}{(P_1 + P_2)^2}$$

ограниченные вещественные постоянные и

Предположим, что фазовые постоянные являются сингулярными функциями параметров солитона :

$$\exp(\eta_1^0) = -\exp(\eta_2^0) = \frac{(P_1 + P_2)}{2P_1(P_1 - P_2)};$$

тогда выражение (3) можно записать в виде

$$f = 1 + \frac{1}{2P_1} \cdot \frac{(P_1 + P_2)}{(P_1 - P_2)} e^{\frac{(\eta_1 + \eta_2)}{2}} \cdot 2 \operatorname{sh} \frac{(P_1 - P_2)}{2} (x - (P_1^2 + P_2^2 + (P_1 \cdot P_2)t)) - \frac{e^{\eta_1 + \eta_2}}{4P_1^2}$$

В пределе  $P_1 \rightarrow P_2$  мы получаем простейшее вырожденное солитонное — решение уравнения КдФ:

$$f = 1 + (x - 3P_1^2 \cdot t) \exp(\gamma_1) - \frac{1}{4P_1^2} \exp(2\gamma_1), \quad \gamma_1 = P_1 x - P_1^3 \cdot t \quad . (4)$$

Отметим, что в работе Хусаиновой (Безматерных) и Борисова [5, с. 6] были построены с помощью метода Хироты [6, с. 1192] более сложные вырожденные солитонные решения для уравнения КдФ.

Данное решение является сингулярным. Действительно, с учетом (2) и (4) имеем

$$u(x, t) = \frac{2e^{\eta_1} \left\{ 2P_1 + P_1^2 Q_1 - 2e^{\eta_1} + \frac{1}{2P_1} e^{2\eta_1} \left( 1 - \frac{P_1}{2} Q_1 \right) \right\}}{\left( 1 + Q_1 e^{\eta_1} - \frac{1}{4P_1^2} e^{2\eta_1} \right)^2}, \quad (5),$$

где  $Q_1 = x - 3P_1^2 \cdot t + c_1$ ,  $\eta_1 = P_1 x - P_1^3 \cdot t + \eta_1^0$ , ( $c_1, \eta_1^0$  — произвольные постоянные).

Видно, что в момент времени  $t = 0$  при  $\eta_1^0 = \ln 2P_1$ ,  $c_1 = 0$  функция  $u(x, 0)$  имеет особенность в точке  $x = 0$ . Положение данной сингулярной точки в момент времени  $t$  задается уравнением

$$x - 3P_1^2 \cdot t - \frac{1}{P_1} \operatorname{sh}(P_1 x - P_1^3 \cdot t) = 0, \quad (6)$$

Заменой  $\beta = e^{(P_1 x - P_1^3 t)}$  данное уравнение приводится к виду

$$\frac{dP_1}{2P_1} = \frac{d\beta}{\beta^2 - 1},$$

После интегрирования получаем:

$$P_1 = \left| \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right| C(x, t),$$

где:  $C(x, t)$  — неизвестная функция.

Рассмотрим случай  $0 < \beta < 1$ :

$$x = P_1^2 t + \frac{1}{P_1} \ln \frac{P_1 - C}{P_1 + C} \quad (P_1 > 0)$$

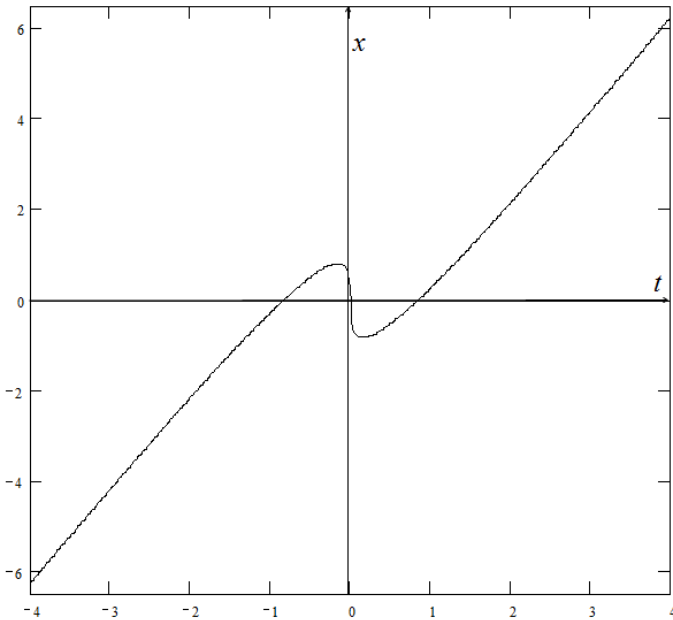
или

$$x(t) = P_1^2 \cdot t + \frac{1}{P_1} \ln \psi(x, t) \quad (0 < \psi < 1), \quad (7)$$

Анализ данного выражения показывает, что при больших  $t$

$$x(t) \approx P_1^2 t - \frac{1}{P_1} \ln 4 P_1^3 t, \quad (8)$$

Поскольку второй член в данном выражении значительно меньше первого, то видно, что при больших  $t$  движение особой точки близко к прямолинейному и равномерному движению. На Рис. 1 приведено численное решение уравнения(6).



**Рисунок 1** Эволюция особой точки вырожденного солитонного решения (6) ( $P_1 = 1,5$ )

Видно, что при малых  $t$  движение особой точки носит сложный характер. Оценки (7) показывают, что при малых  $t$

$$x(t) \approx P_1^2 t - 2P_1 \sqrt[3]{\frac{3}{2}t}.$$

Таким образом, мы показали, что вырожденное солитонное решение уравнения КдФ (5) является сингулярным. Оно образовалось в результате резонансного взаимодействия двух солитонов (параметры двух солитонов в пределе  $P_1 \rightarrow P_2$  совпадали). Физическая интерпретация данного резонансного решения, как, впрочем, и других известных резонансных (сингулярных) решений уравнения КдФ [3, с. 2182; 4, с. 25; 7, с. 445], пока не вполне ясна и требует дополнительного исследования поведения подобных резонансных решений для соответствующей дискретной цепочки.

### Список литературы:

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.; Мир, 1987 — 478 с.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М: Мир, 1988 — 694 с.
3. Ablowitz M.J., Satsuma J. Solitons and rational solutions of nonlinear evolution equations// J.Math. Phys., — 1978 — Vol. 19 — № 10 — p. 2180—2186.
4. Adler M., Moser J. On a class of polynomials connected with the Korteweg — de Vries equation// Comm.Math.Phys., — 1978 — Vol. 61 — p. 1—30.
5. Bezmaternih G.V. (Khusainova G.V.), Borisov A.B. Rational Exponential Solutions of Nonlinear Equations// Lett.Math.Physics, — 1989 — Vol. 18 — p. 1—8.
6. Hirota R. Exact solution of the Korteweg — de Vries equation for multiple collisions of solitons// Phys. Rev. Lett., — 1971, — Vol. 27 — p. 1192—1194.
7. Nimmo J.J.C., Freeman N.C. Rational solutions of the Korteweg — de Vries equation: wronskian form// Phys.Lett.A, — 1983, — Vol. 96 — № 9 — p. 443—447.

### 1.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

#### УДИВИТЕЛЬНЫЙ ЧИСЛОВОЙ КОРТЕЖ

*Мамедяров Даглар Мамедярович*

*канд. пед. наук,  
Дербентский филиал «Московский государственный  
гуманитарный университет им. М.А. Шолохова,  
РФ, г. Дербент*

#### INCREDIBLE NUMERICAL TUPLE

*Daglar Mamedyarov*

*candidate of pedagogic sciences, Derbent Branch  
of Sholokhov Moscow State University for the Humanities,  
Russia, Derbent*

#### АННОТАЦИЯ

Эта статья является мини-исследовательской работой автора. Целью работы была: выявление, каких-то соотношений и связей между числами, в том числе «чисел сочетаний». В ходе работы был найден нестандартный метод образования чисел сочетаний, т. е. биномиальных коэффициентов, раскрыты некоторые свойства сочетаний.

#### ABSTRACT

This article is a mini research of the author. It is aimed at revelation of some correlations and connections between numbers, including numbers of combinations. During the work a non-standard formation method of numbers of combinations has been found, namely of binomial coefficients; some properties of combinations have been revealed.

**Ключевые слова:** кортеж; треугольник Паскаля.

**Keywords:** tuple; Pascal triangle.

Слово «кортеж» в переводе на русский означает «торжественное шествие» (говорят «свадебный кортеж», кортеж автомашин»). Примерами кортежей могут служить слова (кортежи, составленные из букв алфавита), десятичные записи чисел (кортежи, составленные из цифр) и т. д. Подчеркнем отличие понятие кортежа от понятия множества: в множестве все элементы различны, а в кортеже компоненты могут повторяться.

В этой статье мы рассмотрим кортежи, которые обладают любопытными свойствами.

Возьмем 0, к нему добавим 1 и 2. Получим кортеж (1 2). К каждому элементу этого кортежа добавим по 1 и 2, получим кортеж 2 3 3 4. Добавляя к каждому элементу полученного кортежа по 1 и 2, получаем новый кортеж. Записывая все наши кортежи, друг под другом, получаем пирамиду из кортежей.

```

0
1 2
2 3 3 4
3 4 4 5 4 5 5 6
4 5 5 6 5 6 6 7 5 7 6 7 7 8
..... и т. д. (П1)
Если к 0 прибавим 2 и 4, получим кортеж

```

```

0
2 4
4 6 6 8
6 8 8 1 0 8 1 0 1 0 1 2
8 1 0 1 0 1 2 1 0 1 2 1 2 1 4 1 0 1 2 1 2 1 4 1 2 1 4 1 4 1 6
..... (П2).
В общем виде наши пирамиды будут иметь следующий вид:

```

```

0
R 2R
2R 3R 3R 4R
3R 4R 4R 5R 4R 5R 5R 6R
4R 5R 5R 6R 5R 6R 6R 7R 6R 6R 7R 6R 7R 7R 8R
..... (П3).

```

Эти кортежи обладают следующим удивительным свойством: число повторений в каждой строке ступенчатой пирамиды является строкой треугольника Паскаля.

Запишем это:

0  
 1 1  
 1 2 1  
 1 3 3 1  
 1 4 6 4 1  
 1 5 10 10 5 1  
 .....

Треугольник Паскаля обладает массой интереснейших свойств, главное из которых: не выполняя самого умножения (возведения в степень), с его помощью просто, быстро и точно можно возводить в любую степень двучлен  $(a+b)$ . Правда коэффициенты мы будем находить рекуррентно, т. е., для того, чтобы узнать коэффициенты разложения бинома седьмой степени, надо знать их для шестой, а чтобы узнать для шестой, сначала найти их для пятой и так далее до самого начала. То же самое и в случае наших пирамид. Например, чтобы узнать числа в пятой строке, нужно знать элементы в четвертой строке и т. д. Из каждого элемента предыдущей строки получается два элемента следующей.

Например.

4    5    5    6    5    6    6    7    6    7    7    8  
 5 6 6 7 6 7 7 8 6 7 7 8 7 8 8 9 7 8 8 9 8 9 9 10

Но нельзя ли обойтись без этого? Оказывается, можно вычислять элементы каждой строки пирамиды, не зная элементов предыдущей. Для этого, возьмем любое множество, элементами которого, являются числа (для удобства). Если нам нужно вычислять элементы строки  $n$ , то нужно взять числовое множество, где разность между первым и последним элементами равна  $n$ . Например  $n=4$ . Можно взять  $(1,2,3,4,5)$  или  $(2,3,4,5,6)$  или же  $(4,5,6,7,8)$  и т. д. Наши кортежи содержат  $2^n$  элементов и кортежи можно разбить на кортежи с количеством элементов  $2^{n-1}$ . То есть каждый следующий кортеж состоит из как бы «вложенных» друг в друга кортежей предыдущих строк, ступенчатой пирамиды. Например, кортеж для пятой строки пирамиды  $P_1$ , состоит из кортежей с количеством элементов  $2, 2^2, 2^3, 2^4$ .

1 кортеж 5 6  
 2 кортеж 5 6 6 7  
 3 кортеж 5 6 6 7 6 7 7 8  
 4 кортеж 5 6 6 7 6 7 7 8 6 7 7 8 7 8 8 9

Выясним закон образования кортежа на примере кортежа из множества  $(2,3,4,5,6,7,8,9)$ ,  $n=7$ . Запишем кортеж в виде прямоугольной таблицы.



2334 3445 3445 4556  
 3445 4556 4556 5667  
 3445 4556 4556 5667  
 4556 5667 5667 6778  
 3445 4556 4556 5667  
 4556 5667 5667 6778  
 4556 5667 5667 6778  
 5667 6778 6778 7889

Пишем первый элемент, рядом дважды второй, потом третий. Получаем кортеж 2 3 3 4 — первая четверка.

Для каждого элемента первой четверки составляем такие кортежи 2 3 4 3 4 3 4 4 5 3 4 4 5 4 5 5 6 — первая строка (большая четверка).

Для второй четверки 3 4 4 5 составляем такие кортежи. Это вторая строка (вторая большая четверка).

Для третьей четверки составляем кортежи и это пишем в третью строку.

Составляем кортеж для четвертой четверки первой большой четверки. Это будет четвертой строкой.

Далее составляем такой кортеж для первой четверки второй большой четверки и т. д., пока не появится последний элемент. Тогда процесс завершается. Зная это правило, легко составлять любой кортеж, по кортежу все строки треугольника Паскаля.

Для нашего кортежа число повторений: 1 7 2 1 3 5 3 5 2 1 7 1 — седьмая строка треугольника Паскаля.

Кортежи длиной  $2^n$  можно расположить в квадратную или прямоугольную таблицу. Например, кортеж для шестой строки можно расположить так, чтобы в строке и в столбце были коэффициенты разложения  $(a + b)^3$  или  $(a + b)^4$  и  $(a + b)^2$  и т. д.

Составим таблицы для шестой строки пирамиды.

**Таблица 1.**

6	7	7	8	7	8	8	9
7	8	8	9	8	9	9	10
7	8	8	9	8	9	9	10
8	9	9	10	9	10	10	11
7	8	8	9	8	9	9	10
8	9	9	10	9	10	10	11
8	9	9	10	9	10	10	11
9	10	10	11	10	11	11	12

Составим вторую таблицу из первой.

Таблица 2.

Элементы	1	3	3	1
6	1			
7	3	1		
8	3	3	1	
9	1	3	3	1
10		1	3	3
11			1	3
12				1

1,3,3,1 — число повторений столбцов. Числа в строке таблицы 2 — это количество повторений элементов в столбце. Из этой таблицы мы получаем следующие тождества:

$$\begin{aligned}
 C_6^0 &= C_3^0 \cdot C_3^0 = 1; \quad C_6^1 = C_3^0 \cdot C_3^1 + C_3^1 \cdot C_3^0 = C_3^1 + C_3^1 = 2C_3^1; \\
 C_6^2 &= C_3^0 \cdot C_3^2 + C_3^1 \cdot C_3^1 + C_3^2 \cdot C_3^0 = (C_3^1)^2 + C_3^2 = 3 + 9 + 3 = 15. \\
 C_6^3 &= C_3^0 \cdot C_3^3 + C_3^1 \cdot C_3^2 + C_3^2 \cdot C_3^1 + C_3^3 \cdot C_3^0 \\
 &= (C_3^0)^2 + (C_3^1)^2 + (C_3^2)^2 + (C_3^3)^2 = \\
 &= 1 + 9 + 9 + 1 = 20
 \end{aligned}$$

$$C_6^4 = C_3^1 \cdot C_3^3 + C_3^1 \cdot C_3^2 + C_3^3 \cdot C_3^1 = C_3^1 + (C_3^2)^2 + C_3^1 = 3 + 9 + 3 + 15 \text{ и т. д.}$$

Из этих таблиц можно получить тождества как:

$$\begin{aligned}
 C_4^2 &= (C_2^2)^2 + (C_2^1)^2 + (C_2^0)^2; \\
 C_6^3 &= (C_3^3)^2 + (C_3^2)^2 + (C_3^1)^2 + (C_3^0)^2; \\
 C_8^4 &= (C_4^4)^2 + (C_4^3)^2 + (C_4^2)^2 + (C_4^1)^2 + (C_4^0)^2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 C_{2a}^a &= (C_a^a)^2 + (C_a^{a-1})^2 + (C_a^{a-2})^2 + \dots + (C_a^0)^2; [1. с. 37].
 \end{aligned}$$

Эти формулы можно получить из таблицы, когда число повторений элементов в строке и столбце составляют коэффициенты разложения бинома  $(a + b)^n$ .

Приведем еще несколько интересных тождеств.

$$\begin{aligned}
 C_9^4 &= C_4^4 + 5C_4^3 + 10C_4^2 + 10C_4^1 + 5C_4^0; \\
 C_9^4 &= C_5^4 + 4C_5^3 + 6C_5^2 + 4C_5^1 + C_5^0; \\
 C_9^4 &= C_6^4 + 3C_6^3 + 3C_6^2 + C_6^1; \\
 C_6^1 &= C_3^1 + 3C_3^0; \quad C_6^2 = C_3^2 + 3C_3^1 + 3C_3^0; \quad C_6^3 = C_3^3 + 3C_3^2 + 3C_3^1 + C_3^0; \\
 C_6^2 &= C_4^2 + 2C_4^1 + C_4^0; \quad C_{10}^3 = C_5^3 + 5C_5^2 + 10C_5^1 + 10C_5^0;
 \end{aligned}$$

В общем виде эти тождества можно записать так:

$$C_m^k = C_n^k + C_{m-n}^1 \cdot C_n^{k-1} + C_{m-n}^2 \cdot C_n^{k-2} + \dots + C_{m-n}^{m-n} \cdot C_n^{k-(m-n)} \quad (1),$$

( $m-n+1$  слагаемых).

Если,  $k \geq m - n$ , то в правой части наших тождеств появляются все коэффициенты разложения биннома Ньютона, если же  $k < m - n$ , то появляются не все коэффициенты.

Используя такие таблицы и тождество (1) можно получить очень много интересных свойств сочетаний.

### **Список литературы:**

1. Мамедяров Д.М., Вакилов Ш.М. Некоторые свойства соединений и фигурных чисел и их применение при решении задач. Учебное пособие «Дербент, 2006».

## **ГРУППЫ ЧИСЛОВЫХ «СОЗВЕЗДИЙ»**

***Мамедяров Даглар Мамедярович***

*канд. пед. наук, Дербентский филиал «Московский государственный гуманитарный университет им. М.А. Шолохова»*

*РФ, Республика Дагестан, г. Дербент*

*E-mail: [gadji052@rambler.ru](mailto:gadjji052@rambler.ru)*

## **GROUPS OF NUMERICAL “CONSTELLATIONS”**

***Daglar Mamedyarov***

*candidate of pedagogic sciences, Derbent Branch  
of Sholokhov Moscow State University for the Humanities,*

*Russia, Derbent*

### **АННОТАЦИЯ**

Группами «числовых созвездий» в свое время занимались два великих академика: Гольдбах и Эйлер. В своей статье автор ставит цель: найти правило для получения аналогичных и других интересных «числовых созвездий». В ходе такой исследовательской работы были найдены способы получения различных групп созвездий с использованием свойств треугольных, пирамидальных и других чисел

сочетаний. Материал данной статьи с успехом можно использовать на факультативных и кружковых занятиях.

### ABSTRACT

In due time two great academicians Goldbach and Euler used to work with groups of “numerical constellations”. In this article the author’s goal is to find a rule for receiving similar and other interesting “numerical constellations”. During this research the ways of gaining different groups of constellations using properties of triangular, pyramidal and other numbers of combinations have been found. Material of this article could be successfully used in interest groups and extracurricular activities.

**Ключевые слова:** числовые созвездия; тождества.

**Keywords:** numerical constellations; identities.

Числа, подобно звездам, можно группировать в разнообразные числовые «созвездия».

«Созвездие» из шести чисел 2, 3, 7, 1, 5, 6 занято тем, что сумма первых трех чисел равна сумме последних трех, равны даже суммы их квадратов:

$$\begin{aligned}2 + 3 + 7 &= 1 + 5 + 6 \\ 2^2 + 3^2 + 7^2 &= 1^2 + 5^2 + 6^2.\end{aligned}$$

Эти числа 2, 3, 7, 1, 5, 6 заменяют собой шесть неизвестных  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$  в системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \end{cases}$$

Есть бесконечно много других чисел, которые являются решением этой системы. Еще ярче «созвездия» из восьми чисел 0, 5, 5, 10, 1, 2, 8, 9 и из десяти чисел 1, 4, 12, 13, 20, 2, 3, 10, 16, 19. В каждом из них сумма чисел первой половины равна сумме чисел второй половины, затем равны суммы квадратов тех же чисел, больше того, равны даже суммы кубов тех же чисел:

$$\begin{cases} 0 + 5 + 5 + 10 = 1 + 2 + 8 + 9, \\ 0^2 + 5^2 + 5^2 + 10^2 = 1^2 + 2^2 + 8^2 + 9^2, \\ 0^3 + 5^3 + 5^3 + 10^3 = 1^3 + 2^3 + 8^3 + 9^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 4 + 12 + 13 + 20 = 2 + 3 + 10 + 16 + 19, \\ 1^2 + 4^2 + 12^2 + 13^2 + 20^2 = 2^2 + 3^2 + 10^2 + 16^2 + 19^2, \\ 1^3 + 4^3 + 12^3 + 13^3 + 20^3 = 2^3 + 3^3 + 10^3 + 16^3 + 19^3. \end{cases}$$

Имеются и другие группы чисел, связанные точно такими же соотношениями, но как подобрать такие числа? В «тайну» всех приведенных здесь «числовых созвездий» первыми проникли еще в 1750—1751 годы два петербургских академика Гольдбах и гениальный Эйлер. Они нашли ряд формул, пригодных для решения в целых числах некоторых систем уравнений, в частности и тех, которые приводят к упомянутым «числовым созвездиям».

Для подбора чисел, образующих первое «созвездие»:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \end{aligned}$$

оказались пригодными такие формулы:

$$x_1 = a + c, x_2 = b + c, x_3 = 2a + 2b + c$$

и

$$y_1 = c, y_2 = 2a + b + c, y_3 = a + 2b + c.$$

Надо заменить в этих формулах буквы  $a, b, c$  любыми числами, и вы получите сколько угодно чисел первого «созвездия». В частности, при  $a = 1, b = 2, c = 1$  получается «созвездие», приведенное в качестве первого примера: 2, 3, 7, 1, 5, 6.

