



# ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

*Сборник статей по материалам  
XXVII международной научно-практической конференции*

№ 2 (26)  
Февраль 2015 г.

Издается с декабря 2012 года

Новосибирск  
2015

УДК 50  
ББК 20  
Е 86

Ответственный редактор: Гулин А.И.

Председатель редакционной коллегии:

**Козьминых Владислав Олегович** — д-р хим. наук, проф., зав. кафедрой химии естественнонаучного факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета.

Редакционная коллегия:

**Гукалова Ирина Владимировна** — д-р геогр. наук, доц. ведущий научный сотрудник Института географии НАН Украины, доц. кафедры экономической и социальной географии Киевского национального университета им. Т. Шевченко;

**Данилов Виктор Павлович** — канд. с.-х. наук, зам. дир. по научной работе СибНИИ кормов СО Россельхозакадемии;

**Елисеев Дмитрий Викторович** — канд. техн. наук, доцент, бизнес-консультант Академии менеджмента и рынка, ведущий консультант по стратегии и бизнес-процессам, «Консалтинговая фирма «Партнеры и Боровков»;

**Зеленская Татьяна Евгеньевна** — канд. физ.-мат. доц. кафедры высшей математики Югорского государственного университета;

**Королев Владимир Степанович** — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры механики управляемого движения факультета прикладной математики - процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

**Романова Алла Александровна** — канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной физики Санкт-Петербургского государственного экономического университета;

**Рымкевич Павел Павлович** — канд. физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры физики Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, чл.-кор. Международной академии наук экологии, безопасности человека и природы, член Экспертного совета по энергоэффективности зданий и сооружений Санкт-Петербурга;

**Сулейман Ерлан Мэлсұлы** — д-р филос. наук, канд. хим. наук, директор института прикладной химии при Евразийском национальном университете им. Л.Н. Гумилева;

**Харченко Виктория Евгеньевна** — канд. биол. наук, ст. науч. сотр. отдела флоры Дальнего Востока, Ботанический сад-институт ДВО РАН;

**Яковишина Татьяна Федоровна** — канд. с.-хоз. наук, доц., заместитель заведующего кафедрой экологии и охраны окружающей среды Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры, член Всеукраинской экологической Лиги.

**Е 86 Естественные и математические науки в современном мире / Сб. ст. по материалам XXVII междунар. науч.-практ. конф. № 2 (26). Новосибирск: Изд. «СибАК», 2015. 202 с.**

Учредитель: НП «СибАК»

Сборник статей «Естественные и математические науки в современном мире» включен в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

При перепечатке материалов издания ссылка на сборник статей обязательна.

## **Оглавление**

<b>Секция 1. Математика</b>	<b>8</b>
<b>1.1. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление</b>	<b>8</b>
ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ, КОГДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ ТОЛЬКО КРАТНЫЕ КОРНИ С НАГРУЗКАМИ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ И С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ Хидиров Худойкул Сатторович	8
<b>1.2. Математическая физика</b>	<b>17</b>
ЭНЕРГИЯ ВИХРЕВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ ЛЕГКОПЛОСКОСТНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА Хусаинова Галина Владимировна Хусаинов Дамир Зиннурович Сагарадзе Игорь Викторович	17
<b>1.3. Геометрия и топология</b>	<b>24</b>
ИНВАРИАНТНЫЕ НОРМАЛИЗАЦИИ СКОМПОНОВАННОГО ГИПЕРПЛОСКОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА Будылкин Андрей Александрович	24
ИНВОЛЮТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЕХСОСТАВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА Попов Юрий Иванович	33
<b>1.4. Математическая логика, алгебра и теория чисел</b>	<b>48</b>
КАТЕГОРИЧНЫЕ ФРАГМЕНТЫ ЙОНСОНОВСКИХ МНОЖЕСТВ. Ешкеев Айбат Рафхатович Муканов Амиржан Абзалович Медеубаев Нурболат Куттымуратович	48

СЕКРЕТ «ТРУДНОЙ ЗАДАЧИ» Мамедяров Даглар Мамедярович	57
<b>Секция 2. Информационные технологии</b>	<b>63</b>
<b>2.1. Системный анализ, управление и обработка информации</b>	<b>63</b>
СЦЕНАРНАЯ МОДЕЛЬ НОВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ ВУЗА В ЦЕЛОМ Сироткин Григорий Вячеславович	63
<b>2.2. Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами</b>	<b>74</b>
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СОПРОВОЖДЕНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ Деменкова Екатерина Алексеевна Бобров Дмитрий Александрович	74
<b>2.3. Управление в социальных и экономических системах</b>	<b>81</b>
CASE-СРЕДСТВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ БИЗНЕС- ПРОЦЕССОВ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ Гоголева Ирина Васильевна Уарова Саргылана Ивановна	81
<b>2.4. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ</b>	<b>87</b>
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА НА ГОРОДСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ Попков Владимир Константинович Ахмедиярова Айнур Танатаровна Куандыкова Джанна Рискуловна	87

<b>Секция 3. Физика</b>	<b>96</b>
<b>3.1. Механика деформируемого твердого тела</b>	<b>96</b>
УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ	96
Крылова Екатерина Юрьевна Папкина Ирина Владиславовна Салтыкова Ольга Александровна	
<b>3.2. Оптика</b>	<b>102</b>
МЕТОД ЛАЗЕРНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ КОМПЛЕМЕНТА	102
Непомнящая Элина Константиновна Величко Елена Николаевна Аксёнов Евгений Тимофеевич Богомаз Татьяна Александровна	
<b>3.3. Теоретическая механика</b>	<b>108</b>
ПЕРЕВОДЫ ТРУДОВ КЛАССИКОВ НАУКИ АКАДЕМИКОМ А.Н. КРЫЛОВЫМ	108
Поляхова Елена Николаевна Королев Владимир Степанович Холшевников Константин Владиславович	
<b>Секция 4. Биология</b>	<b>129</b>
<b>4.1. Ботаника</b>	<b>129</b>
ИЗУЧЕНИЕ АНАТОМИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ PHLOMIS MAXIMOWICZII REGEL И ANGELICA VIRIDIFLORA (TURCZ.) BENTH. EX MAXIM. ИЗ ДАЛЬНЕГО ВОСТОКА	129
Ишмуратова Маргарита Юлаевна Сүлеймен Ерлан Мэлсұлы Горовой Петр Григорьевич Дудкин Роман Васильевич	
ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕСТООБИТАНИЙ ВИДОВ РОДА VALERIANA В БАШКИРСКОМ ЗАУРАЛЬЕ	140
Харрасова Гульемеш Ваисовна Губайдуллина Миляуша Азаматовна Аралбаева Юлия Усмановна Билалова Фануза Равиловна	

<b>4.2. Медицинская биология</b>	<b>146</b>
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИМОРФНЫХ МАРКЕРОВ ГЕНОВ РЕПАРАЦИИ ДНК HOGG1, XRCC1 И ERCC2 И ИХ АССОЦИАЦИИ С РИСКОМ РАЗВИТИЯ НЕМЕЛКОКЛЕТОЧНОГО РАКА ЛЕГКОГО И РАКА ВЕРХНИХ ДЫХАТЕЛЬНЫХ ПУТЕЙ	146
Заварыкина Татьяна Михайловна Аткарская Марина Васильевна Бурдённый Алексей Михайлович Логинов Виталий Игоревич Жижина Галина Павловна Бурлакова Елена Борисовна	
<b>4.3. Экология и природопользование</b>	<b>157</b>
СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ПО ФАУНЕ ХИРОНОМИД ПРУДА ШКОЛЬНОГО ГОРОДА КАЛИНИНГРАДА	157
Гапаненок Евгения Анатольевна Винокурова Наталья Владимировна	
<b>4.4. Ветеринария</b>	<b>166</b>
ИЗУЧЕНИЕ КУЛЬТУРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ УСОВЕРШЕНСТВОВАННОЙ ПЛОТНОЙ ПИТАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ МИКОБАКТЕРИЙ	166
Жабина Виктория Юрьевна Коваленко Анатолий Михайлович	
ВЛИЯНИЕ СОМАТИЧЕСКОГО ЭКСТРАКТА FASCIOLA HEPATICA НА СОСТОЯНИЕ СЕМЕННИКОВ ЛАБОРАТОРНЫХ ЖИВОТНЫХ	172
Красникова Евгения Владимировна Сивкова Татьяна Николаевна	
ПАТОЛОГИИ МЕЙОЗА КЛЕТОК СЕМЕННИКОВ БЕЛЫХ МЫШЕЙ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СОМАТИЧЕСКОГО АНТИГЕНА DIROFILARIA IMMITIS	176
Согрина Анастасия Викторовна Бережко Вера Кузьминична Сивкова Татьяна Николаевна Написанова Людмила Александровна	

<b>Секция 5. Химия</b>	<b>184</b>
<b>5.1. Физическая химия</b>	<b>184</b>
ДИФфуЗИОННЫЙ ТРАНСПОРТ В ЦИЛИНДРЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ	184
Сицерман Владимир Юрьевич Махновский Юрий Абрамович Антипов Анатолий Евгеньевич	
<b>Секция 6. Науки о Земле</b>	<b>191</b>
<b>6.1. Физическая география     и ландшафтоведение</b>	<b>191</b>
ДИНАМИКА ПРОДУКТИВНОСТИ ОСНОВНЫХ АССОЦИАЦИЙ КАРГАЛИНСКОЙ СУБГЕОСИСТЕМЫ И ВЛИЯНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ НА ЕЕ ЗАПАС	191
Берденов Жарас Галимжанович Мендыбаев Ерболат Хамзинович Мазбаев Орденбек Близбекович	

## СЕКЦИЯ 1.

### МАТЕМАТИКА

#### 1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ, КОГДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ ТОЛЬКО КРАТНЫЕ КОРНИ С НАГРУЗКАМИ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ И С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

*Хидиров Худойкул Сатторович*

*канд. физ.-мат. наук,  
Филиал технологического университета Таджикистана в г. Куляб,  
Республика Таджикистан, г. Куляб  
E-mail: [habibullo-n@yandex.ru](mailto:habibullo-n@yandex.ru)*

#### STUDY OF LINEAR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO SINGULAR POINTS, WHEN THE CHARACTERISTIC EQUATION HAS MULTIPLE ROOTS ONLY WITH LOADS OF FREE MEMBER AND WITH THE ADDITIONAL CONDITIONS

*Khidirov Hudoqul*

*candidate of physical and mathematical sciences,  
Branch Technological University of Tajikistan in Kulob,  
Republic of Tajikistan, Kulob*



## АННОТАЦИЯ

На статье рассмотрена система линейных дифференциальных уравнений с двумя сингулярными точками, с нагрузками свободных членов, с дополнительными условиями. Исследовано существование ее решения с алгебраическим линейным уравнением.