Эйлер и Гольдбах дали еще и другую группу формул для чисел первого «созвездия».

$$\begin{aligned} x_1 &= ad, x_2 = ac + bd, x_3 = bc; \\ y_1 &= ac, y_2 = ad + bc, y_3 = bd, \end{aligned}$$

где:  $a, b, c$  и  $d$  — тоже произвольные числа.

Для подбора чисел, образующих второе «созвездие»:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3, \end{cases}$$

пригодны следующие формулы:  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = 3a + 3b; x_4 = 2a + 4b, y_1 = 2a + b, y_2 = a + 3b, y_3 = 3a + 4b, y_4 = 0$  [1].

Занимаясь этой проблемой, мы нашли другие интересные числовые «созвездия» и правила нахождения чисел для таких «созвездий», в частности для первого «созвездия».

На примерах объясним суть нашего правила [3].

Возьмем разность чисел  $C_{n+k}^2 - C_n^2, n \geq 2$

Пусть  $k = 3$ , имеем:

$$\begin{aligned} C_5^2 - C_7^2 &= 9 C_8^2 - C_5^2 = 18 \\ C_6^2 - C_3^2 &= 12 C_9^2 - C_6^2 = 21 \\ C_7^2 - C_4^2 &= 15 C_{10}^2 - C_7^2 = 24 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Пусть  $k = 4$ , имеем:

$$\begin{aligned} C_6^2 - C_2^2 &= 14 C_9^2 - C_5^2 = 26 \\ C_7^2 - C_3^2 &= 18 C_{10}^2 - C_6^2 = 30 \\ C_8^2 - C_4^2 &= 22 C_{11}^2 - C_7^2 = 34 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Пусть  $k = 5$ , имеем:

$$\begin{aligned} C_7^2 - C_2^2 &= 20 C_{10}^2 - C_5^2 = 35 \\ C_8^2 - C_3^2 &= 25 C_{11}^2 - C_6^2 = 40 \\ C_9^2 - C_4^2 &= 30 C_{12}^2 - C_7^2 = 45 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Если в этих равенствах возьмем разность двух соседних значений, то получим  $k$ .

Например, при  $k = 3$ ;  $12 - 9 = 3, 15 - 12 = 3, 18 - 15 = 3$  и т. д.

при  $k = 4$ ;  $18 - 14 = 22 - 18 = 26 - 22 = 4$  и т. д.

Поэтому, мы можем составлять множество тождеств вида

$$\begin{aligned} C_9^2 - C_5^2 - C_8^2 + C_4^2 &= C_7^2 - C_3^2 - C_6^2 + C_2^2 \\ C_{10}^2 - C_5^2 - C_9^2 + C_4^2 &= C_8^2 - C_3^2 - C_7^2 + C_2^2 \text{ и т. д., или} \\ C_9^2 + C_6^2 + C_4^2 + C_3^2 &= C_7^2 + C_8^2 - C_5^2 + C_2^2 \\ C_{10}^2 + C_7^2 + C_4^2 + C_3^2 &= C_8^2 + C_9^2 + C_5^2 + C_2^2 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Отсюда, используя определение числа сочетаний, получаем

$$\begin{aligned} 9^2 - 9 + 6^2 - 6 + 4^2 - 4 + 3^2 - 3 &= 7^2 - 7 + 8^2 - 8 + 5^2 - 5 + \\ 2^2 - 2 \text{ или} \\ 9^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2 - (9 + 6 + 4 + 3) &= 7^2 + 8^2 + 5^2 + 2^2 - \\ (7 + 8 + 5 + 2). \text{ Имеем:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 9 + 6 + 4 + 3 = 7 + 8 + 5 + 2 = 22 \\ 9^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2 = 7^2 + 8^2 + 5^2 + 2^2 = 142, \end{cases}$$

$10^2 - 10 + 7^2 - 7 + 4^2 - 4 + 3^2 - 3 = 8^2 - 8 + 9^2 - 9 + 5^2 - 5 + 2^2 - 2$  или  $10^2 + 7^2 + 4^2 + 3^2 - (10 + 7 + 4 + 3) = 9^2 + 8^2 + 5^2 + 2^2 - (9 + 8 + 5 + 2)$ . Имеем:

$$\begin{cases} 10 + 7 + 4 + 3 = 9 + 8 + 5 + 2 = 24 \\ 10^2 + 7^2 + 4^2 + 3^2 = 9^2 + 8^2 + 5^2 + 2^2 = 174. \end{cases}$$

Найденные нами числа являются решениями системы второго «созвездия», правда, только для первых двух уравнений. Используя такие тождества, можно получить сколько угодно решений для системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2. \end{cases}$$

А как получить числа для первого «созвездия»?

Покажем это на примере.

Воспользуемся равенством

$$a^2 - (a - k)^2 - (a - 2k)^2 + (a - 3k)^2 = (2k)^2 [2].$$

Пусть  $a = 16, k = 2$ .

Имеем:  $16^2 - 14^2 - 12^2 + 10^2 = 4^2$ . Возьмем следующее равенство, где  $a - 3k = 16, a = 16 + 6 = 22, 22^2 - 20^2 - 18^2 + 16^2 = 4^2$ .

Отсюда  $22^2 - 20^2 - 18^2 + 16^2 = 16^2 - 14^2 - 12^2 + 10^2$  или  $22^2 + 14^2 + 12^2 = 20^2 + 18^2 + 10^2, 22 + 14 + 12 = 20 + 18 + 10 = 48$

Пусть  $a = 20, k = 3$ .

Имеем:  $20^2 - 17^2 - 14^2 + 11^2 = 6^2$ . Возьмем второе равенство, где

$a = 20 + 3k = 20 + 9 = 29$ . Тогда  $29^2 - 26^2 - 23^2 + 20^2 = 6^2$ .

Приравнявая обе части, получаем:

$$29^2 - 26^2 - 23^2 + 20^2 = 20^2 - 17^2 - 14^2 + 11^2 \text{ или}$$

$$29^2 + 17^2 + 14^2 = 26^2 + 23^2 + 11^2;$$

$$29 + 17 + 14 = 26 + 23 + 11 = 60.$$

Общее правило такое: из тождества  $a^2 - (a - k)^2 - (a - 2k)^2 + (a - 3k)^2 = (2k)^2$ , взяв вместо  $a$  и  $k$  произвольные числа, вычисляем первое тождество. Так как равенство не зависит от выбора  $a$ , то вычисляем второе тождество, такое, чтобы его меньший член

совпадал со старшим членом первого тождества. То есть складываем к старшему члену первого тождества  $3k$ .

Тождество  $a^2 - (a - k)^2 - (a - 2k)^2 + (a - 3k)^2 = (2k)^2$  всегда приводит к решению системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2. \end{cases}$$

Приведем один пример:

$$\begin{aligned} 30^2 - 28^2 - 26^2 + 24^2 &= 20^2 - 18^2 - 16^2 + 14^2 = 4^2. \text{ Отсюда} \\ 30^2 + 24^2 + 18^2 + 16^2 &= 28^2 + 26^2 + 20^2 + 14^2. \\ 30 + 24 + 18 + 16 &= 28 + 26 + 20 + 14. \end{aligned}$$

Приведем несколько другие интересные «созвездия».

Вычислим разность треугольных чисел вида  $C_{m+4}^2 - C_m^2$ . Например,

$$\begin{aligned} C_6^2 - C_2^2 &= 14 \quad C_8^2 - C_4^2 = 22 \\ C_7^2 - C_3^2 &= 18 \quad C_9^2 - C_5^2 = 26 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Получаем  $C_7^2 - C_3^2 - C_6^2 + C_2^2 = 4$ ;  $C_9^2 - C_5^2 - C_8^2 + C_4^2 = 4$  и т. д.

Число 4 запишем в виде  $C_5^2 - C_4^2$  по формуле  $C_{n+1}^2 - C_n^2 = n$ .

Имеем:  $C_7^2 - C_3^2 - C_6^2 + C_2^2 = C_5^2 - C_4^2$  или  $C_7^2 + C_4^2 + C_2^2 = C_6^2 + C_5^2 + C_3^2$ .

Используя определение числа сочетаний, имеем:

$$\begin{aligned} 7^2 - 7 + 2^2 - 2 + 4^2 - 4 &= 5^2 - 5 + 3^2 - 3 + 6^2 - 6. \\ 7^2 + 4^2 + 2^2 - (7 + 4 + 2) &= 5^2 + 6^2 + 3^2 - (6 + 5 + 3). \end{aligned}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 7^2 + 4^2 + 2^2 + 1 = 5^2 + 6^2 + 3^2 \\ 7 + 4 + 2 + 1 = 5 + 6 + 3. \end{cases}$$

$$C_9^2 - C_5^2 - C_8^2 - C_4^2 = 4, \quad C_9^2 - C_5^2 - C_8^2 + C_4^2 = C_5^2 - C_4^2.$$

Отсюда

$$C_9^2 + C_4^2 + C_4^2 = C_8^2 + C_5^2 + C_5^2.$$

Используя определение числа сочетаний, получаем:

$$9^2 - 9 + 4^2 - 4 + 4^2 - 4 = 8^2 - 8 + 5^2 - 5 + 5^2 - 5 \text{ или}$$



$9^2 + 4^2 + 4^2 - (9 + 4 + 4) = 5^2 + 8^2 + 5^2 - (5 + 8 + 5)$ . Имеем систему

$$\begin{cases} 9^2 + 4^2 + 4^2 + 1 = 5^2 + 8^2 + 5^2 \\ 9 + 4 + 4 + 1 = 8 + 5 + 5. \end{cases}$$

Используя такие тождества можно получить бесконечное множество решений системы

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 = y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

Для получения таких равенств можно использовать равенство

$$C_{m+k}^2 - C_k^2 = m + 2k - 1.$$

Пусть  $k = 2$ . Составим равенства

$$\begin{aligned} C_4^2 - C_2^2 &= 5 \quad C_7^2 - C_5^2 = 11 \\ C_5^2 - C_3^2 &= 7 \quad C_8^2 - C_6^2 = 13 \\ C_6^2 - C_4^2 &= 9 \quad C_9^2 - C_7^2 = 15 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Найдем разность двух соседних тождеств.

1.  $C_5^2 - C_3^2 - C_4^2 + C_2^2 = 2$ , но 2 есть  $C_3^2 - C_2^2$ . Отсюда

$C_5^2 + C_2^2 + C_2^2 = C_3^3 + C_4^3 + C_3^3$ , имеем

$$\begin{cases} 5^2 + 2^2 + 2^2 + 1 = 3^2 + 3^2 + 4^2 \\ 5 + 2 + 2 + 1 = 3 + 3 + 4. \end{cases}$$

$$2. \quad C_7^2 - C_5^2 - C_6^2 + C_4^2 = C_3^2 - C_2^2 \quad \text{или} \quad C_7^2 + C_4^2 + C_2^2 = C_6^2 + C_5^2 + C_3^2.$$

$C_3^2$ . Имеем:

$$\begin{cases} 7^2 + 4^2 + 2^2 + 1 = 6^2 + 5^2 + 3^2 \\ 7 + 4 + 2 + 1 = 6 + 5 + 3. \end{cases}$$

Используя разности  $C_{m+k}^2 - C_m^2$  при  $k = 1, 2, 3, \dots, N$  можно получить сколько угодно такие «созвездия». Можно получить и другие «созвездия», подобные

$$\begin{cases} 9^2 + 4^2 + 4^2 + 1 = 5^2 + 5^2 + 8^2 \\ 9 + 4 + 4 + 1 = 5 + 5 + 8 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 5^2 + 2^2 + 2^2 + 1 = 3^2 + 3^2 + 4^2 \\ 5 + 2 + 2 + 1 = 3 + 3 + 4, \end{cases} \quad \text{которые являются решениями системы}$$

системы

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 + 1 = 2y_1^2 + y_2^2, \\ x_1 + 2x_2 + 1 = 2y_1 + y_2. \end{cases}$$

Если возьмем разности  $2C_{n+1}^2 - C_n^2 = d$  и составим равенства  $2C_{n+1}^2 - C_n^2 = 2C_{d+1}^2 - C_d^2$ , получаем  $AC_{n+1}^2 + C_d^2 = C_n^2 + C_{d+1}^2$ .

Используя определения числа сочетаний, получаем решения системы

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 - (n+1) = y_1^2 + y_2^2, \\ 2x_1 + x_2 - (n+1) = y_1 + y_2. \end{cases}$$

**Пример 1.**  $2C_3^2 - C_2^2 = 5 \rightarrow 2C_3^2 - C_2^2 = C_6^2 - C_5^2$  или  
 $2C_3^2 + C_5^2 = C_6^2 + C_2^2$  или  
 $2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 5^2 - 5 = 6^2 - 6 + 2^2 - 2,$   
 $2 \cdot 3^2 + 5^2 - (2 \cdot 3 + 5) = 6^2 + 2^2 - (6 + 2),$  имеем  
 $\begin{cases} 2 \cdot 3^2 + 5^2 - 3 = 6^2 + 2^2 \\ 2 \cdot 3 + 5 - 3 = 6 + 2. \end{cases}$

**Пример 2.**  $2C_4^2 - C_3^2 = 9 \rightarrow 2C_4^2 - C_3^2 = C_{10}^2 - C_9^2$  или  
 $2C_4^2 + C_9^2 = C_{10}^2 + C_3^2.$   
 Имеем:  $2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 9^2 - 9 = 10^2 - 9 + 3^2 - 3.$   
 $2 \cdot 4^2 + 9^2 - (2 \cdot 4 + 9) = 10^2 + 3^2 - (9 + 3).$   
 $\begin{cases} 2 \cdot 4^2 + 9^2 - 4 = 10^2 + 3^2 \\ 2 \cdot 4 + 9 - 4 = 10 + 3. \end{cases}$

Если возьмем разности чисел вида  $2C_{n+k}^2 - C_n^2 = d,$  получим решение системы

$$\begin{cases} 3x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2n + 2k + 2, \\ 3x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + 2n + 2k + 2. \end{cases}$$

Приведем несколько примеров.

**Пример 1.**  $3C_6^2 - C_3^2 = 42 \rightarrow 3C_6^2 - C_3^2 = C_{43}^2 - C_{42}^2.$  Отсюда  
 $3C_6^2 + C_{42}^2 = C_{43}^2 + C_3^2.$   
 Имеем:  $3 \cdot 6^2 + 42^2 - (3 \cdot 6 + 42) = 43^2 + 3^2 - (43 + 3).$   
 $\begin{cases} 3 \cdot 6^2 + 42^2 = 43^2 + 3^2 + 14 \\ 3 \cdot 6 + 42 = 43 + 3 + 14. \end{cases}$

**Пример 2.**  $3C_5^2 - C_2^2 = 29 \rightarrow 3C_5^2 - C_2^2 = C_{30}^2 - C_{29}^2$  или  
 $3C_5^2 + C_{29}^2 = C_{30}^2 + C_2^2.$  Отсюда  
 $3 \cdot 5^2 + 29^2 - (3 \cdot 5 + 29) = 30^2 + 2^2 - (30 + 2).$   
 $\begin{cases} 3 \cdot 5^2 + 29^2 = 30^2 + 2^2 + 12 \\ 3 \cdot 5 + 29 = 30 + 2 + 12. \end{cases}$

Из наших примеров можно сделать вывод: если взять равенства вида  $AC_{n+k}^2 - BC_n^2 = d,$  то записывая  $d$  в виде  $C_{d+1}^2 - C_d^2 = d$  можно находить

решения системы уравнений вида  $\begin{cases} Ax_1^2 + x_2^2 + m = y_1^2 + By_2^2 \\ Ax_1 + x_2 + m = y_1 + By_2 \end{cases}$ , где  $m$  разность  $A(n+k) + d - (d+1+Bn)$ .

Приведем примеры:

$$1. 2C_6^2 - 4C_3^2 = 18 \rightarrow 2C_6^2 - 4C_3^2 = C_{19}^2 - C_{18}^2.$$

Отсюда  $2C_6^2 + C_{18}^2 = C_{19}^2 + 4C_3^2$ . Используя определение числа сочетаний, имеем  $2 \cdot 6^2 + 18^2 - (2 \cdot 6 + 18) = 19^2 + 4 \cdot 3^2 - (19 + 4 \cdot 3)$ .

$$\text{Имеем: } \begin{cases} 2 \cdot 6^2 + 18^2 + 1 = 19^2 + 4 \cdot 3^2 \\ 2 \cdot 6 + 18 + 1 = 19 + 4 \cdot 3. \end{cases}$$

$$2. 2C_8^2 - 4C_4^2 = 32 \rightarrow 2C_8^2 - 4C_4^2 = C_{33}^2 - C_{32}^2,$$

$$2C_8^2 + C_{32}^2 = C_{33}^2 + 4C_4^2,$$

$$2 \cdot 8^2 + 32^2 - (2 \cdot 8 + 32) = 33^2 + 4 \cdot 4^2 - (33 + 4 \cdot 4).$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 8^2 + 32^2 + 1 = 33^2 + 4 \cdot 4^2 \\ 2 \cdot 8 + 32 + 1 = 33 + 4 \cdot 4. \end{cases}$$

$$3. 3C_5^2 - 4C_4^2 = 6 \rightarrow 3C_5^2 - 4C_4^2 = C_7^2 - C_6^2,$$

$$3C_5^2 + C_6^2 = C_7^2 + 4C_4^2,$$

$$3 \cdot 5^2 + 6^2 - (3 \cdot 5 + 6) = 7^2 + 4 \cdot 4^2 - (7 + 4 \cdot 4).$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^2 + 6^2 + 2 = 7^2 + 4 \cdot 4^2 \\ 3 \cdot 5 + 6 + 2 = 7 + 4 \cdot 4. \end{cases}$$

$$4. 5C_{10}^2 - 2C_5^2 = 205 \rightarrow 5C_{10}^2 - 2C_5^2 = C_{206}^2 - C_{205}^2,$$

$$5C_{10}^2 + C_{205}^2 = C_{206}^2 + 2C_5^2,$$

$$5 \cdot 10^2 + 205^2 - (5 \cdot 10 + 205) = 206^2 + 2 \cdot 5^2 - (206 + 2 \cdot 5).$$

$$\begin{cases} 5 \cdot 10^2 + 205^2 - 39 = 206^2 + 2 \cdot 5^2 \\ 5 \cdot 10 + 205 - 39 = 206 + 2 \cdot 5. \end{cases}$$

Составляя разнообразные комбинации из чисел сочетаний, можно получать различные числовые «созвездия».

Составим различные числовые «созвездия».

Возьмем выражение  $5C_4^2 - 2C_3^2 - 5C_3^2 + 2C_2^2 = 11$ . Отсюда

$$5C_4^2 + 2C_2^2 + C_{11}^2 = 5C_3^2 + 2C_3^2 + C_{12}^2. \text{ Далее}$$

$$5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2 + 11^2 - (5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 11) = 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2 + 12^2 - (5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 12). \text{ Имеем:}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2 + 11^2 - 2 = 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2 + 12^2 \\ 5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 11 - 2 = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 12. \end{cases}$$

Из  $5C_6^2 - 2C_5^2 - 5C_5^2 + 2C_4^2 = C_{18}^2 - C_{17}^2$ , получаем

$$5C_6^2 + 2C_4^2 + C_{17}^2 = C_{18}^2 + 2C_5^2 + 5C_5^2. \text{ Имеем:}$$

$$5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 4^2 + 17^2 - (5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 17) = 18^2 + 2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5^2 - (18 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 5). \text{ Отсюда}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 4^2 + 17^2 - 2 = 18^2 + 2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5^2 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 17 - 2 = 18 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 4^2 + 17^2 = 7 \cdot 5^2 + 18^2 + 2 \\ 5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 17 = 7 \cdot 5 + 18 + 2. \end{array} \right. \text{ или} \end{cases}$$

Возьмем  $3C_6^2 - 2C_4^2 - 3C_5^2 + 2C_3^2 = C_{10}^2 - C_9^2$ . Отсюда

$$3C_6^2 + 2C_3^2 + C_9^2 = C_{10}^2 + 2C_4^2 + 3C_5^2. \text{ Имеем}$$

$$3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 3^2 + 9^2 - (3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 9) = 10^2 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 - (3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 10). \text{ Отсюда}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 3^2 + 9^2 = 10^2 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 9 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 10. \end{array} \right. \end{cases}$$

Из  $5C_4^2 + 2C_2^2 + C_{11}^2 = 5C_3^2 + 2C_3^2 + C_{12}^2$  мы получили решение системы

$$\begin{cases} 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2 = 5y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2, \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2 = 5y_1 + 2y_2 + y_3. \end{array} \right. \end{cases}$$

Из  $5C_6^2 + 2C_4^2 + C_{17}^2 = C_{18}^2 + 2C_5^2 + 5C_5^2$  получили решение системы

$$\begin{cases} 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 7y_1^2 + y_2^2 + 2, \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 7y_1 + y_2 + 2. \end{array} \right. \end{cases}$$

Из  $3C_6^2 + 2C_3^2 + C_9^2 = 3C_5^2 + 2C_4^2 + C_{10}^2$  получили решение системы

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 3y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2, \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3y_1 + 2y_2 + y_3. \end{array} \right. \end{cases}$$

Из равенства  $2C_7^2 - C_3^2 - 2C_6^2 + C_2^2 = C_{11}^2 - C_{10}^2$  имеем:

$$2C_7^2 + C_{10}^2 + C_2^2 = 2C_6^2 + C_3^2 + C_{11}^2 \text{ или}$$

$$2 \cdot 7^2 + 10^2 + 2^2 - (2 \cdot 7 + 10 + 2) = 2 \cdot 6^2 + 3 + 11^2 -$$

$$(2 \cdot 6 + 3 + 11).$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 7^2 + 10^2 + 2^2 = 2 \cdot 6^2 + 3 + 11^2 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 7 + 10 + 2 = 2 \cdot 6 + 3 + 11 \end{array} \right. \end{cases}, \text{ получили решение системы}$$

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2y_1 + y_2 + y_3. \end{array} \right. \end{cases}$$

Возьмем такое выражение  $6C_5^2 - 4C_3^2 + C_{10}^2 - C_{11}^2 + C_4^2 = C_{45}^2 - C_{44}^2$ .