## ABSTRACT

On paper we consider a system of linear differential equations with two singular points and with loads of free member and with the additional conditions investigated the existence of its solution with the algebraic linear equations.

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений; нагрузка; дополнительные условия; сингулярные точки.

**Keywords:** system of differential equations; load; additional conditions; singular point.

Рассмотрим систему уравнений

$$x(x-1)y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + f_i(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i(x), \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

где  $a_{kj}(x)$  – заданные непрерывные функции (без ограничения общности можем считать их вещественными). Что касается свободных членов и решений, то при  $x \neq 0$  и  $x \neq 1$  они также считаются непрерывными, а  $y_n(x)$  – непрерывно дифференцируемыми: в сингулярных точках  $x=0, x=1$  они могут быть непрерывными (класс C),

либо просто ограниченными (класс  $M^0$ ) нагрузками и с дополнительными условиями  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i(x)$ .

$\int_0^1 \phi_i(x)y_i(x)dx = q_i$ . ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ), ( $1^\circ$ ) Будем пользоваться также векторной записью

$$x(x-1)Y' = A(x) \cdot Y + F + \sum \alpha Q \quad (2)$$

где  $A(x) = \|a_{kj}(x)\|$  а  $Y(x)$  и  $F(x)$  – искомый и заданный векторы-столбцы, в силу чисто технических причин записываемые, однако, в строку

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), F = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

$$\sum \alpha Q = \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^1, \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^2, \dots, \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^n \right)$$

Рассмотрим сначала модельную систему

$$x(x-1)y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(0)y_j + f_i(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i(x) \quad (3)$$

Если  $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0$ , то получается однородная система, вместо  $a_{kj}(0) = a_{kj}$  и получим однородную систему в таком виде:

$$x(x-1)y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \quad (4)$$

Пытаясь удовлетворить однородные системы уравнений (4) степенными функциями  $\left|1 - \frac{1}{x}\right|^\lambda$  придем к характеристическому уравнению

$$y_1 = \gamma_{1k} \left|1 - \frac{1}{x}\right|^\lambda, y_2 = \gamma_{2k} \left|1 - \frac{1}{x}\right|^\lambda, \dots, y_n = \gamma_{nk} \left|1 - \frac{1}{x}\right|^\lambda$$

Дифференцируем и подставим систему уравнений (4)

$$y'_1 = \gamma_{1k} \lambda \left|1 - \frac{1}{x}\right|^{\lambda-1} \frac{1}{x(x-1)}, y'_2 = \gamma_{2k} \lambda \left|1 - \frac{1}{x}\right|^{\lambda-1} \frac{1}{x(x-1)}, \dots, y'_n = \gamma_{nk} \lambda \left|1 - \frac{1}{x}\right|^{\lambda-1} \frac{1}{x(x-1)}$$

$$x(x-1)\gamma_{ik} \lambda \left|1 - \frac{1}{x}\right|^{\lambda-1} \frac{1}{x(x-1)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \gamma_{ik} \left|1 - \frac{1}{x}\right|^\lambda, (i = 1, 2, \dots, n)$$

После сокращения на  $\left|1 - \frac{1}{x}\right|^\lambda$  получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} [a_{11} - \lambda]\gamma_{1k} + a_{12}\gamma_{2k} + \dots + a_{1n}\gamma_{nk} = 0 \\ a_{21}\gamma_{1k} + [a_{22} - \lambda]\gamma_{2k} + \dots + a_{2n}\gamma_{nk} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\gamma_{1k} + a_{n2}\gamma_{2k} + \dots + [a_{nn} - \lambda]\gamma_{nk} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Или в матричном форме

$$\Delta(\lambda) \cdot \Gamma \equiv \det \left[ A(0) - \lambda I \right] \cdot \Gamma = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_{1k} \\ \gamma_{2k} \\ \dots \\ \gamma_{nk} \end{vmatrix} = 0, \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{1k} \\ \gamma_{2k} \\ \dots \\ \gamma_{nk} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда его корни кратные  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$  (кратность  $n$ ), причем  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ . Из этого необходимо следует  $\Delta^0 = \det A(0) \neq 0$ . Если  $(\gamma_{1k}, \gamma_{2k}, \dots, \gamma_{nk}), k = 1, 2, \dots, n$  являются линейно независимыми решениями систем с определителями равными нулю

$$\begin{cases} [a_{11} - \lambda]\gamma_{1k} + a_{12}\gamma_{2k} + \dots + a_{1n}\gamma_{nk} = 0 \\ a_{21}\gamma_{1k} + [a_{22} - \lambda]\gamma_{2k} + \dots + a_{2n}\gamma_{nk} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\gamma_{1k} + a_{n2}\gamma_{2k} + \dots + [a_{nn} - \lambda]\gamma_{nk} = 0 \end{cases}$$

то  $\det \|\gamma_{kj}\| \equiv \Gamma \neq 0$  и  $\left( \gamma_{1k} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda, \gamma_{2k} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda, \dots, \gamma_{nk} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \right) = Y_0^{(k)}(x)$

( $k = 1, 2, \dots, n$ )

образуют  $n$  – линейно-независимых решений систем (4).  
Записывая общее решение системы (4)

$$y_j = \sum_{k=1}^n c_k \gamma_{jk} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \ln^{k-1} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|, \quad (6)$$

$$Y(x) = \sum_{k=1}^n c_k \overset{(k)}{Y}_0(x) \ln^{k-1} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|,$$