Отсюда  $6C_5^2 + C_{10}^2 + C_4^2 + C_{44}^2 = C_{45}^2 + 4C_3^2 + C_{11}^2$ .

Имеем:  $6 \cdot 5^2 + 10^2 + 4^2 + 44^2 - (6 \cdot 5 + 10 + 4 + 44) = 45^2 + 4 \cdot 3^2 + 11^2 - (45 + 4 \cdot 3 + 11)$  или

$$\begin{cases} 6 \cdot 5^2 + 10^2 + 4^2 + 44^2 - 20 = 45^2 + 4 \cdot 3^2 + 11^2 \\ 6 \cdot 5 + 10 + 4 + 44 - 20 = 45 + 4 \cdot 3 + 11. \end{cases}$$

Получили решение системы

$$\begin{cases} 6x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 20 = y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 20 = 2y_1 + 4y_2 + y_3. \end{cases}$$

Замечание: если записать эти тождества в общем виде и придавать им различные значения, мы получим множество решений полученных систем.

**Рассмотрим еще одно «созвездие». Оно представляет собой систему**

$$\begin{cases} Ax_1^2 + By_1^2 = Ax_2^2 + By_2^2 \\ Ax_1 + By_1 = Ax_2 + By_2 \end{cases}$$

Прежде чем приведем решение данной системы, остановимся на одном историческом факте.

Индийский студент Сундарам в 1934 году придумал следующую таблицу:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, ...  
 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, ...  
 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, ...  
 13, 22, 31, 40, 49, 58, 87, 96, 105, ...

...

Если взять число, которое не входит в эту таблицу, умножить на 2 и прибавить 1, то получится всегда простое число. Например, 15 не входит в эту таблицу.  $15 \cdot 2 + 1 = 31$  — простое.

Заметим, что любой член первой строки имеет вид  $3n + 1$ , второй —  $5n + 2$ , третьей —  $7n + 3$ , четвертой —  $9n + 4$  и т. д. То есть каждая трока представляет арифметическую прогрессию с разностью  $d$ .

Каждый член таблицы Сундарарама можно записать в виде  $C_{(n+1)d}^2 - C_{nd}^2$ . Например,  $\frac{C_6^2 - C_3^2}{3} = \frac{12}{3} = 4$ ,  $\frac{C_9^2 - C_6^2}{3} = \frac{36 - 15}{3} = 7$ ,  $\frac{C_{12}^2 - C_9^2}{3} = \frac{66 - 36}{3} = 10$

и т. д.

$$\frac{C_{10}^2 - C_5^2}{5} = \frac{45 - 10}{5} = 7, \frac{C_{15}^2 - C_{10}^2}{5} = \frac{105 - 45}{5} = 12, \frac{C_{20}^2 - C_{15}^2}{5} = \frac{190 - 105}{5} = 17$$

и т. д.

Заметьте, что в каждой арифметической прогрессии есть одинаковые члены. Например,  $\frac{C_{10}^2 - C_5^2}{5} = \frac{C_9^2 - C_6^2}{3} = 7$ .

Для любых нечетных чисел  $A$  и  $B$  можно находить такие тождества, т. е. для любой арифметической прогрессии с разностями  $A$  и  $B$  можно найти общий член.

Приведем пример.

Пусть  $A = 3, B = 5$ . Найдем общие члены этих прогрессий, сравнивая формулы общих членов  $3n_1 + 1 = 5n_2 + 2$ ;  $3n_1 = 5n_2 + 1$ ;  $n_1 = \frac{5n_2 + 1}{3}$ ;  $n_1 = \frac{5 \cdot 4 + 1}{3} = 7$ .

Пусть  $n_2 = 1$ , тогда  $n_1 = \frac{5 \cdot 1 + 1}{3} = 2$  или  $n_2 = 4$ , тогда  $n_1 = \frac{5 \cdot 4 + 1}{3} = 7$ .

То есть при  $n_1 = 2, n_2 = 1, n_1 = 7, n_2 = 4$ .

Эти прогрессии имеют равные члены.

$$\text{Возьмем равенство } \frac{C_{10}^2 - C_5^2}{5} = \frac{C_9^2 - C_6^2}{3}.$$

$$\text{Отсюда } 3C_{10}^2 - 3C_5^2 = 5C_9^2 - 5C_6^2 \text{ или } 3C_{10}^2 + 5C_6^2 = 5C_9^2 + 3C_5^2.$$

Используя определение числа сочетаний, имеем:

$$3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 6^2 - (3 \cdot 10 + 5 \cdot 6) = 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 9^2 - (3 \cdot 5 + 5 \cdot 9).$$

$$\text{Отсюда имеем } \begin{cases} 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 6^2 = 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 9^2 = 480 \\ 3 \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 9 = 60. \end{cases}$$

$$\text{Возьмем равенство } \frac{C_{24}^2 - C_{21}^2}{3} = \frac{C_{25}^2 - C_{20}^2}{5}.$$

$$\text{Отсюда } 5C_{24}^2 - 5C_{21}^2 = 3C_{25}^2 - 3C_{20}^2 \text{ или } 5C_{24}^2 + 3C_{20}^2 = 5C_{21}^2 + 3C_{25}^2. \text{ Имеем:}$$

$$5 \cdot 24^2 + 3 \cdot 20^2 - (5 \cdot 24 + 3 \cdot 20) = 5 \cdot 21^2 + 3 \cdot 25^2 - (5 \cdot 21 + 3 \cdot 25).$$

$$\text{Получаем систему } \begin{cases} 5 \cdot 24^2 + 3 \cdot 20^2 = 5 \cdot 21^2 + 3 \cdot 25^2 = 4080 \\ 5 \cdot 24 + 3 \cdot 20 = 5 \cdot 21 + 3 \cdot 25 = 180. \end{cases}$$

$$\text{Возьмем равенство } \frac{C_{25}^2 - C_{20}^2}{5} = \frac{C_{27}^2 - C_{18}^2}{9}.$$

Отсюда  $9C_{25}^2 - 9C_{20}^2 = 5C_{27}^2 - 5C_{18}^2$  или  $9C_{25}^2 + 5C_{18}^2 = 9C_{20}^2 + 5C_{27}^2$ . Имеем:

$$9 \cdot 25^2 + 5 \cdot 18^2 - (9 \cdot 20 + 5 \cdot 18) = 9 \cdot 20^2 + 5 \cdot 27^2 - (9 \cdot 20 + 5 \cdot 27).$$

$$\text{Получаем систему } \begin{cases} 9 \cdot 25^2 + 5 \cdot 18^2 = 9 \cdot 20^2 + 5 \cdot 27^2 = 7245 \\ 9 \cdot 25 + 5 \cdot 18 = 9 \cdot 20 + 5 \cdot 27 = 315. \end{cases}$$

Таким образом, мы можем найти бесконечное множество решений

$$\text{системы } \begin{cases} Ax_1^2 + By_1^2 = Ax_2^2 + By_2^2 \\ Ax_1 + By_1 = Ax_2 + By_2. \end{cases}$$

$$\text{Решение системы } \begin{cases} Ax_1^2 + By_1^2 + m = Ax_2^2 + By_2^2 \\ Ax_1 + By_1 + m = Ax_2 + By_2 \end{cases}$$

Для нахождения решения нашей системы можно использовать различные комбинации из треугольных чисел.

Приведем несколько примеров.

$$1. \frac{C_8^2 - C_3^2}{5} = \frac{28-3}{5} = 5; \frac{C_{10}^2 - C_6^2}{6} = \frac{45-15}{6} = 5.$$

Приравнивая левые части, получаем  $\frac{C_8^2 - C_3^2}{5} = \frac{C_{10}^2 - C_6^2}{6}$ . Отсюда

$$6C_8^2 - 6C_3^2 = 5C_{10}^2 - 5C_6^2 \text{ или } 6C_8^2 + 5C_6^2 = 6C_3^2 + 5C_{10}^2. \text{ Имеем:}$$

$$6 \cdot 8^2 + 5 \cdot 6^2 - (6 \cdot 8 + 5 \cdot 6) = 6 \cdot 3^2 + 5 \cdot 10^2 - (6 \cdot 3 + 5 \cdot 10).$$

$$\text{Получаем систему } \begin{cases} 6 \cdot 8^2 + 5 \cdot 6^2 = 6 \cdot 3^2 + 5 \cdot 10^2 + 10 \\ 6 \cdot 8 + 5 \cdot 6 = 6 \cdot 3 + 5 \cdot 10 + 10. \end{cases}$$

$$2. \frac{C_{15}^2 - C_{10}^2}{5} = \frac{105-45}{5} = 12; \frac{C_{14}^2 - C_{11}^2}{3} = \frac{91-55}{3} = 12.$$

Отсюда  $\frac{C_{15}^2 - C_{10}^2}{5} = \frac{C_{14}^2 - C_{11}^2}{3}$  или  $3C_{15}^2 - 3C_{10}^2 = 5C_{14}^2 - 5C_{11}^2$ ,

$$3C_{15}^2 + 5C_{11}^2 = 3C_{10}^2 + 5C_{14}^2. \text{ Имеем:}$$

$$3 \cdot 15^2 + 5 \cdot 11^2 - (3 \cdot 15 + 5 \cdot 11) = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 14^2 - (3 \cdot 10 + 5 \cdot 14).$$

$$\text{Получаем систему } \begin{cases} 3 \cdot 15^2 + 5 \cdot 11^2 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 14^2 + 0 \\ 3 \cdot 15 + 5 \cdot 11 = 3 \cdot 10 + 5 \cdot 14 + 0. \end{cases}$$

$$3. \text{ Возьмем } \frac{C_{12}^2 - C_{10}^2}{7} = \frac{66-45}{7} = 3; \frac{C_{15}^2 - C_9^2}{23} = 3.$$

Отсюда  $\frac{C_{12}^2 - C_{10}^2}{7} = \frac{C_{15}^2 - C_9^2}{23}$ . Имеем:  $23C_{12}^2 - 23C_{10}^2 = 7C_{15}^2 - 7C_9^2$  или

$$23C_{12}^2 + 7C_9^2 = 23C_{10}^2 + 7C_{15}^2.$$

$$23 \cdot 12^2 + 7 \cdot 9^2 - (23 \cdot 12 + 7 \cdot 9) = 23 \cdot 10^2 + 7 \cdot 15^2 - (23 \cdot 10 + 7 \cdot 15).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 23 \cdot 12^2 + 7 \cdot 9^2 = 23 \cdot 10^2 + 7 \cdot 15^2 + 4 = 3879 \\ 23 \cdot 12 + 7 \cdot 9 = 23 \cdot 10 + 7 \cdot 15 + 4 = 339. \end{cases}$$

Как найти решения этой системы в натуральных числах мы уже показали при решении уравнения  $A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + A_4^3 = B_1^3 + B_2^3 + B_3^3 + B_4^3$ . В этом равенстве равны основания, т. е.  $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ .

$$\text{Решение системы} \begin{cases} 3x_1^2 + x_2^2 = 3y_1^2 + y_2^2 \\ 3x_1 + x_2 = 3y_1 + y_2 \end{cases}$$

Воспользуемся равенством  $C_{n+4}^2 - 2C_{n+2}^2 + C_n^2 = 4$ . Это равенство верно для любых  $n$ .

Например,  $C_6^2 - 2C_4^2 + C_2^2 = 4$ ,  $C_7^2 - 2C_5^2 + C_3^2 = 4$ ,  $C_8^2 - 2C_6^2 + C_4^2 = 4$ ,  $C_9^2 - 2C_7^2 + C_5^2 = 4$  и т. д.

Имеем:  $C_6^2 - 2C_4^2 + C_2^2 = C_8^2 - 2C_6^2 + C_4^2$ .

Отсюда  $C_6^2 + 2C_6^2 + C_2^2 = C_8^2 + 2C_4^2 + C_4^2$  или  $3C_6^2 + C_2^2 = 3C_4^2 + C_8^2$ .

Имеем:  $3 \cdot 6^2 + 2^2 - (3 \cdot 4 + 2) = 3 \cdot 4^2 + 8^2 - (3 \cdot 4 + 8)$ .

$$\text{Получаем систему} \begin{cases} 3 \cdot 6^2 + 2^2 = 3 \cdot 4^2 + 8^2 \\ 3 \cdot 6 + 2 = 3 \cdot 4 + 8. \end{cases}$$

Из  $C_7^2 - 2C_5^2 + C_3^2 = C_9^2 - 2C_7^2 + C_5^2$  имеем:  $3C_7^2 + C_3^2 = 3C_5^2 + C_9^2$ .

Отсюда получаем:  $3 \cdot 7^2 + 3^2 - (3 \cdot 7 + 3) = 3 \cdot 5^2 + 9^2 - (3 \cdot 5 + 9)$ .

$$\text{Имеем систему:} \begin{cases} 3 \cdot 7^2 + 3^2 = 3 \cdot 5^2 + 9^2 \\ 3 \cdot 7 + 3 = 3 \cdot 5 + 9 \end{cases}$$

$$\text{Решение системы} \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

Воспользуемся равенством  $C_{n+2d}^2 - 2C_{n+d}^2 + C_n^2 = d^2$ . Это равенство верно при любых  $n$ .

Возьмем два равенства  $C_6^2 - 2C_4^2 + C_2^2 = C_9^2 - 2C_7^2 + C_5^2$ . Отсюда

$C_6^2 + 2C_7^2 + C_2^2 = C_9^2 + 2C_4^2 + C_5^2$ . Имеем:

$6^2 + 2 \cdot 7^2 + 2^2 - (6 + 2 \cdot 7 + 2) = 9^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2 - (9 + 2 \cdot 4 + 5)$ .

$$\text{Получаем систему} \begin{cases} 6^2 + 2 \cdot 7^2 + 2^2 = 9^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2 \\ 6 + 2 \cdot 7 + 2 = 9 + 2 \cdot 4 + 5. \end{cases}$$

Приведем другой пример.

Возьмем равенство  $C_7^2 + 2C_6^2 + C_3^2 = C_8^2 + 2C_5^2 + C_4^2$ . Имеем:



$$7^2 + 2 \cdot 6^2 + 3^2 - (7 + 2 \cdot 6 + 3) = 8^2 + 2 \cdot 5^2 + 4^2 - (8 + 2 \cdot 5 + 4).$$

$$\text{Получаем: } \begin{cases} 7^2 + 2 \cdot 6^2 + 3^2 = 8^2 + 2 \cdot 5^2 + 4^2 \\ 7 + 2 \cdot 6 + 3 = 8 + 2 \cdot 5 + 4. \end{cases}$$

$$\text{Возьмем равенство } C_4^2 - 2C_3^2 + C_2^2 = C_7^2 - 2C_6^2 + C_5^2 = 1.$$

$$\text{Имеем: } C_4^2 + 2C_6^2 + C_2^2 = C_7^2 + 2C_3^2 + C_5^2. \text{ Далее}$$

$$4^2 + 2 \cdot 6^2 + 2^2 - (4 + 2 \cdot 6 + 2) = 7^2 + 2 \cdot 3^2 + 5^2 - (7 + 2 \cdot 3 + 5).$$

$$\text{Получаем: } \begin{cases} 4^2 + 2 \cdot 6^2 + 2^2 = 7^2 + 2 \cdot 3^2 + 5^2 \\ 4 + 2 \cdot 6 + 2 = 7 + 2 \cdot 3 + 5. \end{cases}$$

Таким образом, мы можем находить бесконечное множество решений данной системы.

$$\text{Решение системы } \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = y_1^2 + 2y_2^2 \\ x_1 + 2x_2 = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Покажем решение на примерах.

$$\text{Возьмем равенство } C_{15}^2 - 2C_{12}^2 + C_9^2 = C_9^2 - 2C_6^2 + C_3^2 = 3^2$$

$$\text{Отсюда } C_{15}^2 + 2C_6^2 + C_9^2 = C_9^2 + 2C_{12}^2 + C_3^2 \text{ или } C_{15}^2 + 2C_6^2 = C_3^2 + 2C_{12}^2.$$

$$\text{Далее } 15^2 + 2 \cdot 6^2 - (15 + 2 \cdot 6) = 3^2 + 2 \cdot 12^2 - (3 + 2 \cdot 12).$$

$$\text{Имеем систему } \begin{cases} 15^2 + 2 \cdot 6^2 = 3^2 + 2 \cdot 12^2 \\ 15 + 2 \cdot 6 = 3 + 2 \cdot 12. \end{cases}$$

$$\text{Решение системы } \begin{cases} 4x_1^2 + 4x_2^2 = y_1^2 + 6y_2^2 + y_3^2 \\ 4x_1 + 4x_2 = y_1 + 6y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\text{Воспользуемся равенством вида } C_n^2 - 3C_{n-d}^2 + 3C_{n-2d}^2 + C_{n-3d}^2 = 0.$$

$$\text{Например, } C_6^2 - 3C_5^2 + 3C_4^2 - C_3^2 = C_7^2 - 3C_6^2 + 3C_5^2 - C_4^2.$$

$$\text{Отсюда } C_6^2 + 3C_4^2 + 3C_6^2 + C_4^2 = C_7^2 + 3C_5^2 + 3C_5^2 + C_3^2.$$

$$\text{Далее } 4C_6^2 + 4C_4^2 = C_7^2 + 6C_5^2 + C_3^2. \text{ Имеем:}$$

$$4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 4^2 - (4 \cdot 6 + 4 \cdot 4) = 7^2 + 6 \cdot 5^2 + 3^2 - (7 + 6 \cdot 5 + 3).$$

$$\text{Получаем систему } \begin{cases} 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 4^2 = 7^2 + 6 \cdot 5^2 + 3^2 \\ 4 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 7 + 6 \cdot 5 + 3. \end{cases}$$

$$\text{Возьмем равенство } C_8^2 - 3C_6^2 + 3C_4^2 - C_2^2 = C_{10}^2 - 3C_8^2 + 3C_6^2 - C_4^2.$$

$$\text{Отсюда } C_8^2 + 3C_4^2 + 3C_8^2 + C_4^2 = C_{10}^2 + 3C_6^2 + 3C_6^2 + C_2^2 \text{ или}$$

$$4C_8^2 + 4C_4^2 = C_{10}^2 + 6C_6^2 + C_2^2. \text{ Имеем:}$$

$$4 \cdot 8^2 + 4 \cdot 4^2 - (4 \cdot 8 + 4 \cdot 4) = 10^2 + 6 \cdot 6^2 + 2^2 - (10 + 6 \cdot 6 +$$

2).

Получаем систему  $\begin{cases} 4 \cdot 8^2 + 4 \cdot 4^2 = 10^2 + 6 \cdot 6^2 + 2^2 \\ 4 \cdot 8 + 4 \cdot 4 = 10 + 6 \cdot 6 + 2. \end{cases}$

**Решение системы**  $\begin{cases} x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2 + y_4^2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4 \end{cases}$

1. Возьмем равенство  $C_6^2 - 3C_5^2 + 3C_4^2 - C_3^2 = C_{10}^2 - 3C_9^2 + 3C_8^2 - C_7^2$ .

Отсюда  $C_6^2 + 3C_4^2 + 3C_9^2 + C_7^2 = C_{10}^2 + 3C_8^2 + 3C_5^2 + C_3^2$ . Имеем:

$$6^2 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 9^2 + 7^2 - (6 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 7) = 10^2 + 3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 5^2 + 3^2 - (10 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 3).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 6^2 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 9^2 + 7^2 = 10^2 + 3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 5^2 + 3^2 \\ 6 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 7 = 10 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 3. \end{cases}$$

Заметим, что эти числа удовлетворяют и уравнению

$$\begin{aligned} x_1^3 + 3x_2^3 + 3x_3^3 + x_4^3 &= y_1^3 + 3y_2^3 + 3y_3^3 + y_4^3, \text{ т. е.} \\ 6^3 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 9^3 + 7^3 &= 10^3 + 3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 5^3 + 3^3, \end{aligned}$$

2938 = 2938, т. е. мы нашли решение системы:

$$\begin{cases} x_1^3 + 3x_2^3 + 3x_3^3 + x_4^3 = y_1^3 + 3y_2^3 + 3y_3^3 + y_4^3 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2 + y_4^2 \text{ (*)} \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4 \end{cases}$$

2. Возьмем  $C_{10}^2 - 3C_7^2 + 3C_4^2 - C_1^2 = C_{20}^2 - 3C_{17}^2 + 3C_{14}^2 - C_{11}^2$ .

Отсюда  $C_{10}^2 + 3C_{17}^2 + 3C_4^2 + C_1^2 = C_{20}^2 + 3C_{14}^2 + 3C_7^2 + C_1^2$ .

Имеем:  $10^2 + 3 \cdot 17^2 + 3 \cdot 4^2 + 1^2 - (10 + 3 \cdot 17 + 3 \cdot 4 + 1) = 20^2 + 3 \cdot 14^2 + 3 \cdot 7^2 + 1^2 - (20 + 3 \cdot 14 + 3 \cdot 7 + 1)$ .

Получаем систему

$$\begin{cases} 10^2 + 3 \cdot 17^2 + 3 \cdot 4^2 + 1^2 = 20^2 + 3 \cdot 14^2 + 3 \cdot 7^2 + 1^2 \\ 10 + 3 \cdot 17 + 3 \cdot 4 + 1 = 20 + 3 \cdot 14 + 3 \cdot 7 + 1. \end{cases}$$

Проверим, удовлетворяют ли эти числа уравнению

$$\begin{aligned} x_1^3 + 3x_2^3 + 3x_3^3 + x_4^3 &= y_1^3 + 3y_2^3 + 3y_3^3 + y_4^3 ? \\ 10^3 + 3 \cdot 17^3 + 3 \cdot 4^3 + 1^3 &= 1000 + 14739 + 192 + 1331 = 17262. \\ 20^3 + 3 \cdot 14^3 + 3 \cdot 7^3 + 1^3 &= 8000 + 8232 + 1029 + 1 = 17262. \end{aligned}$$

Убедились, что эти числа являются решением системы (\*).  
Используя такие тождества мы можем находить бесконечное множество решений системы (\*).

$$\text{Решение системы} \begin{cases} 4x_1^3 + 4x_2^3 = y_1^3 + 6y_2^3 + y_3^3 \\ 4x_1^2 + 4x_2^2 = y_1^2 + 6y_2^2 + y_3^2 \\ 4x_1 + 4x_2 = y_1 + 6y_2 + y_3 \end{cases}$$

Воспользуемся равенством  $C_{n+3}^3 - 3C_{n+2}^3 + 3C_{n+1}^3 - C_n^3 = 1$ .  
Возьмем равенство  $C_8^3 - 3C_7^3 + 3C_6^3 - C_5^3 = C_9^3 - 3C_8^3 + 3C_7^3 - C_6^3$ .  
Отсюда  $C_8^3 + 3C_6^3 + 3C_8^3 + C_6^3 = C_9^3 + 3C_7^3 + 3C_7^3 + C_5^3$  или  
 $4C_8^3 + 4C_6^3 = C_9^3 + 3C_7^3 + 6C_7^3 + C_5^3$ .  
Используя формулу  $n^3 = C_{n+1}^3 + n$ , получаем

$$4 \cdot 7^3 + 4 \cdot 5^3 - (4 \cdot 7 + 4 \cdot 5) = 8^3 + 6 \cdot 6^3 + 4^3 - (8 + 6 \cdot 6 + 4).$$

Получаем систему  $\begin{cases} 4 \cdot 7^3 + 4 \cdot 5^3 = 8^3 + 6 \cdot 6^3 + 4^3 \\ 4 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 8 + 6 \cdot 6 + 4, \end{cases}$  но эти числа удовлетворяют и уравнению  $4x_1^2 + 4x_2^2 = y_1^2 + 6y_2^2 + y_3^2$ , т. е.

$$4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 5^2 = 8^2 + 6 \cdot 6^2 + 4^2, 296 = 296.$$

Используя тождество  $C_n^m - C_m^1 \cdot C_{n-d}^m + C_m^2 \cdot C_{n-2d}^m - \dots \pm C_{n-m}^m = d^n$  [4], при различных значениях  $m$  и  $n$  можно находить решения системы уравнений от первой до  $m$ -й степени с биномиальными коэффициентами разложения биннома Ньютона  $m$ -й степени.

Например, из тождеств

$$C_{12}^6 - 6C_{11}^6 + 15C_{10}^6 - 20C_9^6 + 15C_8^6 - 6C_7^6 + C_6^6 = 1 \text{ и}$$

$$C_{19}^6 - 6C_{18}^6 + 15C_{17}^6 - 20C_{16}^6 + 15C_{15}^6 - 6C_{14}^6 + C_{13}^6 = 1 \quad \text{можно}$$

получить системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1^6 + 6x_2^6 + 15x_3^6 + 20x_4^6 + 15x_5^6 + 6x_6^6 + x_7^6 = y_1^6 + 6y_2^6 + 15y_3^6 + 20y_4^6 + 15y_5^6 + 6y_6^6 + y_7^6 \\ x_1^5 + 6x_2^5 + 15x_3^5 + 20x_4^5 + 15x_5^5 + 6x_6^5 + x_7^5 = y_1^5 + 6y_2^5 + 15y_3^5 + 20y_4^5 + 15y_5^5 + 6y_6^5 + y_7^5 \\ x_1^4 + 6x_2^4 + 15x_3^4 + 20x_4^4 + 15x_5^4 + 6x_6^4 + x_7^4 = y_1^4 + 6y_2^4 + 15y_3^4 + 20y_4^4 + 15y_5^4 + 6y_6^4 + y_7^4 \\ x_1^3 + 6x_2^3 + 15x_3^3 + 20x_4^3 + 15x_5^3 + 6x_6^3 + x_7^3 = y_1^3 + 6y_2^3 + 15y_3^3 + 20y_4^3 + 15y_5^3 + 6y_6^3 + y_7^3 \\ x_1^2 + 6x_2^2 + 15x_3^2 + 20x_4^2 + 15x_5^2 + 6x_6^2 + x_7^2 = y_1^2 + 6y_2^2 + 15y_3^2 + 20y_4^2 + 15y_5^2 + 6y_6^2 + y_7^2 \\ x_1 + 6x_2 + 15x_3 + 20x_4 + 15x_5 + 6x_6 + x_7 = y_1 + 6y_2 + 15y_3 + 20y_4 + 15y_5 + 6y_6 + y_7 \end{cases}$$

Из тождества

$$C_{12}^6 + 6 \cdot C_{18}^6 + 15C_{10}^6 + 15C_8^6 + 20C_{16}^6 + C_6^6 + 6 \cdot C_{14}^6 =$$

$$= C_{19}^6 + 6 \cdot C_{11}^6 + 15C_{17}^6 + 15C_{15}^6 + 20C_9^6 + C_{13}^6 + 6 \cdot C_7^6.$$

Имеем;

$$\left\{ \begin{array}{l} 12^6 + 6 \cdot 18^6 + 15 \cdot 10^6 + 15 \cdot 8^6 + 20 \cdot 16^6 + 6 + 6 \cdot 14^6 = 19^6 + 6 \cdot 11^6 + 15 \cdot 17^6 + 15 \cdot 15^6 + 20 \cdot 9^6 + 13^6 + 6 \cdot 7^6 \\ 12^5 + 6 \cdot 18^5 + 15 \cdot 10^5 + 15 \cdot 8^5 + 20 \cdot 16^5 + 6 + 6 \cdot 14^5 = 19^5 + 6 \cdot 11^5 + 15 \cdot 17^5 + 15 \cdot 15^5 + 20 \cdot 9^5 + 13^5 + 6 \cdot 7^5 \\ 12^4 + 6 \cdot 18^4 + 15 \cdot 10^4 + 15 \cdot 8^4 + 20 \cdot 16^4 + 6 + 6 \cdot 14^4 = 19^4 + 6 \cdot 11^4 + 15 \cdot 17^4 + 15 \cdot 15^4 + 20 \cdot 9^4 + 13^4 + 6 \cdot 7^4 \\ 12^3 + 6 \cdot 18^3 + 15 \cdot 10^3 + 15 \cdot 8^3 + 20 \cdot 16^3 + 6 + 6 \cdot 14^3 = 19^3 + 6 \cdot 11^3 + 15 \cdot 17^3 + 15 \cdot 15^3 + 20 \cdot 9^3 + 13^3 + 6 \cdot 7^3 \\ 12^2 + 6 \cdot 18^2 + 15 \cdot 10^2 + 15 \cdot 8^2 + 20 \cdot 16^2 + 6 + 6 \cdot 14^2 = 19^2 + 6 \cdot 11^2 + 15 \cdot 17^2 + 15 \cdot 15^2 + 20 \cdot 9^2 + 13^2 + 6 \cdot 7^2 \\ 12 + 6 \cdot 18 + 15 \cdot 10 + 15 \cdot 8 + 20 \cdot 16 + 6 + 6 \cdot 14 = 19 + 6 \cdot 11 + 15 \cdot 17 + 15 \cdot 15 + 20 \cdot 9 + 13 + 6 \cdot 7 \end{array} \right.$$

Это одно из решений. Такие системы имеют бесконечное множество решений.

### Список литературы:

1. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. Москва 1965 г. — Стр. 336.
2. Мамедяров Д.М., Вакилов Ш.М. Некоторые свойства соединений и фигурных чисел и их применение при решении задач. Дербент 2006 г. — Стр. 68.
3. Мамедяров Д.М. Неопределенные уравнения и их системы. Дербент 2013. Стр.241.
4. Мамедяров Д.М. Вакилов Ш.М. Как научить учащихся маленьким открытиям. Международная научно-практическая конференция. Материалы конференции 24,26 июня 2011 года. Дербент 2011.

## СЕКЦИЯ 2.

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

#### 2.1. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

##### ПОТРЕБНОСТЬ ОРГАНИЗАЦИЙ В НОВОЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ВЫБОРА СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ

*Сироткин Григорий Вячеславович*

*аспирант Астраханского государственного  
технического университета,*

*РФ, г. Астрахань*

*E-mail: [sgv.astr@yandex.ru](mailto:sgv.astr@yandex.ru)*

##### THE NEED OF ORGANIZATIONS IN THE NEW UNIVERSAL AUTOMATED SYSTEM OF CHOICE OF MEANS OF PERSONAL DATA PROTECTION

*Sirotkin Grigoriy*

*postgraduate of Astrakhan State Technical University,  
Russia, Astrakhan*

##### АННОТАЦИЯ

В данной статье автором предлагается один из способов решения актуальной проблемы защиты персональных данных в организациях путем разработки алгоритмов и универсальной автоматизированной системы выбора средств защиты персональных данных на основе нечеткой логики и опросе пользователя для любой организации, а также приведены доводы в обоснование выводов. В отличие от других имеющихся на сегодня подобных систем, предлагаемая система способна более эффективно решать задачи обеспечения безопасности персональных данных любой организации.

## ABSTRACT

In this article the author suggests one of the ways of solving the urgent problems of personal data protection in organizations through the development of algorithms and universal automated system of personal data protection means choice on the basis of fuzzy logic and the user survey for any organization, and provides arguments in support of the conclusions. Unlike other available today such systems, the proposed system is able to effectively solve the tasks of ensuring personal data security to any organization.

**Ключевые слова:** информационная безопасность; универсальная автоматизированная система; выбор средств защиты; безопасность персональных данных.

**Keywords:** information security; a universal automated system; the choice of means of protection; security of personal data.

Необходимость обеспечения безопасности персональных данных в наше время объективная реальность. Информация о человеке всегда имела большую ценность, но сегодня она превратилась в самый дорогой товар. Информация в руках мошенника превращается в орудие преступления, в руках уволенного сотрудника — в средство мести, в руках инсайдера — товар для продажи конкурентам. Именно поэтому персональные данные нуждаются в самой серьезной защите.

Необходимость принятия мер по защите персональных данных вызвана также возросшими техническими возможностями по копированию и распространению информации. Уровень информационных технологий достиг того предела, когда самозащита информационных прав уже не является эффективным средством против посягательств на частную жизнь. Современный человек уже физически не способен скрыться от всего многообразия явно или неявно применяемых в отношении него технических устройств сбора и технологий обработки данных о людях.

С развитием средств электронной коммерции и доступных средств массовых коммуникаций возросли также и возможности злоупотреблений, связанных с использованием собранной и накопленной информации о человеке. Появились и эффективно используются злоумышленниками средства интеграции и быстрой обработки персональных данных, создающие угрозу правам и законным интересам человека.

Сегодня вряд ли можно представить деятельность организации без обработки информации о человеке. В любом случае организация

хранит и обрабатывает данные о сотрудниках, клиентах, партнерах, поставщиках и других физических лицах. Утечка, потеря или несанкционированное изменение персональных данных приводит к невосполнимому ущербу, а порой и к полной остановке деятельности организации.

Понимая важность и ценность информации о человеке, а также заботясь о соблюдении прав своих граждан, государство требует от организаций и физических лиц обеспечить надежную защиту персональных данных. Законодательство Российской Федерации в области персональных данных основывается на Конституции Российской Федерации и международных договорах Российской Федерации и состоит из Федерального закона Российской Федерации от 27 июля 2006 г. № 152-ФЗ «О персональных данных», Трудового кодекса Российской Федерации и других федеральных законов, определяющих случаи и особенности обработки персональных данных, отраслевых нормативных актов, инструкций и требований регуляторов.

Согласно ч. 1 ст. 19 Федерального закона Российской Федерации от 27 июля 2006 г. № 152-ФЗ «О персональных данных» Оператор при обработке персональных данных обязан принимать необходимые правовые, организационные и технические меры или обеспечивать их принятие для защиты персональных данных от неправомерного или случайного доступа к ним, уничтожения, изменения, блокирования, копирования, предоставления, распространения персональных данных, а также от иных неправомерных действий в отношении персональных данных.

Процесс создания системы защиты персональных данных можно разделить на три этапа:

1. Разработка нормативно-правовой базы в области защиты персональных данных;
2. Выбор и внедрение технических и программных средств защиты;
3. Разработка и проведение ряда организационных мероприятий.

При этом следует учитывать государственные нормативные акты, которые регулируют вопросы обеспечения безопасности персональных данных.

В приказе ФСТЭК России от 18 февраля 2013 г. № 21 разработанный в соответствии с частью 4 статьи 19 Федерального закона от 27 июля 2006 г. № 152-ФЗ «О персональных данных» установлен состав и содержание организационных и технических мер по обеспечению безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных для каждого из уровней защищенности персональных данных.

Каждый оператор обязан реализовать организационные и технические мероприятия отвечающие требованиям нормативно-правовых актов. Реализовать данные требования оператор может самостоятельно, но для того чтобы сделать это грамотно необходимо специальное образование, что на данный момент является крайней редкостью. Остаётся только один выход обратиться в организацию оказывающую услуги в области информационной безопасности. Разработка и внедрение мероприятий по обеспечению информационной безопасности самостоятельно являются достаточно убыточными. Кроме того дальнейшее поддержание системы защиты требует периодических инвестиций направленных на поддержание, что является затратным.

В настоящее время имеются следующие автоматизированные системы выбора средств защиты персональных данных:

1. Программный комплекс «WingDoc ПД» [3] (г. Екатеринбург, ООО «Компания информационных технологий»);
2. Программная система оценки и построения модели угроз безопасности ПДн «АИСТ-П» (г. Томск, ТУСУР, Миронова В.Г.) [5];
3. Программное обеспечение «Модели угроз медицинских информационных систем» (г. Томск, ТУСУР, Зыков В.Д.) [2];
4. Программа оценки и построения модели воздействий на персональные данные вуза «ПЕРС» [1].
5. Автоматизированная система выбора средств и методов защиты персональных данных (Брянский ГТУ, Рытов М.Ю., Голомбиовская О.М.) [4].

1) Программный продукт «WingDoc ПД» предназначен для специалистов отделов, занимающихся защитой информации, сотрудников отделов информационных технологий, организаций, которые профессионально занимаются защитой информации. Программный комплекс позволяет в автоматизированном режиме создать модель воздействий. Программа имеет модульную архитектуру. В состав программы входят следующие модули для разработки моделей воздействий:

- Модуль «Модель угроз ИСПДн».

Модуль выполняет автоматическое составление модели воздействий согласно нормативно-методическому документу ФСТЭК России «Методика определения актуальных угроз безопасности ПДн при их обработке в ИСПДн» [6].

- Модуль «Модель угроз ИСПДн-К».

Модуль составляет модель воздействий и источника воздействий в соответствии с нормативно-методическим документом ФСБ России



«Методические рекомендации по обеспечению с помощью криптосредств безопасности ПДн при их обработке в ИСПДн с использованием средств автоматизации» [7].

2) Программная система оценки и построения модели воздействий на информационные системы обработки ПДн «АИСТ-П» предназначена для автоматизации этапов классификации ИСПДн, определения степени исходной защищенности ИСПДн и разработки модели воздействий (в соответствии с требованиями ФСТЭК России и ФСБ России [6, 7, 8]).

Разработка модели угроз производится с помощью экспертных оценок каждой из возможных угроз безопасности ПДн. В результате работы программы формируются документы:

- акт классификации ИСПДн;
- модель угроз ИСПДн.

3) Программное обеспечение «Модели угроз медицинских информационных систем» [2]. Пользователь, с использованием программного обеспечения, проводит классификацию медицинской информационной системы (МИС). Классификация осуществляется в ходе опроса пользователя. В результате формируется акт классификации, модель воздействий и перечень

рекомендуемых организационно-технических мероприятий. Особенностью данного программного обеспечения — возможность его использования специалистами системы здравоохранения, не имеющими специальных знаний в области защиты информации. В данном программном обеспечении происходит объединение на этапе предпроектного обследования этапов классификации ИС и разработки модели воздействий за счет типизации. Перечисленные инструментальные средства не учитывают специфику вуза, и при проведении предпроектного обследования с использованием программного комплекса «WingDocПД» и системы оценки и построения модели воздействий на ПДн «АИСТ-П» необходимо привлечения узко квалифицированных специалистов сторонних организаций, что приводит к увеличению финансовых затрат вуза.

4) Программа оценки и построения модели воздействий на персональные данные вуза «ПЕРС».

Программный комплекс включает в себя три модуля:

1. Классификация ИСПДн;
2. Определение степени исходной защищенности ИСПДн;
3. Построение модели внешних воздействий вуза.

Комплекс «ПЕРС» учитывает специфику вуза. За счет типизации информационных систем обработки ПДн, в нем удалось существенно

сократить количество вопросов пользователя. Использование данного комплекса не требует привлечения сторонних специалистов [9].

Автоматизированная система выбора средств и методов защиты персональных данных в автоматизированном режиме позволяет однозначно определить класс информационной системы персональных данных, выявить недостатки существующей системы персональных данных, сформировать модель угроз информационной системы персональных данных организации и выработать ряд мер организационной, программной и технической защите информационной системы персональных данных. Данная система внедрена в органы исполнительной власти Брянской области.

Действующие системы выбора средств защиты персональных данных широкого распространения не получили и проблеме защиты персональных данных в организациях на всей территории России не разрешили. Поэтому продолжение исследований в этой области является на сегодняшний день **актуальным**.

Необходим поиск новых алгоритмов, отличающиеся от аналогов, с целью повышения эффективности используемых автоматизированных систем обработки персональных данных и адаптации их к использованию во всех организациях. Поэтому одной из эффективных мер, сокращающих затраты времени и труда на приведение информационных систем в соответствии требованиям законодательства, может стать создание *универсальной автоматизированной системы выбора средств защиты персональных данных* на основе нечеткой логики и опросе пользователя. Именно эта система сможет не только грамотно определить уровень защищенности информационных систем персональных данных любой организации, но также и отслеживать это состояние на протяжении долгого времени. Кроме этого, система снизит затраты, трудоемкость и повысит эффективность защиты персональных данных, обрабатываемых в информационных системах персональных данных любой организации, что свидетельствует о её **практической значимости**. В связи с этим, в отличие от других имеющихся на сегодня подобных систем, предлагаемая система способна более эффективно решать задачи обеспечения безопасности персональных данных любой организации. Таким образом, **новизна работы** заключается в *универсальности предлагаемой системы и опросника пользователя*, которые позволят обеспечить защиту персональных данных любой организации без привлечения сторонних специалистов.

Автором предлагается разработка таких алгоритмов и системы, которые позволят в автоматизированном режиме определить перечень

необходимых мероприятий, средств защиты информации, составить документацию с минимальными затратами, как на первоначальную подготовку мероприятий, так и подобрать такой перечень средств защиты, которые выполняли все необходимые требования по обеспечению безопасности с минимальными затратами на поддержание средств защиты информации в работоспособном состоянии. А так как выбор тех или иных средств обеспечения безопасности зависит от многих факторов и характеристик самих средств обеспечения безопасности, зачастую описываемых лингвистическими переменными, следовательно, являющимися нечеткими, то для автоматизации проектирования системы безопасности предлагается использовать нечёткую логику.

Работа системы будет основываться на опросе пользователя, которому будут предложены вопросы, описывающие информационные системы. На основании опроса будет строиться частная модель угроз безопасности персональных данных. Возможность реализации угрозы будет рассчитываться исходя структуры информационной системы, из имеющихся средств защиты и их конфигурации. В соответствии с методикой определения актуальных угроз безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных утверждённая заместителем директора ФСТЭК России 14 февраля 2008 г рассчитывается вероятность реализации угроз и актуальность угроз безопасности персональных данных.

На основании частной модели угроз безопасности персональных данных будет предложено техническое решение для нейтрализации актуальных угроз безопасности. Средства защиты будут выбираться исходя из их способности нейтрализовать угрозу, в соответствии с руководящими документами и с учётом минимальной совокупной стоимости владения.

Массовое применение автоматизированной системы проектирования системы защиты персональных данных организациями позволит решить проблему обеспечения безопасности персональных данных на всей территории России. Вместе с тем, для решения поставленной задачи необходимо проведение дополнительных научных исследований, результаты которых будут опубликованы в следующих работах.

### **Список литературы:**

1. Аютова И.В. Модели и алгоритмы управления процессом обработки персональных данных в вузе: Автореферат... кандидата технических наук: 05.13.05. Сургут, 2012. — С. 22.

2. Зыков В.Д. Модели и средства обеспечения управления информационной безопасностью медицинских информационных систем: Дис. ... кандидата технических наук: 05.13.19 / Зыков Владимир Дмитриевич. Томск, 2010. — 150 с.
3. Программный комплекс WingDoc ПД модель угроз ИСПДн [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: [http://www.wingdoc.ru/products/wingdoc\\_pd/](http://www.wingdoc.ru/products/wingdoc_pd/).
4. Рытов М.Ю., Голомбиовская О.М. Автоматизация проектирования систем защиты персональных данных в органах исполнительной власти //Информация и безопасность. Воронеж, — № 4, — 2011. — с. 37—44.
5. Шелупанов А.А. Автоматизированная система предпроектного обследования информационной системы персональных данных «АИСТ-П» / А.А. Шелупанов, В.Г. Миронова, С.С. Ерохин, А.А. Мицель // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. — 2010. — № 1(21). — С. 14—22.
6. Нормативно-методический документ ФСТЭК России «Методика определения актуальных угроз безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных» от 14 февраля 2008 года.
7. Нормативно-методический документ ФСБ России «Методические рекомендации по обеспечению с помощью криптосредств безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных с использованием средств автоматизации» от 21 февраля 2008 года.
8. Нормативно-методический документ ФСТЭК России «Базовая модель угроз безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных» от 14 февраля 2008 года.
9. Увайсов С.У., И.В. Аютова (Москва), (Сургут) Информационные технологии защиты персональных данных в вузе [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://miem.hse.ru/data/2013/02/06/1305071158/text5.pdf>.

## СЕКЦИЯ 3.

### ФИЗИКА

#### 3.1. ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН, ПРИБОРОВ И АППАРАТУРЫ

##### ЭКСПЛУАТАЦИОННАЯ НАДЁЖНОСТЬ ГОРНЫХ МАШИН

***Афанасьев Юрий Александрович***

*канд. техн. наук, старший научный сотрудник,  
технический директор ООО «Центр Технической Диагностики»,  
РФ, г. Красноярск*

***Жадан Григорий Юрьевич***

*заместитель генерального директора по бурению  
ЗАО «Ванкорнефт»,  
РФ, г. Красноярск*

##### THE OPERATIONAL RELIABILITY OF MINING MACHINES

***Yuri Afanasiev***

*Ph.D., senior researcher,  
technical Director ООО “Center of Technical Diagnostics”,  
Russia, Krasnoyarsk*

***Grigory Zhadan***

*deputy general director for drilling ZAO “Vankorneft”,  
Russia, Krasnoyarsk*

##### АННОТАЦИЯ

Рассмотрены основные проблемы продления срока службы горных машин, находящихся за пределами срока эксплуатации, предусмотренного заводом изготовителем.