где  $c_k$  – произвольные постоянные, для нахождения частного решения неоднородной системы  $\hat{Y}(x) = \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$  пользуемся методом вариации постоянных. Дифференцируем (6) и подставим в (3)

$$\begin{aligned} y_1' &= c_1 \gamma_{11} \lambda \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{1}{x(x-1)} + \gamma_{11} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{dc_1}{dx} + c_2 \gamma_{12} \lambda \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{1}{x(x-1)} \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| + \\ &+ c_2 \gamma_{12} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{1}{x(x-1)} + \gamma_{12} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \frac{dc_2}{dx} + \dots \\ &+ c_n \gamma_{1n} \lambda \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{1}{x(x-1)} \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{n-1} + \\ &+ c_n \gamma_{1n} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda (n-1) \frac{1}{x(x-1)} \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{n-2} + \gamma_{1n} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{n-1} \frac{dc_n}{dx} \\ &\dots \\ &\dots \\ y_n' &= c_1 \gamma_{n1} \lambda \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{1}{x(x-1)} + \gamma_{n1} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{dc_1}{dx} + c_2 \gamma_{n2} \lambda \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{1}{x(x-1)} \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| + \\ &+ c_2 \gamma_{n2} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{1}{x(x-1)} + \gamma_{n2} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \frac{dc_2}{dx} + \dots + c_m \gamma_{nm} \lambda \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \frac{1}{x(x-1)} \times \\ &\times \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{n-1} + c_n \gamma_{nm} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda (n-1) \frac{1}{x(x-1)} \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{n-2} + \\ &+ \gamma_{nm} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{n-1} \frac{dc_n}{dx} \end{aligned}$$

После подставленных их в систему (3) получим

$$\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^{\lambda} \left| \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right|^{j-1} \left| \frac{dc_j}{dx} = \frac{f_j(x)}{x(x-1)} + \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i(x)}{x(x-1)} \right. \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (7)$$

откуда имеем:

$$\frac{dc_i}{dx} = \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^{-\lambda} \frac{1}{x(x-1)} \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{1=j} \cdot \left( f_j + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i \right),$$

либо

$$\frac{dc_i}{dx} = \frac{x^{\lambda-1}}{|x-1|^{\lambda+1}} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{1=j} \cdot \left( f_j + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i \right), \quad (8)$$

где  $\beta_{kj} = \Gamma_{kj} / \Gamma$  и  $\Gamma_{kj}$  – алгебраическое дополнение элемента  $\gamma_{kj}$  в матрице

$\|\gamma_{kj}\|$ ,  $(k=1,2,\dots,n)$ . Интегрируя (8) в пределах  $[0, x]$  при  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  и в пределах  $[x, 1]$  при  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  и вводя, операторы

$$\sigma_i^+ y = - \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{|t-1|^{\lambda+1}} \left( \ln \left| 1 - \frac{1}{t} \right| \right)^{1-i} \left( y(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i \right) dt, \quad (i=1,2,\dots,n) \\ (\operatorname{Re} \lambda > 0), \quad (9)$$

$$\sigma_i^- y = \int_x^1 \frac{t^{\lambda-1}}{|t-1|^{\lambda+1}} \left( \ln \left| 1 - \frac{1}{t} \right| \right)^{1-i} \left( y(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i \right) dt, \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (\operatorname{Re} \lambda < 0)$$

сможем записать

$$\left| 1 - \frac{1}{x} \right|^{\lambda} c_i = \sigma_i^{\pm} \left( \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \left( f_j + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i \right) \right) = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \sigma_k^{\pm} \left( f_j + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i \right)$$

так что

$$\theta_{pj} = \sum_{j=1}^n \gamma_{pj} \alpha_{kj} \theta_k^{\pm} \quad (p=1,2,\dots,n) \quad (10)$$

$$\hat{Y} = T_0 F, \quad T_0 = \|\theta_{pj}\|$$

Таким образом, общее решение (3) находится формулами:

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_{pi} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^{\lambda} \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{i-1} + \sum_{j=1}^n \sigma_{pj} \left( f_j + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i \right),$$

$$(p=1,2,\dots,n), \quad (11)$$

$$Y(x) = \sum_{k=1}^n c_k {}^{(k)} Y_0(x) \left[ \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]^{k-1} + T_0 F + T_0 \sum \alpha Q$$

Возвращаясь к общему случаю переменных коэффициентов, стандартной процедурой вычитания преобразуем (1) к системе с постоянными коэффициентами, но со «свободными членами» будем иметь:

$$\bar{f}_j(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i = \sum_{s=1}^n \bar{a}_{js}(x) \lambda_s + f_j(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i, \quad \bar{a}_{js}(x) \equiv a_{js}(x) - a_{js}(0)$$

Вставляя их в формулы обращения (11), приходим к системе интегральных уравнений:

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^n T_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n \left[ c_j \gamma_{ij} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^{\lambda} \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^{j-1} + \sigma_{ij} \left( f_j + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i(x) \right) \right]$$

$$(i=1,2,\dots,n) \quad (12)$$

Как показывают формулы (12) и (10), все  $T_{kp}$  выражаются в виде линейных комбинаций с постоянными коэффициентами над простейшими операторами.