## ABSTRACT

The main problems of prolongation of service life of mining machines outside the period of operation, stipulated by the manufacturer.

**Ключевые слова:** экскаватор; показатели; эксплуатация; срок.

**Keywords:** excavator; performance; operation; period.

В настоящее время на мировом рынке значительно выросли цены на энергоносители, появилась реальная необходимость резкого увеличения объемов производства наиболее дешевого топлива — бурого угля, добываемого открытым способом на угольных предприятиях России.

Однако, появилась новая проблема, связанная с приобретением техники для проведения основных и вспомогательных работ при открытом способе добычи (роторных экскаваторов, перегружателей и отвалообразователей, магистральных и забойных конвейеров). Основной причиной является отсутствие заводов-изготовителей данной техники на территории нашей страны. Завышенные цены на новую технику осложняют проблему обновления основных фондов, что приводит к эксплуатации машин и оборудования в запроектных сроках. С другой стороны, отсутствие современных ремонтных предприятий на территории России и единой практики проведения ремонтных работ создают проблемы эффективной эксплуатации техники. Опорные пункты заводов-изготовителей на горнорудных предприятиях прекратили свое существование, все виды ремонтов промышленные предприятия вынуждены проводить собственными силами, с учетом имеющихся материальных и технических возможностей.

Имеющийся парк машин непрерывного действия, а это порядка пятидесяти единиц, не считая вспомогательной техники, работающей в единой технологической цепочке, на предприятиях России составляет значительную величину и требует серьезных капитальных вложений на эксплуатацию и ремонт. Износ основного оборудования на предприятиях Минэнерго России в настоящее время составляет 60—70 процентов.

В этих условиях резко возросла роль специалистов, эксплуатирующих дорогостоящую технику, и, в первую очередь, машинистов-операторов роторных комплексов. Известно, что 80—90 процентов выходов из строя горнорудного оборудования происходит по вине машинистов-операторов, эксплуатирующих его. Высокий технический уровень техники и недостаточная техническая подготовка специалистов являются основными причинами существующего положения. Это приводит к необходимости разработки новой высокоэффективной

методики для подготовки и совершенствования обучения специалистов основных базовых машин.

Основными направлениями разработки высокоэффективной методики обучения являются поиск путей повышения эффективности деятельности человека, проведение эргономических исследований человеко-машинных систем, направленных на поддержание высокой работоспособности оператора, которая достигается за счет оптимизации системы «человек-машина» на инженерном и дизайнерском уровне, а также посредством соблюдения требований, предъявляемых к человеческому фактору.

В исследованиях системы «человек-машина-среда» изучаются свойства, определяемые ролью человека. Свойства эти носят название человеческих факторов, которые в системе не задаются, а отыскиваются. Выступая как систематизирующие элементы, человеческие факторы выводятся из соответствующих единиц анализа. На этой основе строится структурная схема эргономических свойств и показателей.

На первом уровне комплексной оценки эргономических свойств и показателей определяются частные показатели, предъявляемые к элементам рабочего места, безопасности труда и условиям обитания. На втором уровне оценивается системное качество техники, которое находит свое преломление в функциональном состоянии человека. Конструкторские решения должны наиболее отчетливо проявляться именно на этом уровне.

Специфика оценки третьего уровня заключается в согласовании психофизиологической цены каждого работающего с эффективностью труда группы в целом.

Показатели эксплуатационной надежности технических систем являются интегральными характеристиками качества проекта, изготовления, монтажа и эксплуатации. Статистический разброс параметров, обусловленный процессами изготовления, монтажа и условиями эксплуатации приводит к рассеянию ресурса однотипных машин и их элементов в некотором интервале.

Анализ отказов, аварий и катастроф при эксплуатации сложных технических систем показывает, что причины этих событий описываются закономерностями замкнутой системы «человек-машина-среда». Формирование отказа обусловлено не только процессами, протекающими в самом объекте, но и действиями обслуживающего персонала (нарушение правил эксплуатации) и влиянием среды (климатические, технологические и т. п. факторы). Это приводит к выводу о необходимости рассмотрения надежности не только отдельных машин, но и всей системы «человек-машина-среда» в общей взаимосвязи.

Анализ фактически происшедших в 1981—1990 гг. аварий экскавационной техники на разрезах ПО «Красноярскуголь», выполненной с точки зрения взаимодействия машин с оператором и окружающей средой, показал, что значительная доля аварий обусловлена факторами не технического характера. По структуре аварий экскаваторов с точки зрения взаимодействия человека, машины и условий эксплуатации. Количество аварий, обусловленное взаимодействием элементов человек-машина, составляет 50—60 %. Отказы в результате взаимодействия элементов «человек-машина-среда» составляют 5—50 %, а чисто технические причины только 10—30 %.

Имеющаяся прежняя статистическая основа, используемая в организации планово-предупредительных ремонтов (ППР), оказывается несостоятельной и требующей принятия новых решений, одним из которых является внедрение системы TOP (технического обслуживания и ремонта) по фактическому техническому состоянию (ФТС). Однако для применения такой системы нужен новый уровень информационного обеспечения, позволяющий эффективно оценить состояние основных функциональных узлов роторного экскаватора, корректировку эксплуатационной и ремонтной документации, расчёты норм критериев предельных состояний.

Опыт проведения экспертизы роторных экскаваторов в связи с продлением срока их эксплуатации показывает, что эксплуатационная и ремонтная документация оценки состояния машин находится за пределами установленного заводом изготовителем срока эксплуатации [1].

Очевидно, что такая ситуация определена комплексом нормативов, сформированным прежней системой хозяйствования, когда о возможной эксплуатации машин за пределами сроков эксплуатации не предусматривалась.

Введение системы TOP по фактическому техническому состоянию (ФТС) создаёт основу для реорганизации всей структуры управления производством, поскольку одна из важнейших сторон этого производства, а именно поддержание работоспособности оборудования, претерпевает существенные изменения в сторону повышения эффективности.

Такие изменения повлекут за собой коренную перестройку порядка снабжения, планирования производства, социальную сферу и в целом сделают предприятие более эффективным.

В ходе обследования роторных экскаваторов в пост нормативный период эксплуатации, анализируя имеющееся техническое состояние, мы убедились в преимуществе системы TOP с использованием различных технологий и средств технической деятельности.



Машины индивидуального производства, к которым относятся экскаваторы, имеют индивидуальную систему наработки.

Остаточный ресурс для каждой из них имеет широкий разброс, не только из-за вклада в надёжность машины внесённого производства, но и условий эксплуатации, а так же уровня ТОР [2].

### **Список литературы:**

1. Экскаватор роторный ЭРШРД 5250. Инструкция по эксплуатации. 01.100.0012 Часть II. ДОНЕЦКГОРМАШ 1982 г.
2. Минуглепром СССР. Академия наук СССР. Институт горного дела им. А.А. Скочинского. Критерии предельных состояний элементов механической и гидравлической систем карьерной оборудования. II редакция. М. 1989 г.

## СЕКЦИЯ 4.

## БИОЛОГИЯ

### 4.1. ЭКОЛОГИЯ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЕ

#### ВОЗДЕЙСТВИЕ ЛЕГКИХ УГЛЕВОДОРОДОВ НА ВЫСОКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ РАСТИТЕЛЬНЫЙ ТЕСТ-ОБЪЕКТ *TRADESCANTIA* (CLON 02)

*Анискина Мария Валерьевна*

*канд. биол. наук, доцент кафедры экологии  
Сыктывкарского государственного университета,  
РФ, г. Сыктывкар*

*E-mail: [m\\_aniskina@rambler.ru](mailto:m_aniskina@rambler.ru)*

#### THE ACTION OF LIGHT HYDROCARBONS ON HIGHLY SENSITIVE BIOINDICATOR PLANT *TRADESCANTIA* (CLON 02)

*Maria Aniskina*

*candidate of Science, Associate Professor,  
Department of Ecology of Syktyvkar State University,  
Russia, Syktyvkar*

#### АННОТАЦИЯ

В работе была произведена оценка генотоксичности почвы, загрязненной продуктами переработки нефти. В качестве загрязняющего вещества был взят автомобильный бензин (АИ-76). В ходе исследования было обнаружено, что бензин оказывает мутагенное, генотоксическое и тератогенное действие на волосы тычиночных нитей традесканции (клон 02).

## ABSTRACT

In this study we evaluated the genotoxicity of soil that was contaminated with petroleum products. As the pollutant was taken gasoline (RON 76). The study found that gasoline has mutagenic, genotoxic and teratogenic effects on the hair filaments *Tradescantia* (clone 02).

**Ключевые слова:** нефть; бензин; традесканция (клон 02); генотоксичность.

**Keywords:** oil; gasoline; *tradescantia* (clone 02); genotoxicity.

Среди современных проблем человечества в последние десятилетия все чаще особое внимание уделяется состоянию окружающей природной среды. Происходит повсеместное загрязнение среды обитания различными мутагенными веществами, истощение природных ресурсов и преобразование ландшафтов, использование новых технологий и химических соединений инициирует процессы разрушения природы. Бензины принадлежат к наиболее многотоннажным и летучим нефтепродуктам, поэтому значителен вклад составляющих их углеводородов в загрязнение окружающей среды. Источниками поступления бензинов в окружающую среду являются процессы их получения, хранения и транспортировки. При попадании в почву бензин мигрирует в приземный слой воздуха, и интенсивность этого процесса возрастает с повышением температуры. Также происходит транслокация бензина из почвы в растения. При наличии постоянного источника загрязнения бензин может накапливаться в почве.

Цель нашего исследования заключалась в оценке генотоксичности почв, загрязненной продуктами переработки нефти при помощи растительного тест-объекта *Tradescantia* (clon 02). В качестве загрязняющего вещества был взят автомобильный бензин (АИ-76), который представляет собой смесь бензиновых фракций прямой гонки, а также термического и каталитического крекинга. Бензин добавлялся в стандартную почвенную смесь из расчета на 100 г сухого веса почвы.

Традесканция (клон 02), наиболее часто используемая в целях оценки мутагенных воздействий химических и физических факторов, была получена из природной популяции. Она является гибридом между *T. occidentales* Britton ex. Rydb. и *T. ohimensis* Raf., гетерозиготным по окраске цветка [4, с. 159].

Волоски тычиночных нитей в бутонах, в которых происходит активное деление клеток, являются наиболее чувствительной стадией для возникновения мутаций [2, с. 7].

Голубая окраска клеток цветка является доминантной, а розовая — рецессивной. Изменение голубой окраски клеток волосков тычиночных нитей на розовую рассматривается как фенотипическое проявление генной мутации в гетерозиготных по окраске клетках.

В ряде исследований по радиационному и химическому мутагенезу было установлено, что соматические клетки волосков тычиночных нитей традесканции близки по чувствительности клеткам животных организмов в отношении потери репродуктивной способности, а по критерию «частота соматических мутаций» даже превосходят их [3, с. 32]. Генетическая изменчивость традесканции минимальна, так как растения представляют собой вегетативно размножающийся клон.

Традесканция (клон 02) — удобный объект для изучения действия низких доз (концентраций) факторов разной природы [1, с. 10]. Возможность применения данного тест-объекта и точность данных о загрязнении окружающей среды, получаемых с его помощью, официально подтверждены многими ведущими лабораториями мира.

Растения традесканции (клон 02), несущие молодые соцветия на одинаковой стадии развития, выращивали в лабораторных условиях на почве, загрязненной бензином в концентрациях от 0,1 до 5,0 %.

По мере появления цветков, начиная с 4-го по 50-й день после пересаживания, волоски тычиночных нитей традесканции ежедневно исследовали на частоту соматических мутаций по критерию изменения доминантной голубой окраски на рецессивную розовую. Наряду с этим вели учет морфологических аномалий: гигантские и карликовые клетки, разветвления и изгибы волосков. Белые мутантные события и угнетение клеточного деления учитывали отдельно.

В таблице 1 представлены результаты по уровню нарушений в волосках тычиночных нитей традесканции (клон 02).

Частота соматических мутаций изменялась в пределах от 0 до 0,29 %, в контроле она составила 0,08 %. В вариантах, загрязненных бензином в концентрациях от 0,1 до 1,5 % частота соматических мутаций возрастает в 1,5—2,5 раза по сравнению с контролем, а при концентрации 2,5 % резко снижается. В связи с этим для данной концентрации был проведен повторный эксперимент, частота соматических мутаций в котором оказалась также ниже контрольного уровня. Далее, при концентрации 3,5 % и 5 % частота розовых клеток вновь возрастает, достигая 0,29 %, что в 3,5 раза достоверно выше контроля ( $p < 0,05$ ).

Таблица 1.

**Уровень нарушений в волосках тычиночных нитей градесканции  
(клон 02)**

<b>Концентрация бензина, %</b>	<b>Количество волосков тычиночных нитей</b>	<b>Соматические мутации, %</b>	<b>Белые мутантные события, %</b>	<b>Угнетение клеточного деления, %</b>
0	7501	0,08 ± 0,03	0,05 ± 0,03	0,15 ± 0,05
0,1	5415	0,11 ± 0,05	0,26* ± 0,07	0,52* ± 0,10
0,3	4254	0,19 ± 0,07	0,19* ± 0,07	0,42* ± 0,10
0,5	5663	0,16 ± 0,05	0,42* ± 0,09	0,25 ± 0,07
1	5503	0,18 ± 0,06	0,24* ± 0,07	0,72* ± 0,12
1,5	5505	0,18 ± 0,06	0,27* ± 0,07	0,20 ± 0,06
2,5	5305	0*	0,40* ± 0,09	0,30 ± 0,08
2,5 (повтор)	3967	0,05 ± 0,04	0,30* ± 0,09	0,18 ± 0,07
3,5	3294	0,18 ± 0,07	0,33* ± 0,10	0,27 ± 0,09
5	4123	0,29* ± 0,08	0,32* ± 0,09	0,29 ± 0,08

\* Различия с контролем достоверны (по критерию Стьюдента), ( $p < 0,05$ )

Возможно, что такая нелинейная зависимость, описываемая уравнением четвертой степени ( $R^2=0,76$ ), связана с изменением характера адаптивного ответа клеток. При концентрации бензина около 2,5 % происходит индукция процессов адаптивного ответа, усиливаются защитные механизмы клеток, происходит репарация повреждений. Все это приводит к снижению уровня соматических мутаций. При повышении концентрации бензина защитные механизмы клеток уже не справляются со всеми повреждениями, и число соматических мутаций растет, что говорит о мутагенном действии бензина.

Частота белых мутантных событий варьировала от 0,05 % до 0,42 %. В контроле она составила 0,05 %, а во всех загрязненных бензином вариантах в 4—8 раз достоверно выше контроля ( $p < 0,05$ ), что также свидетельствует о мутагенном действии бензина. Описывается зависимость уравнением четвертой степени с  $R^2=0,63$ .

Частота угнетения клеточного деления наибольшей и достоверно выше контроля ( $p < 0,05$ ) оказалась в вариантах с концентрацией бензина 0,1; 0,3 и 1 %, что указывает на выраженный генотоксический эффект бензина при этих концентрациях.

Уровень морфологических аномалий во всех загрязненных бензином вариантах достоверно выше контроля ( $p < 0,05$ ) (таблица 2). Зависимость выхода аномалий от концентрации бензина нелинейная, описывается уравнением третьей степени ( $R^2=0,71$ ). Основной вклад

в морфологические аномалии вносят изгибы и гигантские клетки, частота которых также достоверно выше контроля ( $p < 0,05$ ) во всех загрязненных вариантах.

**Таблица 2.**

**Частота морфологических аномалий в волосках тычиночных нитей традесканции (клон 02)**

Концентрация бензина, %	Морфологические аномалии, %	Гигантские клетки, %	Карликовые клетки, %	Изгибы, %	Разветвления, %
0	1,61 ± 0,15	0,41 ± 0,07	0,04 ± 0,02	1,11 ± 0,12	0,03 ± 0,02
0,1	11,41* ± 0,43	3,38* ± 0,25	0,15* ± 0,05	7,83* ± 0,37	0,06 ± 0,03
0,3	9,80* ± 0,46	3,15* ± 0,27	0,14 ± 0,06	6,51* ± 0,38	0
0,5	9,66* ± 0,39	3,02* ± 0,23	0,14* ± 0,05	6,41* ± 0,33	0,09 ± 0,04
1	11,85* ± 0,44	6,16* ± 0,32	0,18* ± 0,06	5,49* ± 0,31	0,02 ± 0,02
1,5	9,94* ± 0,40	3,31* ± 0,24	0,18* ± 0,06	6,41* ± 0,33	0,04 ± 0,03
2,5	11,44* ± 0,19	4,05* ± 0,27	0,25* ± 0,07	7,11* ± 0,35	0,04 ± 0,03
2,5 (повтор)	9,91* ± 0,47	2,17* ± 0,23	0,30* ± 0,09	7,41* ± 0,42	0,03 ± 0,03
3,5	9,81* ± 0,52	2,19* ± 0,26	0,12 ± 0,06	7,50* ± 0,46	0
5	10,60* ± 0,48	5,60* ± 0,36	0,24* ± 0,08	4,73* ± 0,33	0,02 ± 0,02

\* Различия с контролем достоверны (по критерию Стьюдента) ( $p < 0,05$ )

Таким образом, при исследовании частоты нарушений в волосках тычиночных нитей традесканции (клон 02), можно отметить мутагенное, генотоксическое и тератогенное действие бензина. Обнаружено, что выход выявляемых нарушений имеет нелинейную зависимость от степени загрязнения. Повышение частоты соматических мутаций и угнетения клеточного деления в концентрациях до 1,5 % указывает на большую генотоксичность этих доз.

**Список литературы:**

1. Аниськина М.В., Влияние нефтяного загрязнения почвы на уровень нарушений в волосках тычиночных нитей традесканции (клон 02) // Актуальные проблемы биологии и экологии: материалы докл. X междунар. науч. конф. Сыктывкар, 2003 — С. 10—11.
2. Аниськина М.В. Мутагенный и токсический эффекты у растений *Tradescantia* (clone 02) и *Arabidopsis thaliana* (L.) Heynh., индуцированные нефтью и нефтепродуктами: Автореф. дис. канд. биол. наук. Сыктывкар, 2006. — 20 с.

3. Ma T.H., Kong M.S. Genotoxicity of contaminated soil and well water detected by plant bioassays // (Abstr. 28th Annu. Meet. Environ. Mutagen Soc., Minneapolis, Min., Apr. 19-23, 1997) / Environ. And Mol. Mutagenes — 1997. — Vol. 29, — № 28 — P. 32.
4. Underbrink A.G., Schaires L.A. and Sparrow A.H. Tradescantia Stamen Hairs: A radiobiological test system applicable to chemical mutagenesis // Chemical mutagenesis: Principles and Methods for their detections. — 1973. — Vol. 3, — № 4 — P. 159—175.

## **ПРОРАСТАНИЕ СЕМЯН ОГУРЦОВ И РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ВОДЫ**

*Лыгин Сергей Александрович*

*канд. хим. наук, доцент Бирского филиала  
Башкирского государственного университета,*

*РФ, г. Бирск*

*E-mail: [lygins@mail.ru](mailto:lygins@mail.ru)*

*Тебенкова Ангелина Павловна*

*студент факультета биологии и химии Бирского филиала  
Башкирского государственного университета,*

*РФ, г. Бирск*

## **SEED GERMINATION OF CUCUMBER AND DIFFERENT TYPES OF WATER**

*Sergei Lygin*

*candidate of chemistry, associate professor  
Birsk branch of the Bashkir State University,*

*Russia, Birsk*

*Angelina Tebenkova*

*student of biology and chemistry  
Birsk branch of the Bashkir State University,*

*Russia, Birsk*

## АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается вопрос влияния различных типов воды на прорастание семян огурцов. Установлено, что жесткость угнетающе действует на исследуемые образцы семян, а «дистиллированная» вода способствует хорошему прорастанию семян. Водопроводная вода менее благоприятно действует на прорастание семян.

## ABSTRACT

The article discusses the impact of various types of water on the germination of cucumber seeds. Found that the stiffness of a depressing effect on the studied samples of seeds, and "distilled" water promotes good seed germination. Tap water is less favorable effect on seed germination.

**Ключевые слова:** источник воды; жесткость воды; семена; экология.

**Keywords:** water source; water hardness; seeds; ecology.

Вода и жизнь не могут существовать отдельно друг от друга. Ученые считают, что именно вода стала той средой, в которой возникла жизнь на Земле. Роль воды в клетке любого организма велика. В качестве растворителя вода обеспечивает приток веществ в клетку, и удаление из нее продуктов жизнедеятельности. Вода — это самое распространенное вещество. Ее содержание колеблется в пределах:

- в клетках эмали зубов воды около 10 %;
- в клетках развивающегося зародыша — более 90 %.

В среднем, многоклеточный организм содержит воды примерно 80% от массы тела. В клетках растений воды, около 85—90 %. Вода нужна для роста и развития живого организма, например, растений. Качество вода разное, поэтому и влияние на всхожесть, и рост растений также будет разным [4]. Одним из критериев качества воды является ее жесткость.