$$\begin{aligned}
\sigma_{jki}^+ y &= \sigma_j^+ [\bar{a}_{ki}(t) \left( y(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i(t) \right)] = \\
&= \int_0^x \frac{\bar{a}_{ki}(t) t^{\lambda-1}}{|t-1|^{\lambda+1}} \left( \ln \left| 1 - \frac{1}{t} \right| \right)^{1-j} \left( y(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i(t) \right) dt, \\
\sigma_{jki}^- y &= \sigma_j^- [\bar{a}_{ki}(t) \left( y(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i(t) \right)] = \\
&= \int_x^1 \frac{\bar{a}_{ki}(t) t^{\lambda-1}}{|t-1|^{\lambda+1}} \left( \ln \left| 1 - \frac{1}{t} \right| \right)^{1-j} \left( y(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k^i(t) \right) dt.
\end{aligned}$$

Прежде всего, поскольку  $\bar{a}_{ki}(t)$  непрерывны, то операторы  $\sigma_{jki}^\pm y$  действуют и ограничены в  $C$  и  $M_0$ , причем

$$\|\sigma_{jki}^\pm y\| \leq \frac{\mu_{ki}}{|\operatorname{Re} \lambda|} \|y\|, \quad \mu_{ki} = \max_{0 \leq t \leq 1} |a_{ki}(t)| \quad (14).$$

Во вторых, поскольку  $\bar{a}_{ki}(0) = 0$ , то  $\lim_{d \rightarrow 1} \mu_{ki} = 0$  и, кроме того, как показано операторы  $\sigma_{jki}^\pm y$  вполне непрерывны в  $C, M_0$ .

Таким образом, нами доказано:

Подставим значение (12) на дополнительные условия (1°).

$$\begin{aligned}
\int_a^1 \phi_i(x) \cdot y_i(x) dx &= \int_a^1 \phi_i(x) \cdot \left[ \sum_{j=1}^n T_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n c_j \gamma_{ij} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^{j-1} + \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{ij} \left( f_j + \sum \alpha_k \theta_k \right) \right] dx = q_i
\end{aligned}$$

при  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\begin{aligned}
\int_0^a \phi_i(x) \cdot y_i(x) dx &= \int_0^a \phi_i(x) \cdot \left[ \sum_{j=1}^n T_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n c_j \gamma_{ij} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^\lambda \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^{j-1} + \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{ij} \left( f_j + \sum \alpha_k \theta_k \right) \right] dx = s_i
\end{aligned}$$

при  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Получаем две линейные системы алгебраических уравнений.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \alpha_j = q_i \text{ при } \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad \sum_{j=1}^n b_{ij} \alpha_j = s_i \text{ при } \operatorname{Re} \lambda < 0, \quad (15)$$

Имеет три случая: а)  $m = n$ , в)  $m < n$ , с)  $m > n$ .

**Теорема.** Пусть дано системы линейных дифференциальных уравнений (1)

1. Если на системы линейных алгебраических уравнений (л.а.с.) (15)  $n = m$  и  $\Delta \neq 0$  то системы линейных дифференциальных уравнений (1) имеет единственные решения.

2. Если при  $m > n$  и  $m < n$  (л.а.с.) (15) имеет решение, то система линейных дифференциальных уравнений разрешима. Противном случае не имеет решения.

### Список литературы:

1. Михайлов Л.Г. О одном свойстве сингулярных дифференциальных уравнений //ДАН России, — 1991, — т. 321, — № 4, — с. 181—185.
2. Михайлов Л.Г. Об одном способе исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными точками //ДАН России, — 1994, — т. 336, — № 1, — с. 21—23.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Государственное издательство технико-теоретической литературы, М. 1956, — 465 с.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир-1970, — 389 с.
5. Хидиров Х.С. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной сингулярной точкой, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни //ДАН РТ, — 2009, — т. 52, — № 7, — с. 507—512.
6. Хидиров Х.С. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя сингулярными точками //ДАН РТ, — 2010 г., — т. 53, — № 1, — с. 20—24.



## 1.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

### ЭНЕРГИЯ ВИХРЕВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ ЛЕГКОПЛОСКОСТНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

**Хусаинова Галина Владимировна**

*канд. физ.-мат. наук, доцент*

*Уральской государственной архитектурно-художественной академии,*

*РФ, г. Екатеринбург*

*E-mail: [aldisa@mail.ru](mailto:aldisa@mail.ru)*

**Хусаинов Дамир Зиннурович**

*канд. физ.-мат. наук, доцент*

*Уральской государственной архитектурно-художественной академии,*

*РФ, г. Екатеринбург*

*E-mail: [damiran@mail.ru](mailto:damiran@mail.ru)*

**Сагарадзе Игорь Викторович**

*канд. физ.-мат. наук, доцент*

*Уральской государственной архитектурно-художественной академии,*

*РФ, г. Екатеринбург*

*E-mail: [igorsaga@yandex.ru](mailto:igorsaga@yandex.ru)*

### THE ENERGY OF VORTEX MAGNETIZATION DISTRIBUTIONS IN EASY-PLANE FERROMAGNET

***Khusainova Galina***

*candidate of Science, associate professor  
of the Ural State Architecture and Art Academy,  
Russia, Ekaterinburg*

***Khusainov Damir***

*candidate of Science, associate professor  
of the Ural State Architecture and Art Academy,  
Russia, Ekaterinburg*

**Sagaradze Igor**  
*candidate of Science, associate professor  
of the Ural State Architecture and Art Academy,  
Russia, Ekaterinburg*

### АННОТАЦИЯ

Рассмотрена энергия легкоплоскостного ферромагнетика с вихревым статическим распределением намагниченности, образующегося при взаимодействии двух  $180^0$  доменных границ. Проведен анализ зависимости энергии от взаимного расположения границ. Показано, что энергия имеет наименьшее значение в случае, когда доменные границы параллельны.