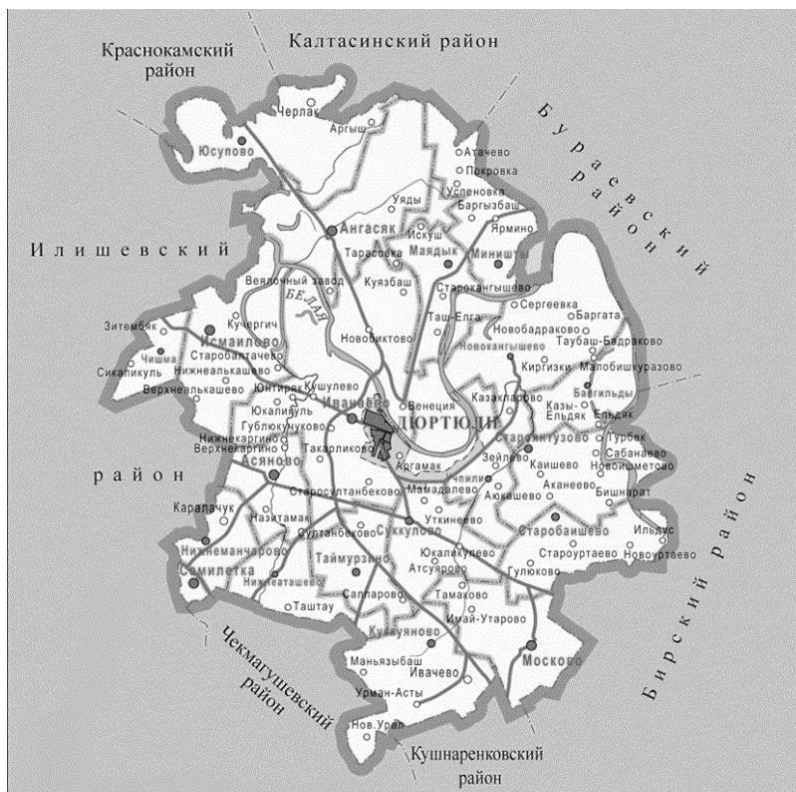
**Жёсткость воды** — совокупность химических и физических свойств воды, связанных с содержанием в ней растворённых солей щёлочноземельных металлов, главным образом, кальция и магния (так называемых «солей жёсткости») [7].

Накипь и отложения солей на бытовой технике (например, в чайниках), белые хлопья в воде, пленка на чае и т. д. — все это показатели жесткой воды. Использование такой воды для хозяйственных целей вызывает ряд неудобств, например, увеличивается расход мыла при стирке, медленно развариваются мясо и овощи, уменьшается срок службы бытовой техники. Жесткость



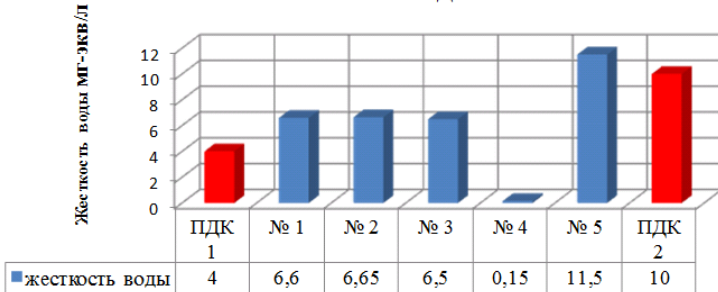
питьевой воды по действующим стандартам должна быть не ниже 4 мг-экв/л, и лишь в особых случаях допускается до 10 мг-экв/л. Для производственных целей использование жесткой воды недопустимо [1].

С целью проверки влияния различных типов воды на прорастание и рост семян огурцов были взяты пробы воды на территории г. Дюртюли Дюртюлинского района Республики Башкортостан [5] (рис. 1) и определена их жесткость (рис. 2):



*Рисунок 1. Карта Дюртюлинского района*

## Жесткость воды



**Рисунок 2. Жесткость воды**

- проба № 1 - р. Белая;
- проба № 2 – водопроводная;
- проба № 3 - водопроводная замороженная («таялая»);
- проба № 4 – снег («дистиллированная»);
- проба № 5 - родниковая.

Водопроводная вода — хлорируется на муниципальных станциях водоочистки. Хлор вводится в довольно чувствительных концентрациях и практически мгновенно убивает бактерии — самым беспощадным образом. Соединяясь с органическими веществами (а их невозможно полностью удалить из воды на очистных сооружениях), хлор образует так называемые тригалометаны. Водопроводная вода может быть относительно жесткой (6,65 — рис. 2), так как наличие в воде «солей жесткости» обычно не ухудшает ее вкусовых качеств.

Родниковая вода представляет собой грунтовые и подземные воды, имеющие выход на поверхность. Отличается высоким содержанием солей и минеральных веществ, поскольку, проходя сквозь толщу грунта, вымывает из него минеральные вещества, определяющие ее жесткость (превышает ПДК рис. 2). Но содержание в воде минеральных веществ не должно быть завышенным, иначе она становится непригодной для полива растений.

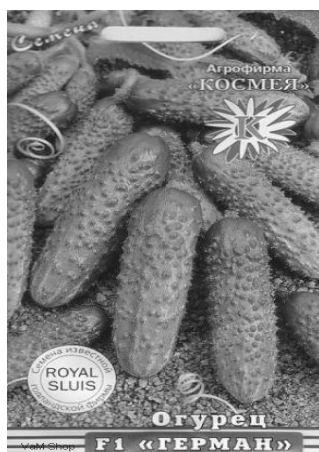
Снеговая вода - это природная «дистиллированная» вода, она является наиболее чистой (экологически чистой). В ней нет растворенных солей и органических веществ, но всегда присутствуют растворенные газы (жесткость 0,15 — рис. 2).

Речная вода обычно характеризуется значительным содержанием взвешенных веществ, т. е. мутностью, часто цветностью, малым содержанием солей, жесткостью, близкой к водопроводной (рис. 2),

относительно высокой окисляемостью и значительным содержанием бактерий.

Замороженная вода («талая»), как показал эксперимент, близка по своей жесткости к речной и водопроводной (рис. 2), хотя она может обладать некоторыми отличительными свойствами из-за изменения своей структуры. Заморозка воды, может заменить специальный фильтр [2, 3, 6].

Объектом исследования были семена огурца сорта «Герман» F1 (рис. 3).



*Рисунок 3. Огурец и его семена «Герман» F1*

Ранний (40—43 дня), урожайный, самоопыляемый огурец для возделывания в открытом грунте и пленочных парниках. При хорошем уходе, закладывает по 4—6 завязей в каждом узле. Плоды среднебугорчатые, без горечи, с белым опушением, размером 8—10 см, великолепно подходят для консервирования и соления. Достоинства сорта «Герман» F1:

- устойчивость к заболеваниям;
- высокие вкусовые качества свежей и консервированной продукции.

Выращивают огурцы в открытом и закрытом грунте. Свежие огурцы можно получать почти круглый год:

- в зимне-весенний сезон — в отапливаемых теплицах,
- весенне-летний сезон — в теплицах, а также в парниках и малогабаритных пленочных укрытиях.

В ходе эксперимента семена находились в одинаковых условиях: температура, давление, свет, влажность. Показания снимались в одно и то же время. Температура в помещении 22—24 °С. «Проклевываться» семена начали на 4 день, первые два дня после «проклёвывания» семена развивались примерно одинаково, но затем стало заметно, что быстрее пошли в рост семена, замоченные в родниковой воде.

Процент всхожести семян (табл. 1) определялся по формуле:

$$\omega = n/n_{(\text{общ})} * 100 \%,$$

- где:  $\omega$  — процент всхожести семян;  
 $n$  — количество проросших семян,  
 $n_{(\text{общ})}$  — общее количество семян.

*Таблица 1.*

**Всхожесть семян**

Проба	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Всхожесть, %	70	65	72	82	72
$\omega$					

По итогам эксперимента можно сделать вывод:

- жесткость воды влияет на прорастание и рост семян;
- больше проросли семена, которые находились в родниковой воде.

Вероятнее всего это связано с тем, что в ней содержится большое количество растворенных солей кальция, магния и других минеральных веществ. Уступают ей по всхожести семена, замоченные в водопроводной

и «талой» воде, это связано, скорее всего, с тем, что водопроводная вода обрабатывается хлором, который пагубно влияет на прорастание.

«Талая» вода оказывает угнетающее действие на прорастания семян, но по мере развития проростков, результат постепенно выравнивается. Водопроводная вода также дает результат выше, чем «талая», но ниже чем «дистиллированная». Это, вероятно, объясняется хлорированием воды. При корнеобразовании у проростков лучшие результаты получены в «дистиллированной» воде, худшие в «талой» воде. Позеленение семядолей наблюдается более интенсивно в «талой» воде. Скорость корнеобразования и количество образующихся корней напрямую не зависит от типа воды. Таким образом, по результатам исследования можно сделать следующее предположение, что в случаях прорастания семян и корнеобразования «талая» вода не лучше других типов воды, а в некоторых случаях действует даже угнетающей. Наиболее эффективной водой для прорастания является «дистиллированная» это связано с тем, что снег все же является экологически чистым по сравнению с другими пробами воды из-за отсутствия промышленных предприятий в г. Дюртюли.

### **Список литературы:**

1. Абрамов Н.Н. Водоснабжение. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://bibliotekar.ru/spravochnik-15/71.htm> (дата обращения 15.07.2013).
2. 2.Большаков П.С., Большакова Л.А. Влияние качества воды на прорастание семян гороха. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://nsportal.ru/ap/drugoe/library/vliyanie-kachestva-vody...> (дата обращения 5.05.2013).
3. Вода и её свойства. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.referat.www4.com/view-text-35936> (дата обращения 25.05.2013).
4. Иванова Е.С., Милькина Н.Е. Вода — источник жизни. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://rpp.nashaucheba.ru/docs/index-15828.html> (дата обращения 20.11.2013).
5. Карта Дюртюлинского района. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://rosmaps.ru/russia/bashkortostan-respublika/durtulinskii-raion.html> (дата обращения 25.05.2014).
6. Лапшина А. Влияние природы воды на прорастание семян. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://bestreferat.ru/archives/60/bestref-96460.zip> (дата обращения 25.05.2013).
7. Смягчение воды методом ионного обмена. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://bibliofond.ru/view.aspx?id=92847> (дата обращения 25.05.2013).

## **ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЖИВОЙ ОРГАНИЗМ (НА ПРИМЕРЕ ТОМАТА)**

***Лыгин Сергей Александрович***

*канд. хим. наук, доцент  
Бирского филиала Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Бирск  
E-mail: [lygins@mail.ru](mailto:lygins@mail.ru)*

***Пурина Елена Сергеевна***

*канд. биол. наук, старший преподаватель  
Бирского филиала Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Бирск*

***Лыгина Раиса Ивановна***

*старший преподаватель факультета биологии и химии  
Бирского филиала Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Бирск*

## **EFFECT OF CHEMICAL ELEMENTS IN LIVING ORGANISM (THE CASE OF TOMATO)**

***Sergei Lygin***

*candidate of chemistry, associate professor  
Birsk branch of the Bashkir State University,  
Russia, Birsk*

***Elena Purina***

*candidate of biological sciences, Senior lecturer,  
Birsk branch of the Bashkir State University,  
Russia, Birsk*

***Raisa Lygina***

*senior Lecturer, Department of Biology and Chemistry  
Birsk branch of the Bashkir State University,  
Russia, Birsk*

## АННОТАЦИЯ

В статье представлен материал по влиянию химических растворов определенной концентрации на рост и развитие томатов Де Барао и Москвич. Установлено, что растворы  $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  угнетающе влияют на томаты.

## ABSTRACT

The article presents data on the effect of chemical solutions specific concentration on the growth and development of tomato De Barao and Moskvich. Found that solutions of  $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  and  $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  depressing effect on tomatoes.

**Ключевые слова:** химические элементы; растворы солей; томаты; почва; удобрения; экология.

**Keywords:** chemicals; salt solutions; tomatoes; soil; fertilizers; ecology.

Растение и человек строят свой организм из определенных химических элементов, находящихся в окружающей среде.

Выявление биологической роли отдельных химических элементов в функционировании живых организмов (растений и человека) является актуальным в настоящее время.

Питание растений — это обмен веществ между растением и окружающей средой, это переход веществ из среды (почва, вода, воздух) в состав растительной ткани, в состав сложных органических соединений, синтезируемых растением, и выведение некоторых веществ из него.

Химические элементы, поглощаемые растениями из почвы в разных количествах, играют вполне определенную биохимическую и физиологическую роль и ответственны за синтез тех или иных веществ в растительном организме.

Весьма интересен вопрос о принципах отбора природой химических элементов для функционирования живых организмов. Не вызывает сомнения, что их распространенность не является решающим фактором. Здоровый организм сам способен регулировать содержание отдельных элементов. При наличии выбора (пищи и воды) животные инстинктивно могут вносить лепту в это регулирование. Возможности растений в данном процессе ограничены. Сознательное регулирование человеком содержания микроэлементов в почве сельскохозяйственных угодий также одна из важных задач [2].

В результате многолетнего наблюдения места проведения эксперимента были выбраны наиболее районированные сорта это — томат Де Барао и томат Москвич, хотя следует отметить, что местное

население выращивает и другие сорта, такие как Бычье сердце, Виноград, Дамские пальчики и др.

Место проведения эксперимента — Бакалинский район, с. Бакалы (рис. 1). Бакалинский район находится на западе Башкортостана. Площадь района составляет 1951 км<sup>2</sup>. Район расположен на северных отрогах Бугульминско-Белебеевской возвышенности, полого спускающейся на север в сторону долины реки Белой. Климат отличается континентальностью и умеренным увлажнением. Распространены серые и темно-серые лесные почвы, пятнами встречаются выщелоченные чернозёмы.

С. Бакалы — административный центр Бакалинского района, находящийся в 173 км от г. Уфа. В с. Бакалы выщелоченные чернозёмы (табл. 1) [1, 3].



*Рисунок 1. Карта Бакалинского района, с. Бакалы*



Таблица 1.

## Чернозем выщелоченный

Кислотность почвы (рН солевой вытяжки)	6,2
<b>Содержание в почве, мг/100г:</b>	
✓ минерального азота	2,2
✓ подвижного фосфора	3,4
✓ обменного калия	11,4
Содержание продуктивной влаги в метровом слое почвы, мм	123
Рельеф и экспозиция склона	Ровный
<b>Степень развития:</b>	
✓ водной эрозии	Слабая
✓ ветровой эрозии	Нет
Уровень грунтовых вод, м	2,5

В работе использовались реактивы следующих концентраций, отработанные по методике Герикке на пасленовых культурах, таких как баклажан:

$$C_m(\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}) = 0,02 \text{ моль/л}$$

$$C_m(\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}) = 0,01 \text{ моль/л}$$

*Томат Де Барао*: сорт среднеспелый, плод овальный, гладкий, массой 50—70 г, окраска зрелого плода красная. Ценность сорта: высокая урожайность, пригодность плодов к цельно плодному консервированию, отличные вкусовые качества. Рекомендуется для выращивания в открытом грунте при формировании в 1—2 стебля. Обязательно подвязывать к опоре, своевременно удаляя пасынки.

На рассаду необходимо высевать на 10—15 дней раньше, чем другие сорта. Томат сорта Де Барао посеяли 15 марта в 3 ряда по 3 корня, из них один корень поливали водой, а оставшиеся два растворами солей выше указанных концентраций.

В результате проделанного эксперимента выяснилось, что при поливе томатов сорта Де Барао раствором  $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ , рост растения заметно уменьшился, окраска стала светлее, а некоторые листья отмерли. Возможно, это связано с тем, что железо, как один из необходимых элементов фотосинтеза, нарушило этот жизненно важный для растения процесс. А при поливе растений раствором  $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ , особых изменений не наблюдалось (табл. 2А).

*Томат Москвич*: растение штамбовое, детерминантное, компактное, высотой 28—39 см, устойчив к фитофторе, наиболее опасному заболеванию томатов. Не требует пасынкования. Плоды округлые и плоскоокруглые, гладкие, красные, массой 40—50 грамм, число гнезд 3—5. Вкусовые качества плодов томатов Москвич — удовлетворительные и хорошие. Сорт ценится за ультра скороспелость и устойчивость растений к понижению температуры. Сорт Москвич хорошо переносит любые капризы погоды. Используют для потребления в свежем виде и засолки. Согласно агрономическим исследованиям для томата пригодны нетяжелые, высокоплодородные почвы.

Томат сорта Москвич посеяли 25 марта в 3 ряда по 3 корня, из них один корень поливали водой, а оставшиеся два растворами солей выше указанных концентраций (табл. 2Б).

*Таблица 2.*

### Результаты эксперимента

№ ряда	Высота кустов при поливе		Общее описание при поливе	
	Водой, см	Раствором, см	Водой	Раствором
<i>А. Сорт томата Де Барао</i>				
1й ряд (поливали раствором $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ )	—	~ 30—35	—	Высота кустов значительно меньше, расстояние между листьями увеличенное, окраска немного светлее.
2й ряд (поливали раствором $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ )	—	~ 45—50	—	Особых изменений нет. По росту и цвету листьев одинаковы.
3й ряд контроль	~ 45—50	—	Куст средней длины, раскидистый, цвет листьев темно-зеленый, главный стебель толстый	—

<b>Б. Сорг томата Москвич</b>				
1й ряд (поливали раствором $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ )	~ 25— 30	~ 20—25	—	Высота кустов меньше, расстояние между листьями больше.
2й ряд (поливали раствором $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ )	~ 25— 30	~ 25	—	Особых изменений нет. Высота отстает немного.
3й ряд контроль	~ 30— 45	—	Кусты невысокие, очень раскидистые	—

В результате проделанного эксперимента выяснилось, что при поливе томатов сорта Москвич раствором  $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ , рост растения заметно уменьшился, увеличилось расстояние между листьями. А при поливе растений раствором  $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  немного отставала высота томатов.

Таким образом, в ходе исследования была изучена литература, и выяснилось, что химические элементы оказывают достаточно большое влияние на рост и развитие растений.

В результате эксперимента установлено, что при поливе томатов раствором  $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  рост растения заметно уменьшился, окраска стала светлее. Возможно, это связано с тем, что железо, как один из необходимых элементов фотосинтеза, нарушил этот жизненно важный для растения процесс. А при поливе томатов раствором  $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  немного отставала высота томатов.

### **Список литературы:**

1. Карта Бакалинского района. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://rosmaps.ru/russia/bashkortostan-respublika/bakalinskii-raion.html> (дата обращения 25.05.2013).
2. Кукушкин Ю.Н. Химические элементы в организме человека. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/547.html> (дата обращения 05.03.2013).
3. Удобрение почвы. — [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://knowledge.allbest.ru/agriculture/3c0a65625b3ad68b5d53...> (дата обращения 21.09.2013).

# МОБИЛЬНОЕ РЕАГИРОВАНИЕ ПЧЕЛИНЫХ СЕМЕЙ НА МЕХАНИЧЕСКУЮ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНУЮ СТИМУЛЯЦИЮ

***Тобоев Вячеслав Андреевич***

*д-р биол. наук, профессор ЧГУ,  
РФ, г. Чебоксары  
E-mail: [stoboev@gmail.com](mailto:stoboev@gmail.com)*

***Кириллов Алексей Васильевич***

*студент ЧГУ,  
РФ, г. Чебоксары  
E-mail: [kirillovalesha@yandex.ru](mailto:kirillovalesha@yandex.ru)*

## MOBILE RESPONSE OF HONEY BEE COLONY ON MECHANICAL AND ELECTROMAGNETIC STIMULATION

***Vyacheslav Toboev***

*doctor of biological sciences, professor of Chuvash State University,  
Russia, Cheboksary*

***Aleksey Kirillov***

*student of Chuvash State University,  
Russia, Cheboksary*

### АННОТАЦИЯ

Предложен акустический метод, основанный на статистике высших моментов, позволяющий прогнозировать вероятность появления биологического отклика на изменение условий пребывания биологической системы. Рассмотренные временные и частотные количественные параметры позволяют устанавливать связь между изменениями физиологического состояния пчелиных семей и генерируемых ими акустических шумов. Изучены приспособительные формы поведения медоносных пчел в условиях вибрационной и электромагнитной стимуляции.

### ABSTRACT

Acoustic method based on statistics of higher moments was proposed. This method allows to predict the probability of appearance the biological

response on change of residence conditions of biological system. Considered time and frequency quantitative parameters allow to establish the connection between changes of physiological states of bee colonies and their generated acoustic noises. Adaptive forms of behavior of honey bees in the presence of vibrational and electromagnetic stimulation were considered.

**Ключевые слова:** пчелиная семья; вибрационная и электромагнитная стимуляция; акустический отклик; спектр; функция обобщенного среднего.

**Keywords:** bee colony; vibrational and electromagnetic stimulation; acoustic response; spectrum; generalized mean value function.

*Введение.* Для анализа акустических сигналов, как правило, используются методы спектрального и корреляционного анализа [1—3]. Спектральный анализ принято проводить по выборке данных большой протяженности, поэтому короткие локальные изменения не вносят значительного вклада в результирующий спектр сигнала. Вместе с тем, часто именно локальные изменения свойств сигналов, например, при ударных процессах, могут содержать полезную информацию. Для выделения информативных составляющих такого рода сигналов необходимы методы, позволяющие анализировать глобальные и локальные свойства акустических процессов в динамическом режиме. Еще одна причина, по которой динамический анализ нестационарных сигналов может быть практически востребован, это — возможность более точного обнаружения момента изменения параметров изучаемого процесса, чем оцененного по статистическим характеристикам. Если при изменении параметров существовавший динамический режим системы теряет свою устойчивость, то система может еще некоторое время (по инерции) оставаться в прежнем состоянии [1]. Статистические свойства наблюдаемого ряда при этом сильно не меняются. Однако со временем обязательно установится другой динамический режим, и возникает необходимость прогнозирования возможных изменений совокупности новых состояний исходной системы.

Для анализа акустических процессов нами предложен метод динамического моделирования с применением статистики высших моментов, что позволило реализовать компактное признаковое описание акустического сигнала во временной области [4, 5]. При этом модель сигнала формируется из признаковых компонентов со свойствами, задаваемыми на основе представлений о физических свойствах процессов, для чего применяются математические методы, позволяющие проводить динамическое описание (выделение отдельных этапов в динамике

акустического процесса). На каждом таком этапе решается задача разделения акустического процесса на группы (классы, кластеры), статистически схожие между собой. Другими словами, выделенные фрагменты одного процесса рассматриваются как различные реализации временного ряда, которые с помощью новых количественных характеристик (ФОС и ОФКП) объединяются в кластеры — статистически однородные участки [4]. В дополнение к количественным параметрам, получаемым при анализе акустических шумов пчел во временной области, предлагается спектральное оценивание выделенных статистически однородных участков ограниченной длительности модифицированным методом Прони [6]. Для этого выделенный участок заменяется конечным набором гармоник, содержащим информационно-значимую и ограниченную совокупность ( $K < 30$ ) не кратных друг другу частот. Для каждого состояния пчелиной семьи выделяются основные частоты, используемые в качестве дискриминирующих признаков. Различие частотных спектров для разных кластеров определяется в терминах функции обобщенного среднего (ФОС) и обобщенной функции корреляции Пирсона. Рассмотренные временные и частотные количественные параметры позволяют устанавливать связь между изменениями физиологического состояния пчелиных семей и генерируемых ими акустических шумов.