### ABSTRACT

The energy of vortex static magnetization distribution in easy-plane ferromagnet arising by interaction two  $180^0$  domain walls was considered. The analysis of dependence energy from relative position walls has been done. It has been shown that energy is least value in the case of parallel domain walls.

**Ключевые слова:** вихрь; солитон; энергия ферромагнетика.  
**Keywords:** vortex; soliton; energy of ferromagnet.

Теоретические исследования стационарных неоднородных распределений намагниченности основываются на определенных физических приближениях [2, с. 27]. При этом нелинейные уравнения феноменологической теории магнетизма сводятся к более простым уравнениям, имеющим точные аналитические решения. Так, для модели ферромагнетика с большой анизотропией по оси  $Z$ :  $\beta_3 < 0$ ,  $\beta_1 > 0$  и  $|\beta_3| \gg \beta_1$  ( $\beta_1, \beta_3$  — постоянные анизотропии) двумерные распределения вектора намагниченности  $\vec{M}$  описываются нелинейным двумерным статическим уравнением синус-Гордон [2, с. 96]:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2\ell^2} \sin 2\Phi \quad (1)$$

где  $\Phi = \Phi(x, y)$  — азимутальный угол,  $\Delta = (\partial_x^2 + \partial_y^2)$ ,

$\ell$  — характерная магнитная длина, связанная с обменным взаимодействием и постоянной анизотропии:  $\ell = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta_1}}$ . В основном состоянии вектор намагниченности  $\vec{M}$  лежит в «легкой плоскости» XY:  $\vec{M} = (M_0 \cdot \cos \Phi, M_0 \cdot \sin \Phi, 0)$ ,  $\left( \theta = \frac{\pi}{2} \right)$ .

В этом случае плотность свободной энергии имеет вид:

$$W = \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{1}{2} \beta_1 M_x^2 = \frac{1}{2} \alpha (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{2} \beta_1 \cos^2 \Phi \quad (i=1,2), \quad (2)$$

$\alpha$  — константа обменного взаимодействия.

Рассмотрим двухсолитонное решение уравнения (1) [1, с. 469]:

$$\Phi = 2 \arctg \frac{\chi_1 e^{\vec{k}_1 \vec{r}} + \chi_2 e^{\vec{k}_2 \vec{r}}}{1 + a(1,2) \chi_1 \chi_2 e^{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \vec{r}}}, \quad (3)$$

где  $\chi_i = e^{\eta_i^0}$ ,  $\eta_i^0$  — начальная фаза,  $(\vec{k}_i \vec{r}) = P_i x + q_i y$ ,  $|\vec{k}_i|^2 = P_i^2 + q_i^2 = 1$  ( $i=1,2$ ),

$\eta_i^0, q_i$  — вещественные постоянные,  $a(1,2) = \frac{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2}{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2}$ .

Оно описывает вихревое распределение намагниченности, образующееся при пересечении двух  $180^\circ$  доменных границ с топологическим зарядом  $n=2$  [1, с. 470]. Для ограниченных фазовых постоянных  $\eta_i^0$  ( $i=1,2$ ) данное решение в пределе  $\vec{k}_1 \rightarrow \vec{k}_2$  сводится к односолитонному решению. Нетривиальное решение нового типа (вырожденное солитонное решение) можно получить в пределе  $\vec{k}_1 \rightarrow \vec{k}_2$ , если рассматривать фазовые постоянные неограниченными и имеющими особенности [3, с. 36]. Предположим, что фазовые постоянные являются сингулярными функциями параметров солитона:

$$\chi_1 = -\chi_2 = \left( \frac{1}{a(1,2)} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Преобразуем (3) :

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \chi_1 \cdot \frac{\operatorname{sh}[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r} / 2]}{\operatorname{sh}[(\vec{k}_2 + \vec{k}_1)\vec{r} / 2]} .$$

Пусть  $\frac{(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)}{2} = (a, 0)$ ,  $\frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)}{2} = (0, b)$  , где  $a$  и  $b$  — вещественные постоянные. Учитывая, что  $|\vec{k}_1|^2 = |\vec{k}_2|^2$ , получаем

$$a = \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^{1/2}, \quad b = \left(\frac{1+\tau}{2}\right)^{1/2}, \quad \tau = (\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2) .$$

Таким образом,

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} by} . \quad (5)$$

Или

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1-\tau}{2}\right)^{1/2} \cdot x}{\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^{1/2} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{1+\tau}{2}\right)^{1/2} \cdot y} \quad (0 < \tau < 1) . \quad (6)$$

С учетом плотности энергии ферромагнетика  $W$ , магнитная энергия ферромагнетика:

$$E = \frac{1}{2} \int \left( (\nabla\Phi)^2 - \cos^2\Phi \right) dx dy \quad (7)$$

(выражение записано в безразмерных единицах, за единицу длины выбрана длина  $\ell$ ).

С учетом (6) преобразуем данное выражение

$$E - E_0 = \int w dx dy , \quad (8)$$

где  $E_0 = -\frac{1}{2} \int dx dy$  — энергия основного состояния ферромагнетика,

$$w = \frac{2(p^2 + q^2 + 2p^2q^2)}{(p^2 + q^2)^2}, \quad p = \frac{sh(\tau_1 x)}{\tau_1}, \quad q = \frac{sh(\tau_2 y)}{\tau_2},$$

$$\tau_1 = \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^{1/2}, \quad \tau_2 = \left(\frac{1+\tau}{2}\right)^{1/2}.$$

Видно, что энергия (8) зависит от параметра  $\tau$ . Отметим, что в работе [4, с. 22] авторами было исследовано простейшее вырожденное солитонное решение уравнения (1). Было показано, что в вырожденном случае, когда вектора  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$ , характеризующие доменные границы, параллельны (параметр  $\tau = (\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2) = 1$ ) энергия ферромагнетика, хотя и большая (линейная по  $R$ ), но меньше, чем в невырожденном случае с распределением намагниченности, соответствующим случаю перпендикулярных векторов  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$  (параметр  $\tau = (\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2) = 0$ ). Этот анализ энергии для двух случаев расположения векторов:  $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_2$  (вырожденный случай) и  $\vec{k}_1 \perp \vec{k}_2$  позволяет предположить, что энергия ферромагнетика с уменьшением параметра  $\tau$  от 1 до 0 будет расти.

Исследуем изменение  $p$  и  $q$  как функций от параметра  $\tau$  :

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\frac{1}{4\tau_1^2} \left( xch(\tau_1 x) - \frac{sh(\tau_1 x)}{\tau_1} \right), \quad (9)$$

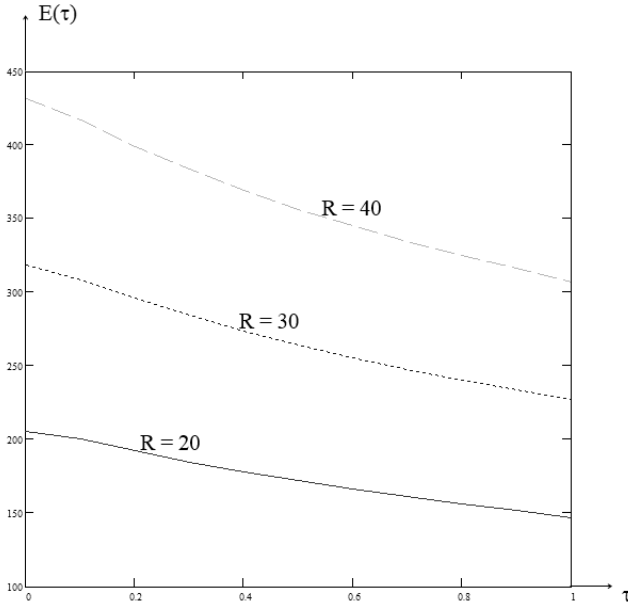
$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = -\frac{1}{4\tau_2^2} \left( ych(\tau_2 y) - \frac{sh(\tau_2 y)}{\tau_2} \right). \quad (10)$$

Нетрудно показать, что в случае больших  $x$  и  $y$ ; то есть при  $|x| > A, |y| > B$  ( $A, B$  — некоторые числа):

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \quad p_\tau < 0, \quad p > 0, \quad p \cdot p_\tau < 0 \\ x < 0 \quad p_\tau > 0, \quad p < 0, \quad p \cdot p_\tau < 0 \\ y > 0 \quad q_\tau < 0, \quad q > 0, \quad q \cdot q_\tau < 0 \\ y < 0 \quad q_\tau < 0, \quad q < 0, \quad q \cdot q_\tau > 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

Найдем, как изменяется плотность энергии  $w$  с изменением параметра  $\tau$  :

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\left[ pp_\tau \left( (q^2 - p^2)^2 + (q^2 - p^2 - 1) \right) + qq_\tau (q^2 - p^2)^2 - (q^2 + p^2)(q^2 - p^2 + 1) \right]}{(p^2 + q^2)^3} \quad (12)$$



**Рисунок 1. Зависимость энергии  $E = E(\tau)$  при различных значениях  $R$  ( $R = 20, 30, 40$ ). ( $R$  — размер образца)**

Внимательный анализ полученного выражения (12) с учетом (11) и того факта, что  $q^2 - p^2 > 0$ , приводит к результату:  $\frac{\partial w}{\partial \tau} < 0$ . Таким образом, плотность энергии является убывающей функцией параметра  $\tau$ . Численный анализ интеграла энергии (8) дает аналогичный результат. На (рис. 1) приведена зависимость  $E = E(\tau)$  для различных значений образца  $R$ . Видно, что для всех  $R$  наблюдается уменьшение величины энергии при увеличении значения  $\tau$ : при  $\tau \rightarrow 1$  энергия уменьшается, что полностью согласуется с результатом выше приведенного аналитического анализа.

### Список литературы.

1. Борисов А.Б., Танкеев А.П., Шагалов А.Г. Вихри и двумерные солитоны в легкоплоскостных магнетиках //ФММ, — 1985 — Т. 60 — С. 468—479.
2. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наук. Думка, 1983 — 192 с.
3. Хусаинова Г.В. (Безматерных Г.В.), Хусаинов Д.З. Вырожденное солитонное решение двумерного уравнения синус-Гордон // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире: материалы VII Междунар. науч.-практ. конф. СПб., — 2014 — Т. 1 — С. 32—38.
4. Хусаинова Г.В. (Безматерных Г.В.), Хусаинов Д.З. Вихревое решение двумерного уравнения синус-Гордон//Естественные и математические науки в современном мире: Сб. ст. по материалам XXVI Междунар. науч.-практ. конф. Новосибирск, — 2015 — № 1 (25) — С. 17—23.