В задачу настоящего исследования входит идентификация откликов пчелиных семей на разнообразные внешние воздействия, а также выявление средств, которыми обеспечивается надежность акустического взаимодействия между отдельными особями.

*Материалы и методы исследования.* Для генерации вибрационных импульсов использовали резиновый молоток со встроенным датчиком силы удара, находившейся в пределах  $5 \dots 70 \text{ Н}$ , что было достаточно для стимуляции акустического отклика пчел. Удар всегда наносили по передней стенке улья у верхнего летка. Акустические отклики пчел на вибрационную стимуляцию регистрировали микрофонным зондом с конденсаторным микрофоном (чувствительность  $3.16 \text{ мВ/Па}$ ), имевшим линейную частотную характеристику в пределах анализируемого диапазона пчелиных звуков (от 20 до 1000 Гц). Для оцифровки акустических процессов применяли звуковую карту с частотой дискретизации 44100 Гц (Creative, SB E-MU 1212M Retail). Семьи зимующих пчел содержались в стандартных 12-рамочных ульях. Численность пчел в них находилась на уровне около 20 тыс.

Реагирование пчел на ЭП и ЭМП изучалось на семьях медоносной пчелы, содержащихся в поликарбонатных ульях. Они в течение годового цикла жизни находились под крайней фазой ВЛ ЛЭП 500 кВ

на высоте 0,5 м от поверхности Земли. Защита семей контрольной группы от действия ЭП и ЭМП достигалась их удалением примерно на 500 м от ЛЭП. Все семьи выравнивали по количеству взрослых и развивающихся пчел, а также по кормовым запасам. В весенне-летний период в семьях находилось примерно по 25 тыс. взрослых и столько же развивающихся пчел. Кормовые запасы в это время составляли в пределах 10—40 кг, увеличиваясь к осени до 20 кг.

Звуки, генерируемые пчелами, дифференцировали по статистически однородным участкам, для которых использовали динамическое описание с помощью информативных временных и частотных признаков. При этом временные признаки должны отражать основные параметры временной структуры выделенных фрагментов, а частотные — характер изменения информационно-значимых частот в выбранных диапазонах.

*Выделение статистически однородных участков.* В анализируемом нестационарном шуме длительности  $T$  выбирается пробный интервал  $[t_k, t_k + \tau]$ , при этом  $t_k + \tau < T$ , где  $t_k = k \cdot \Delta\tau$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Здесь  $t_k$  — моменты времени, отделенные друг от друга фиксированными интервалами  $\Delta\tau = f_d^{-1}$  ( $f_d$  — частота дискретизации).

Для реализаций случайной переменной  $x(t)$  из выбранного интервала  $[t_k, t_k + \tau]$  определим абсолютный момент порядка  $p$  выражением [4]:

$$\Delta_p(t_k, \tau) = \frac{1}{m} \mathop{\text{e}}\limits_{j=0}^{m-1} \left( \left| x(t_{k+j}) - \langle x \rangle \right| \right)^p, \quad 0 < p < \Gamma. \quad (1)$$

Здесь  $\langle x \rangle$  обозначает среднее значение случайной переменной в интервале  $[t_k, t_k + \tau]$ ,  $x_{k+j} = x(t_k + j \Delta\tau)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , где временной сдвиг  $\tau$  выражен через время дискретизации ( $\tau = m \Delta\tau$ ).

Все моменты, определенные выражением (1), удобно выразить в одних и тех же единицах рассматривая функцию обобщенного среднего (ФОС):

$$G_p(t_k, \tau) = (\Delta_p(t_k, \tau))^{1/p} \quad (2)$$

Отношение ФОС для различных фрагментов одного и того же процесса обозначим через  $\gamma(t_k, \tau)$ :

$$\gamma(t_k, \tau) = \frac{\mathbb{E} \Delta_p(t_{k+j}, \tau)^{1/p}}{\mathbb{E} \Delta_p(t_k, \tau)} = \frac{G_p(t_{k+j}, \tau)}{G_p(t_k, \tau)}. \quad (3)$$

Где  $x_{k+j} = x(t_k + j\Delta\tau)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ;  $t_k$  — моменты времени, отделенные друг от друга фиксированными интервалами, равной длины  $\Delta\tau$ .

В случае стационарности сигнала

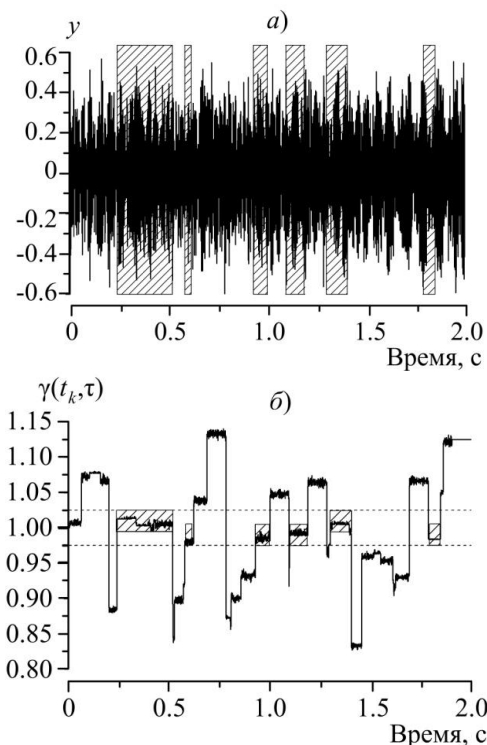
$$G_p(t_k, \tau) = G_p(t_{k+j}, \tau), \quad \gamma(t_k, \tau) = 1. \quad (4)$$

Статистическая близость любых двух фрагментов рассматриваемого нестационарного шума определяется линейной зависимостью

$$G_p(t_{k+j}, \tau) = a G_p(t_k, \tau) + b \quad (5)$$

При  $b \neq 0$  коэффициент  $a$  определяется значением  $\gamma(t_k, \tau)$ .  
 Задав границы изменения этой функции (например,  $0.9 \leq \gamma(t_k, \tau) \leq 1.1$ ) можно выделить статистически однородные участки процесса при оптимальной длине участков фрагментации и оптимизировать начала выбранных фрагментов  $t_k$  (рис. 1).





**Рисунок 1. Выделение статистически однородных участков в акустическом шуме пчелиной семьи (а) с помощью функции нестационарности (б)**

*Частотные характеристики акустического шума пчелиных семей.*  
 В дополнение к количественным параметрам, получаемым при анализе акустических шумов пчел во временной области, используется новый метод спектрального оценивания выделенных статистически однородных фрагментов ограниченной длительности (подробно в работе [6]). Для этого выделенный участок заменяется конечным набором гармоник, содержащим информационно-значимую и ограниченную совокупность ( $K < 30$ ) не кратных друг другу частот. Для каждого анализируемого участка шума пчел выделяются основные частоты, используемые в качестве дискриминирующих признаков.

*Количественное сравнение статистически однородных участков по принципу опыт-образец.* Для количественного сравнения генерируемых пчелами акустических шумов предлагается использовать

статистику высших моментов. Использование ФОС дает возможность найти истинную корреляцию между двумя сравниваемыми участками, если построить эти ФОС друг относительно друга. Если при этом получается отрезок прямой линии, то можно говорить об их статистической близости. Из такого сравнения можно получить два параметра: тангенс угла наклона прямой, который при полном совпадении участков равен единице и отсечка прямой (точка пересечения прямой с осью ординат), которая в идеале равняется нулю.

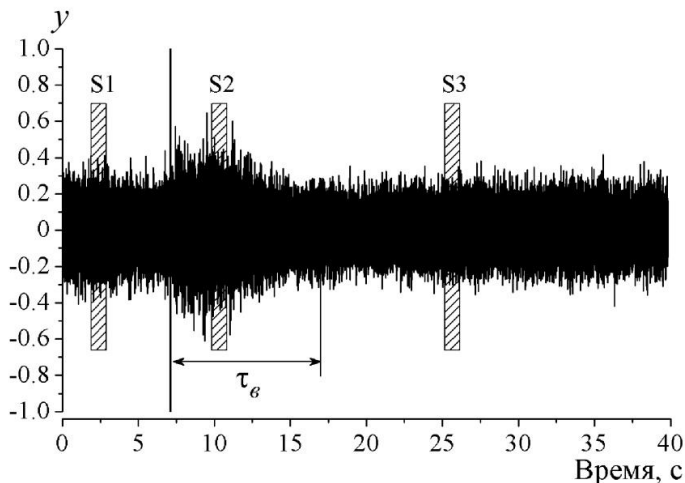
Кроме того, предлагается расширить понятие коэффициента корреляции, введя обобщенную функцию корреляции Пирсона (ОФКП), зависящую от величины момента [4]:

$$K_p(x, y, \tau) = \frac{\left[ \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} [(x_j - \langle x \rangle)(y_j - \langle y \rangle)] \right]^p}{\left[ \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} |x_j - \langle x \rangle|^{2p} \right]^{\frac{1}{2p}} \cdot \left[ \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} |y_j - \langle y \rangle|^{2p} \right]^{\frac{1}{2p}}}, \quad (6)$$

где  $x(t_j)$  и  $y(t_j)$  — статистически однородные участки, соответствующие исследуемому шуму. ОФКП значительно расширяет пределы применимости общепринятого коэффициента корреляции Пирсона, определенного лишь при  $p = 1$ . Функция  $K_p(x, y, \tau)$  помогает также найти целую полосу корреляций, которая локализуется между ее минимальным и предельным значениями. Количественной мерой корреляционной зависимости выбрано среднее арифметическое этих значений, т. е.  $\Delta = 0.5(K_{\lim} + K_{\min})$

*Вибрационная стимуляция.* Временная структура акустических откликов на вибрационную стимуляцию (крутизна фронта и последующее развитие) связана с физиологическим состоянием пчелиных семей. Семьи, находящиеся в нормальном для зимовки состоянии (благополучно преодолевающие зимовку), реагировали на одиночный вибрационный импульс резким усилением генерируемых звуков (рис. 2). Их интенсивность за 5—10 мс возрастала в  $1,6 \pm 0,5$  раза. Общая продолжительность акустического отклика, изменяющегося по амплитуде и частоте, составляла в среднем 8,2 с (lim. 5,6—14,8). В отдельных случаях, после возбуждения пчел, наблюдалось временное прекращение их активности, что выражалось в уменьшении интенсивности

по отношению к исходному уровню в  $1,3 \pm 0,1$  раза. Продолжительность этого периода в звуковом отклике составляла в среднем 3,8 с (lim. 2,5—5,8). За этим следовало некоторое усиление звуков, которое чаще всего не достигало исходного уровня, и некоторое изменение их частоты.

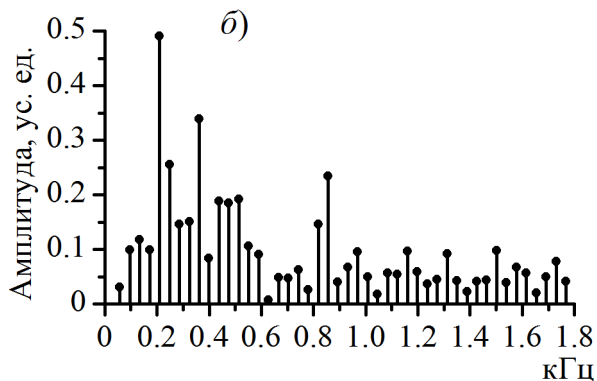
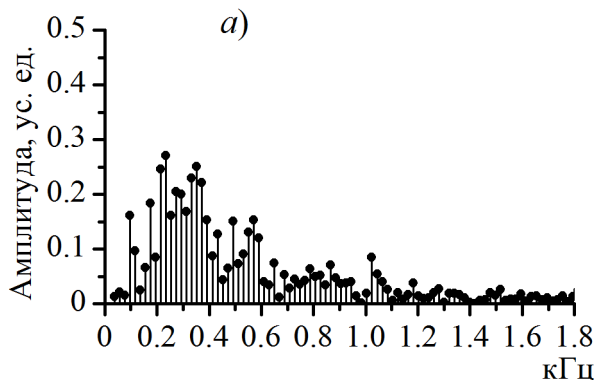


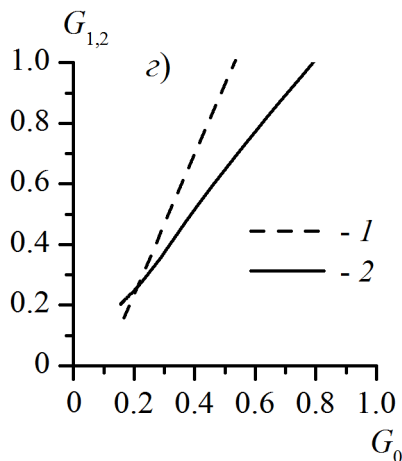
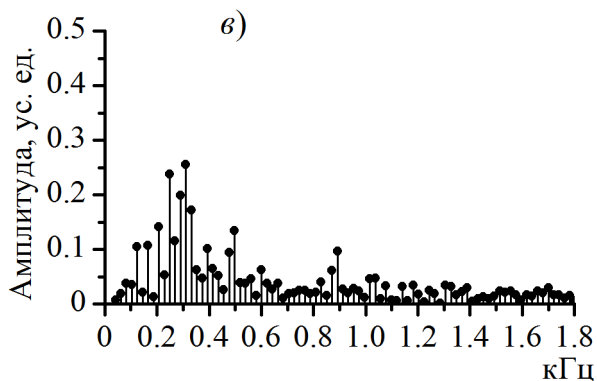
**Рисунок 2. Временная структура акустического отклика пчелиной семьи, находящейся в благополучных условиях зимовки, на вибрационную стимуляцию. Прямоугольниками отмечены анализируемые участки акустического шума пчел длительностью 1 сек: S1 — до стимуляции, S2 — в момент активизации, S3 — после нормализации состояния пчел**

По изменению интенсивности генерируемых пчелами звуков во временной области можно проследивать изменения физиологического состояния пчел, но сложно выделить информативные признаки для идентификации множества состояний семьи и выработать правила для их дифференциации. Для решения этих задач проводится спектральное оценивание выделенных фрагментов акустического шума пчел с использованием метода неортогонального спектрального анализа сложных сигналов [6].

Интенсивные составляющие звукового фона благополучной зимующей семьи находятся в диапазоне 200—550 Гц (рис. 3а). Вибростимуляция приводит как к усилению низкочастотных составляющих 200—300 Гц, так и появлению в спектре более высоких

частот до 1000 Гц (рис. 3б). В отдельных семьях отчетливо проявлялись звуки в диапазоне 1000—2000 Гц, что сопровождалось так называемым «шипением» пчел. Шипящие звуки, издаваемые пчелами синхронным движением крыльев, в том или ином поведенческом контексте являются ответом на внешние воздействия. Сравнение в терминах ФОС спектров участков исходного звука, генерируемого пчелами и его изменений под действием вибрационной стимуляции, можно провести по двум параметрам: тангенсу угла наклона прямых и отсечке прямых на оси ординат. В случае статистической близости этих участков (схожести их частотной структуры) функции обобщенного среднего представленные друг относительно друга на координатной плоскости образуют отрезок прямой линии:  $G(G_0) \cong aG_0 + b$ , где  $G_0$  соответствует спектру исходной структуры звуков, а  $G$  – после вибрационной стимуляции.





**Рисунок 3.** Изменения под действием вибрационной стимуляции частотных спектров звуков, генерируемых пчелиной семьей, зимующей при нормальных условиях: *а* — до стимуляции (*S1*), *б* — в момент активизации (*S2*), *в* — после нормализации состояния пчел (*S3*), *з* — сравнение спектров с помощью ФОС

Коэффициенты *a* (или тангенс угла наклона соответствующей прямой) и *b* (начальная отсечка прямой), определенные методом наименьших квадратов, характеризуют изменение акустических процессов. При совпадении их частотных (также и временных) структур перед началом и после воздействия стимула коэффициент *a* равняется единице, *b* — нулю. Эти параметры у благополучно зимующих семей

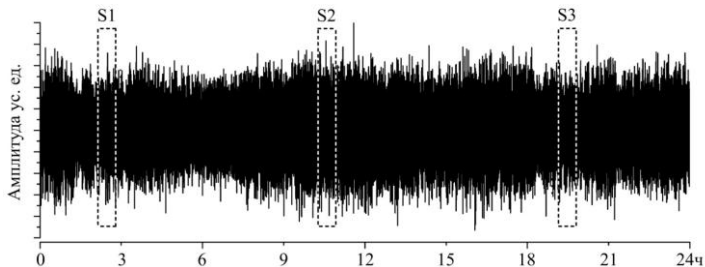
варьировали в незначительных пределах. Так, значения  $a$  менялись в пределах 1,05...0,84, а отсечка прямых была близка к нулю  $b \approx 0$ .

Классификация физиологических состояний пчелиных семей возможно по набору информативных признаков, выделенных из акустических шумов, соответствующих каждому диагностируемому состоянию.

Отклонение состояния пчелиных семей от нормы отражалось на структуре акустического отклика. Семьи, испытывавшие голодание, связанное с недостатком кормовых запасов, реагировали на вибрационную стимуляцию увеличением продолжительности и уменьшением фронта нарастания интенсивности акустического отклика по сравнению с его изменением у семей, находящихся в нормальном состоянии. Сходную структуру имели акустические отклики у семей, в гнезда которых не соответствовали биологической норме по влажности воздуха. Общая продолжительность акустического отклика, изменяющегося по амплитуде, составляла в среднем 25 с (lim. 13,8—58,5). Интенсивные составляющие звукового фона таких семей находятся в диапазоне 100—1100 Гц. Семьи, зимовавшие в ульях с повышенной температурой, слабо или совсем не реагировали изменением генерируемых звуков на вибрационную стимуляцию. Это объясняется исходно высоким уровнем возбуждения пчел под действием неблагоприятного для них повышения внутригнездовой температуры. Интересно отметить, что частотный спектр при этом практически не изменяется и имеет максимум в узкой полосе частот 350—375 Гц.

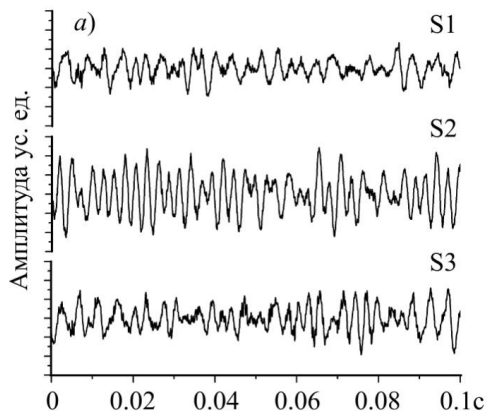
#### *Акустические отклики пчел на электромагнитные воздействия.*

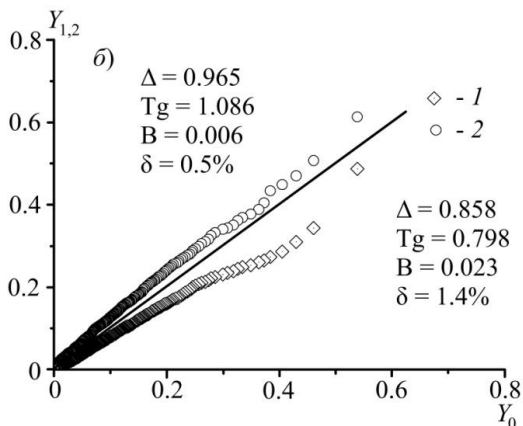
Изменения амплитуд частотных составляющих акустических процессов в пчелиных семьях указывают на зависимость их физиологического состояния от суточной динамики нагрузки ЛЭП. Интенсивные составляющие частотных спектров получены после выделения статистически однородных участков для каждого выделенного участка шума. В утренние часы интенсивные составляющие в спектрах звуков, генерируемых пчелами, находятся в диапазоне 220—250 Гц. В дневное время возмущения ЭМП приводят к увеличению интенсивных составляющих на частотах 400—450 Гц. Этому же сопутствует увеличение летной активности пчел. В вечернее время возрастает интенсивность частотных составляющих в диапазоне 300—350 Гц (рис. 4).



**Рисунок 4. Суточная временная структура (осциллограмма) акустического шума пчелиной семьи, находящейся под ЛЭП 500 кВ на высоте 0,5 м от земли. Прямоугольниками обозначены сравниваемые участки шума, соответствующие разным моментам времени**

На возможность выявления статистически значимого влияния ЭМП на физиологическое состояние пчел показывает анализ относительных флуктуаций акустического шума при разной нагрузке трассы. С помощью функций обобщенного среднего можно сравнить интегрированные участки акустического шума. Статистическая эквивалентность участков проверялась по близости их ФОС к отрезкам прямых линий (рис. 5). Количественная характеристика этой близости оценивается по четырем параметрам:  $\Delta$ ,  $T_g$ ,  $V$ ,  $\delta$  (относительная ошибка подгонки выбранного участка суммой конечного числа неортогональных гармоник).





**Рисунок 5. Временная структура выделенных участков акустического шума (участки S1—S3) при разной нагрузке трассы и выявление ее влияния на физиологическое состояние пчел:**

$Y_0$  — последовательность относительных флуктуаций акустического шума в утренние часы;  $Y_1$  — в дневное время;  $Y_2$  — вечером

Структура акустического отклика пчелиных семей на вибрационную и электромагнитную стимуляцию зависит от их физиологического состояния. Реагирование на вибрационную стимуляцию ослабляется под влиянием биотических и абиотических факторов активизирующих пчел. Использование функций обобщенного среднего для анализа временно-частотной структуры шумов, генерируемых пчелами, позволило выявить статистически значимое влияние ЭМП на физиологическое состояние пчел. На это указывает наличие связи между флуктуациями шумов пчелиных семей и изменениями нагрузки трассы. Рассматривая функции обобщенного среднего для различных участков акустического ответа можно получить статистический кластер параметров, образующих семейство однородных его значений.

Предложенный в данной работе подход способствует повышению надежности диагностики физиологического состояния пчел и прогнозирования его вероятных изменений в годовом цикле роста и развития семей.

Исследование выполнено в рамках базовой части государственного задания Министерства Образования и Науки РФ. (Это предложение обязательное условие для включения статьи в индикаторы, его необходимо оставить)



### **Список литературы:**

1. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. — 320 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. М: Мир, 1990.
3. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М: Мир, 1990.
4. Еськов Е.К., Тобоев В.А. Анализ статистически однородных фрагментов акустических шумов, генерируемых скоплениями насекомых // Биофизика. — 2010. — Т. 55. — Вып. 1. — С. 113—125.
5. Тобоев В.А., Толстов М.С. Признаковое описание акустических шумов на основе статистической близости функций обобщенного среднего (ФОС). Вестник Чувашского университета // — 2010. — № 3. — С. 19—31.
6. Nigmatullin R.R., Osokin S.I., Toboev V.A. NAFASS: Discrete spectroscopy of random signals // Chaos, Solitons & Fractals. — 2011. — V. 44. — Issue 4—5. — P. 226—240.

## 4.2. ВЕТЕРИНАРИЯ

### ИННЕРВАЦИЯ ОРГАНОВ ТАЗОВОЙ ПОЛОСТИ КОТОВ

***Ситдиков Рашид Исламудинович***

*д-р вет. наук, зав. кафедрой анатомии, профессор  
Казанской государственной академии ветеринарной медицины,  
РФ, г. Казань*

***Миншагаева Фарида Имамудиновна***

*канд. вет. наук, доцент кафедры анатомии Казанской  
государственной академии ветеринарной медицины, РФ, г. Казань  
E-mail: [aiyar\\_3@mail.ru](mailto:aiyar_3@mail.ru)*

***Шамсутдинова Нажия Вагизовна***

*канд. вет. наук, ст. преп. кафедры акушерства  
и патологии мелких животных Казанской государственной  
академии ветеринарной медицины, РФ, г. Казань  
E-mail: [Nadja\\_1212@mail.ru](mailto:Nadja_1212@mail.ru)*

### INNERVATION OF PELVIC CAVITY ORGANS OF CATS

***Rashid Sitdikov***

*doctor of Veterinary Science, Head of Department of Veterinary Anatomy,  
professor of Bauman Kazan State Academy of Veterinary Medicine,  
Russia, Kazan*

***Farida Minshagayeva***

*candidate of Veterinary Science, associate professor of Department  
of Veterinary Anatomy, Bauman Kazan State Academy of Veterinary Medicine,  
Russia, Kazan*

***Nazhiya Shamsutdinova***

*candidate of Veterinary Science,  
head teacher of Department of Obstetrics and Pathology of Small Animals,  
Bauman Kazan State Academy of Veterinary Medicine, Russia, Kazan*

## АННОТАЦИЯ

Методом обычного и тонкого анатомического препарирования под падающей каплей воды (В.П. Воробьев, 1925) была изучена иннервация органов тазовой полости котов. Авторами было установлено, что источником иннервации органов тазовой полости котов является тазовое сплетение.

## ABSTRACT

Using the method of common and delicate anatomic dissection under dripping water (V.P. Vorobyev, 1925) innervation of pelvic cavity organs of cats has been examined. It has been found that the source of innervation of pelvic cavity organs of cats is pelvic plexus.

**Ключевые слова:** кот; тазовое сплетение; срамной нерв; подчревный нерв; мочеполовой канал.

**Keywords:** a cat; pelvic plexus; pudendal nerve; hypogastric nerve; nephrogonoduct.

По мнению ученых, патология мочеполовой системы у котов встречается чаще, нежели у других животных и, следовательно, эти питомцы требуют особого внимания.

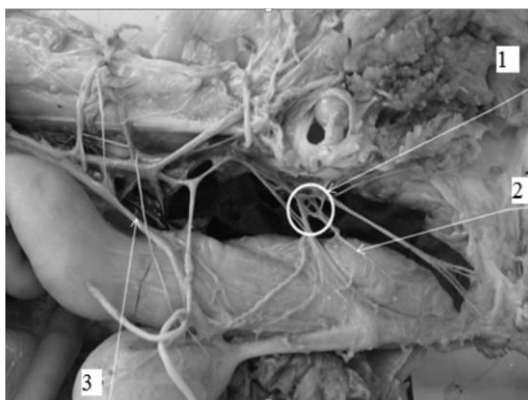
У котов уроцистит часто осложняется обструкцией уретры. Для оказания помощи применяют катетеризацию. Процедура болезненна и проводится под общей седацией. Для разработки местного обезболивания при проведении катетеризации нами была изучена морфологическая литература по иннервации органов тазовой полости котов [1, с. 257—260]. Но найти специальных детальных исследований нам не удалось. Это и определило цель нашего исследования: изучить иннервацию органов тазовой полости котов.

Объектом исследований служили трупы шести взрослых половозрелых котов в возрасте одного года до пяти лет.

Для изучения источников иннервации органов тазовой полости использовали метод обычного и тонкого анатомического препарирования под падающей каплей воды (В.П. Воробьев, 1925).

В процессе проведения анатомического исследования мы установили, что источником иннервации органов тазовой полости котов является тазовое сплетение (pl. pelvini), которое представлено сложным комплексом нервных ветвей и ганглиев [2, с. 38—39]. Симпатическими источниками формирования тазового сплетения служат подчревные нервы и ветви от крестцового отдела симпатического ствола [3, с. 42]. Кроме того, в тазовое сплетение входят симпатические волокна из околососудистых нервных сплетений, окружающих крупные сосуды

органов тазовой полости. К парасимпатическим источникам относятся тазовые нервы и ветви срамного нерва (рис. 1).



**Рисунок 1.** 1 — тазовое сплетение, 2 — левый срамной nerve, 3 — левый мочеточник

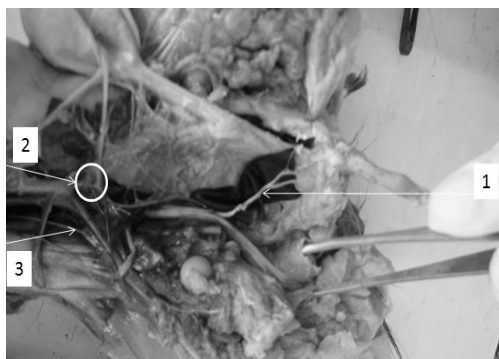
Подчревные нервы (n.n. hypogastrici) формируются значительными по толщине (1—1,5 мм) нервными волокнами, происходящими от каудального брыжеечного сплетения (pl. mesentericus caudalis), которые располагаются на передней стенке каудальной брыжеечной артерии и соединяются с ветвями полулунного узла (pl.semilunaris) и белыми соединительными ветвями, отходящими от III—V поясничных нейросегментов.

Правый и левый подчревные нервы тянутся по латеро-дорзальной поверхности прямой кишки и обмениваются между собой тонкими соединительными ветвями. По своему ходу подчревные нервы в своем составе имеют небольшие узелки. Подчревные нервы отдают тонкие веточки к мочеточникам и телу мочевого пузыря. В тазовой полости подчревный нерв разветвляется на множество ветвей по рассыпному типу. Все эти ветви, веерообразно рассыпаясь, следуют в каудальном и каудо-вентральном направлениях к органам тазовой полости, в частности к мочеполовому каналу котов. Самые краниальные ветви в количестве 3—4-х, имеющие небольшую толщину и длину, разветвляются в мочеполовой складке и брыжейке начальной части прямой кишки. Каудальные ветви являются очень короткими — они разветвляются в области шейки мочевого пузыря и в стенке мочеполового канала и предстательной железе (рис. 2).



**Рисунок 2.** 1 — левый подчревный нерв, 2 — наружная подвздошная артерия, 3 — симпатический ствол, 4 — прямая кишка, 5 — срамной нерв, 6 — тазовое сплетение, 7 — окружная глубокая подвздошная артерия

Ветви срамного нерва (n.pudendus) в образовании тазового сплетения принимает участие не у всех исследованных животных. Он отдает тонкие веточки к прямой кишке, мочевому пузырю (рис. 3).



**Рисунок 3.** 1 — срамной нерв, 2 — каудальный брыжеечный узел, 3 — симпатический ствол

Тазовые нервы (nn. pelvini) сформированы вентральными ветвями 1-го и 2-го крестцовых спинномозговых нервов. Наибольшее количество нервных волокон отходят от 2-го крестцового нерва. От 1-го крестцового нерва отходят две тонкие ветви, которые затем

объединяются в один ствол с пучками более толстого 2-го крестцового нерва.

На дорзальной поверхности прямой кишки тазовый нерв рассыпается на множество тонких ветвей, которые идут ко всем органам тазовой полости (рис. 1, 2). Причем разветвления тазового нерва на органах тазовой полости располагаются более поверхностно по отношению к разветвлениям подчревного нерва и имеют с ними многочисленные тонкие соединительные ветви.

Таким образом, источником иннервации органов тазовой полости является тазовое сплетение, от которого отходят ветви к прямой кишке, мочеточнику, мочевому пузырю, тазовой части мочеполового канала.

### **Список литературы:**

1. Зеленецкий Н.В. Анатомия собаки и кошки/ Н.В. Зеленецкий, Г.А. Хонин//СПб.: Изд. «Логос» 2004. — 344 с.
2. Коротковская О.А. Морфология ганглиев тазового сплетения у собак/ О.А. Коротковская//Тр. Кубанского государственного аграрного университета. — 2009. — № 1. — С. 38—39.
3. Хонин Г.А. Источники образования и особенности топографии тазового сплетения у пушных зверей семейства собачьих и куных/ Г.А. Хонин// Морфология. — 2002. — Т. 122. — № 4. — С. 40—44.

## СЕКЦИЯ 5.

### ХИМИЯ

#### 5.1. НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

#### МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ $\text{Bi}_3\text{Nb}_{1-x}\text{Ni}_x\text{O}_{7-\Delta}$

*Жук Надежда Алексеевна*

*канд. хим. наук, доцент  
Сыктывкарского государственного университета,  
РФ, г. Сыктывкар  
E-mail: [nzhuck@mail.ru](mailto:nzhuck@mail.ru)*

*Кокшарова Людмила Алексеевна*

*бакалавр кафедры химии  
Сыктывкарского государственного университета,  
РФ, г. Сыктывкар  
E-mail: [lyuda2701@yandex.ru](mailto:lyuda2701@yandex.ru)*

#### THE MAGNETIC SUSCEPTIBILITY OF SOLID SOLUTIONS $\text{Bi}_3\text{Nb}_{1-x}\text{Ni}_x\text{O}_{7-\Delta}$

*Zhuk Nadezhda*

*candidate of Science, assistant professor of Syktyvkar State University,  
Russia, Syktyvkar*

*Koksharova Lyudmila*

*bachelor of the department of chemistry of Syktyvkar State University,  
Russia, Syktyvkar*

#### АННОТАЦИЯ

Исследована магнитная восприимчивость образцов разбавленных твердых растворов  $\text{Bi}_3\text{Nb}_{1-x}\text{Ni}_x\text{O}_{7-\delta}$  методом Фарадея в температурном интервале 77—400 К. На основании проведенных исследований

установлено электронное состояние и распределение парамагнитных атомов в кристаллической структуре твердых растворов.

#### ABSTRACT

The magnetic susceptibility of samples of dilute solid solutions  $\text{Bi}_3\text{Nb}_{1-x}\text{Ni}_x\text{O}_{7-\delta}$  Faraday method in the temperature range 77—400 K. On the basis of studies found the electronic state and the distribution of paramagnetic atoms in the crystal structure of solid solutions.

**Ключевые слова:** твердые растворы; гетерогенное замещение; ниобат висмута.

**Keywords:** solid solutions; the heterogeneous substitution; the niobate of the bismuth.

Ниобат висмута относится к группе кислородно-ионных проводников, его электропроводность при 873 К, по данным [14], составляет  $5 \cdot 10^{-4}$  См/см.

Модификация состава ниобата висмута путем гетеровалентного замещения ниобия приводит к увеличению дефектности анионной подрешетки и электропроводности [11, 12, 15, 16]. Рентгеноструктурный анализ образцов твердых растворов показал, что допированные атомы имеют искаженное октаэдрическое окружение [12, 15, 16]. В работе [16] высказано предположение о нестатистическом распределении атомов в катионной подрешетке.

Магнетохимическое исследование обменных взаимодействий и состояния парамагнитных атомов в разбавленных твердых растворах изоморфного замещения  $\text{Bi}_3\text{Nb}_{1-x}\text{Ni}_x\text{O}_{7-\delta}$  кубической модификации позволяет оценить распределение атомов никеля в катионной подрешетке [1—10].

Ниобат висмута  $\text{Bi}_3\text{NbO}_7$  кристаллизуется в тетрагональной и кубической модификациях, тетрагональная фаза образуется в температурном интервале 800—900 °С [14, 17]. Кубический ниобат висмута имеет дефектную по кислороду флюоритоподобную структуру ( $Fm\bar{3}m$ ) с параметром элементарной ячейки  $a = 0,5479$  нм. Атомы висмута и ниобия статистически распределены в одной системе кристаллографических позиций в мольном соотношении  $n(\text{Bi})/n(\text{Nb}) = 3/1$ , координационным полиэдром ниобия является искаженный октаэдр [14].

Твердые растворы синтезированы керамическим методом из оксидов висмута (III), ниобия (V) и никеля (II) квалификации “ос.ч.” и “х.ч.” в два этапа, при температуре 650 °С, 1050 °С. Фазовый состав контролировали методом рентгенофазового анализа (ДРОН-4-13,



Cu<sub>K $\alpha$</sub> -излучение), параметры элементарной ячейки твердых растворов рассчитаны с использованием пакета программ CSD [13].

Твердые растворы  $\text{Vi}_3\text{Nb}_{1-x}\text{Ni}_x\text{O}_{7-\delta}$  получены в узком интервале концентраций  $0,005 < x < 0,06$ . Параметр элементарной ячейки твердых растворов близок параметру ячейки для  $\text{Vi}_3\text{NbO}_7$ .

Количественное определение содержания никеля в образцах твердых растворов проведено методом атомно-эмиссионной спектроскопии (спектрометр SPECTRO CIROS с индуктивно-связанной плазмой).

Измерения магнитной восприимчивости твердых растворов проведены по методу Фарадея в интервале температур 77—400 К при 16 фиксированных значениях температуры. Точность относительных измерений составила 2 %.

На основании измерений магнитной восприимчивости твердых растворов рассчитаны парамагнитные составляющие магнитной восприимчивости  $[\chi^{\text{пара}}(\text{Ni})]$  и значения эффективных магнитных моментов  $[\mu_{\text{эф}}(\text{Ni})]$  атомов никеля при разных температурах и для различных концентраций твердых растворов. Диамагнитные поправки при расчете парамагнитной составляющей магнитной восприимчивости введены с учетом восприимчивости матрицы  $\text{Vi}_3\text{NbO}_7$  кубической модификации, измеренной в том же температурном интервале.

Зависимость обратной величины парамагнитной составляющей магнитной восприимчивости, рассчитанной на один моль атомов никеля, от температуры для всех твердых растворов подчиняется закону Кюри-Вейсса в исследуемом интервале температур. Изотермы парамагнитной составляющей магнитной восприимчивости никеля  $[\chi^{\text{пара}}(\text{Ni})]$  типичны для антиферромагнетиков. Величина эффективного магнитного момента одиночных атомов никеля, рассчитанная в результате экстраполяции концентрационных зависимостей величин  $[\chi^{\text{пара}}(\text{Ni})]$  на бесконечное разбавление твердого раствора, не зависит от температуры и составляет  $\mu_{\text{эф}}(\text{Ni}) = 2,54$  МБ, что указывает на отсутствие атомов никеля (III) в высокоспиновом состоянии ( $^4\text{T}_{2g}$ ). Значение магнитного момента отвечает наличию атомов никеля (II) ( $\mu_{\text{эф}}(\text{Ni}) = 2,8$  МБ) и никеля (III) ( $\mu_{\text{эф}}(\text{Ni}) = 1,87$  МБ) в низкоспиновом состоянии ( $^2\text{E}_g$ ), не исключено присутствие в разбавленном растворе обменно-связанных агрегатов из парамагнитных атомов никеля Ni(II)-O-Ni(II) с антиферромагнитным типом обмена. Можно полагать, что при сохранении кристаллической структуры гетеровалентное замещение ниобия атомами никеля вызывает появление кислородных вакансий, что приводит либо к окислению части атомов до Ni(III), либо образованию кластеров из парамагнитных атомов и кислородных вакансий. Причиной реализации низкоспинового

состояния окисленных атомов, как отмечается в работах [5, 6, 7, 10], является значительное искажение их координационного полиэдра. Обращает на себя внимание тот факт, что обмен между парамагнитными атомами, в целом, антиферромагнитный. Реализация такого типа обмена становится возможной, если, во-первых, предположить локальное сосредоточение парамагнитных атомов в катионной подрешетке, во-вторых, косвенное обменное взаимодействие реализуется между атомами, расположенными на диагоналях граней элементарной ячейки, например, по каналу обмена  $d_{x-y}^2 \| p_x \| d_{x-y}^2$ .

Установлено, что никельсодержащие твердые растворы ниобата висмута образуются в узком концентрационном интервале; между парамагнитными атомами никеля осуществляется косвенный антиферромагнитный обмен, что возможно в случае агрегации атомов парамагнетика.

### Список литературы:

1. Жук Н.А., Пийр И.В., Чежина Н.В. VI. Магнитное поведение твердых растворов  $\text{Bi5Nb3-3xNi3xO15-y}$ // ЖОХ. — 2008. — Т. 78. — № 3. — С. 393—400.
2. Жук Н.А., Пийр И.В., Чежина Н.В. Магнитные и электрические свойства медьсодержащих твердых растворов ортониобата висмута // ЖОХ. — 2007. — Т. 77. — № 2. — С. 240—245.
3. Жук Н.А., Пийр И.В., Пименов А.Л., Чежина Н.В. IV. Магнитное поведение хромсодержащих твердых растворов со структурой ниобата висмута  $\text{Bi5Nb3O15}$ // ЖОХ. — 2007. — Т. 77. — № 3. — С. 898—904.
4. Жук Н.А., Пийр И.В., Чежина Н.В. I. Магнитное поведение хромсодержащих твердых растворов низко-и высокотемпературного ортониобата висмута// ЖОХ. — 2006. — Т. 76. — № 11. — С. 1780—1785.
5. Жук Н.А., Пийр И.В., Чежина Н.В. II. Состояние атомов никеля в твердых растворах низко-и высокотемпературного ортониобата висмута// ЖОХ. — 2006. — Т. 76. — № 11. — С. 1786—1791.
6. Чежина И.В., Бодрицкая Э.В., Жук Н.А. XXIII. Магнитное разбавление в системе  $\text{La(Sr)NiO3- LaGaO3}$ // ЖОХ. — 2008. — Т. 78. — № 6. — С. 899—904.
7. Чежина Н.В., Бодрицкая Э.В., Жук Н.А., Банников В.В., Шеин И.Р., Ивановский А.Л. Магнитные свойства и электронное строение перовскита  $\text{LaGaO3}$ , допированного никелем// ФТТ. — 2008. — Т. 50. — № 11. — С. 2032—2036.
8. Чежина Н.В., Пийр И.В., Жук Н.А. Состояние хрома в твердых растворах сложных ниобатов висмута  $\text{Bi2BaCr}_x\text{Nb}_{2-x}\text{O9}$  ( $0.01 < x < 0.3$ ) // ЖОХ. — 2005. — Т. 75. — № 1. — С. 24—28.

9. Чежина Н.В., Пийр И.В., Жук Н.А. VII. О состоянии меди в твердых растворах  $\text{Bi}_2\text{BaCu}_x\text{Nb}_{2-x}\text{O}_{9-y}$ //ЖОХ. — 2008. — Т. 78. — № 6. — С. 908—911.
10. Чежина К.В., Пийр И.В., Жук Н.А. Синтез и магнитная восприимчивость твердых растворов  $\text{BiNi}_x\text{Nb}_{1-x}\text{O}_x$ //ЖОХ. — 2005. — Т. 75. — № 2. — С. 340—341.
11. Abrahams I., Krok F., Kozanecka-Szmigiel A., Wrobel W., Cham S.C.M., Dygas J.R. Effects of ageins on defect structure in the  $\text{Bi}_3\text{NbO}_7$ -  $\text{Bi}_3\text{YO}_6$  system // J. Power Sources. — 2007. — Vol. 173. — P. 788—794.
12. Abrahams I., Krok F., Wrobel W., Kozanecka-Szmigiel A., Cham S.C.M. Defect structure in  $\text{Bi}_3\text{Nb}_{1-x}\text{Zr}_x\text{O}_7$ -y // Solid State Ionics. — 2008. — Vol. 179. — P. 2—8.
13. Akselrud L.G., Gryn Y.N., Zavalij P.Yu. // Thes. Rep. 12th Europ. Crystallogr. Meet. 1985. — P. 55.
14. Castro A., Aguado E. et al. The new oxygen-deficient fluorite  $\text{Bi}_3\text{NbO}_7$ : synthesis, electrical behavior and structural approach// Mater. Res. Bull. — 1998. — Vol. 1. — P. 31—41.
15. Leszczynska M., Holdynski M., Krok F., Abrahams I., Liu X., Wrobel W. Structural and electrical properties of  $\text{Bi}_3\text{Nb}_{1-x}\text{Er}_x\text{O}_7$ -y //Solid State Ionics. — 2010. — Vol. 181. — P. 796—811.
16. Struzik M., Liu X., Abrahams I., Krok F., Malys M., Dygas J.R. Defect structure and electrical conductivity in the pseudo-binary system  $\text{Bi}_3\text{TaO}_7$ - $\text{Bi}_3\text{NbO}_7$  // Solid State Ionics. — 2012. — Vol. 218. — P. 25—30.
17. Valant M., Suvorov D. Dielectric Properties of the Fluorite-like  $\text{Bi}_2\text{O}_3$ - $\text{Nb}_2\text{O}_5$  Solid Solution and the tetragonal  $\text{Bi}_3\text{NbO}_7$ //J. Am. Ceram. Soc. — 2003. — Vol. 86. — № 6. — P. 939—944.

**Научное издание**

**«ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ»**

Сборник статей по материалам  
XXI международной научно-практической конференции

№ 8 (20)  
Август 2014 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 13.08.14. Формат бумаги 60x84/16.  
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 6,25. Тираж 550 экз.

Издательство «СибАК»  
630049, г. Новосибирск, Красный проспект, 165, офис 15  
E-mail: mail@sibac.info

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленного оригинал-макета в типографии «Allprint»  
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3