### 1.3. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

## ИНВАРИАНТНЫЕ НОРМАЛИЗАЦИИ СКОМПОЗОВАННОГО ГИПЕРПЛОСКОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

*Будылкин Андрей Александрович*

*аспирант Балтийского федерального университета им. И. Канта,  
РФ, г. Калининград*

*E-mail: [AndreyBudylnkin@rambler.ru](mailto:AndreyBudylnkin@rambler.ru)*

## INVARIANT NORMALIZATION COMPOSITED HYPERPLANE DISTRIBUTION OF PROJECTIVE SPACE

*Budylnkin Andrey*

*graduate student of Baltic federal university of I. Kant,  
Russia, Kaliningrad*

### АННОТАЦИЯ

В статье приведено задание  $SH$ -распределения, доказательство теоремы существования в репере нулевого порядка. Получены инвариантные нормализации и соответствия Бомпьяни-Пантази основных структурных подрасслоений. Изучение  $SH$ -распределений актуально, так как эти образы являются обобщениями теории специальных классов гиперполос [7] и гиперповерхностей, а также гиперполосных распределений [8], которая имеет приложение в вариационном анализе, физике, механике [1], [2], [9]. Работа выполнена методом Лаптева Г.Ф.[3] Индексы принимают следующие значения:  $i, j, k, \dots = \overline{1, m}$ ;  $\alpha, \beta, \dots = \overline{m + 1, n - m - 1}$ ;  $\sigma, \rho, \dots = \overline{1, n - 1}$ ;  $l, j, k, \dots = \overline{1, n}$ ;  $\bar{l}, \bar{j}, \bar{k}, \dots = \overline{0, n}$ .

### ABSTRACT

The article gives the task  $SH$ -distribution, the proof of the existence in the frame of order zero. The invariant normalization and matching Bompiani-Pantazi major structural sub-bundles. The study of  $SH$ -distributions is relevant, because these images are generalizations of special classes hyperbands and hypersurfaces, and hyperband distribution, which has application in the analysis of variance, physics, mechanics. Work



performed by GF Laptev method. The indices have the following values:  
 $i, j, k, \dots = \overline{1, m}$ ;  $\alpha, \beta, \dots = \overline{m + 1, n - m - 1}$ ;  $\sigma, \rho, \dots = \overline{1, n - 1}$ ;  $I, J, K, \dots = \overline{1, n}$ ;  
 $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}, \dots = \overline{0, n}$ .

**Ключевые слова:** распределения; тензор; квазитензор; нормализация.

**Keywords:** distribution; tensor; kvazitensor; normalization.

### § 1. Задание скомпонованного *SH*-распределения проективного пространства $P_n$ в репере $R_0$ . Теорема существования

В проективном пространстве  $P_n$  рассмотрим тройку распределений плоскостей:  $\Lambda$  — распределение  $m$  — мерных плоскостей  $\Lambda_m \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda$ ;  $L$  — распределение  $(n-m-1)$  — мерных плоскостей  $L_{n-m-1} \stackrel{\text{def}}{=} L$ ;  $H$  — распределение гиперплоскостей  $H_{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} H$ , элементы которых в каждом центре удовлетворяют соотношениям:

$$[L(A); \Lambda(A)] = H(A); L(A) \cap \Lambda(A) = A. \quad (*)$$

**Определение.** Тройка распределений плоскостей  $\Lambda$ -,  $L$ -,  $H$ -проективного пространства  $P_n$ , удовлетворяющая условиям (\*) называется скомпонованным гиперплоскостным [6] распределением (или коротко *SH*-распределением). Выберем подвижной репер пространства  $R_0 = \{A_j\}$  (0-го порядка), ассоциированный с *SH*-распределением:

$$A \equiv A_0, \{A_i\} \subset \Lambda(A_0), \{A_\alpha\} \subset L(A_0), A_n \notin H_{n-1}(A_0).$$

*SH*-распределение в этом репере  $R_0$  задается дифференциальными уравнениями:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K, \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K, \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega^K, \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega^K. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{iK}^n + \Lambda_{iK}^n \omega_0^0 - \delta_K^n \omega_i^0 &= \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \\ \nabla \Lambda_{\alpha K}^n + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_0^0 - \delta_K^n \omega_\alpha^0 &= \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{iK}^\alpha + \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^0 - \delta_K^\alpha \omega_i^0 + \Lambda_{iK}^n \omega_n^\alpha &= \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \\ \nabla \Lambda_{\alpha K}^i + \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^0 - \delta_K^i \omega_\alpha^0 + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_n^i &= \Lambda_{\alpha KL}^i \omega^L, \end{aligned}$$

где функции  $\Lambda_{\alpha KL}^i$ ,  $\Lambda_{iKL}^n$ ,  $\Lambda_{\alpha KL}^n$ ,  $\Lambda_{iKL}^n$  не симметричны по нижним индексам  $K, L$ .

Имеет место теорема существования *SH*-распределений:

**Теорема 1.** В  $n$ -мерном проективном пространстве скомпонированное гиперплоскостное  $SH$ -распределение в репере нулевого порядка существует с произволом  $((2m+1)(n-m-1)+m)$  функций  $n$  аргументов.

Замыкание системы (1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda_{iK}^n \wedge \omega^K &= 0, \Delta\Lambda_{\alpha K}^n \wedge \omega^K = 0, \\ \Delta\Lambda_{iK}^\alpha \wedge \omega^K &= 0, \Delta\Lambda_{\alpha K}^i \wedge \omega^K = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Определим характеры этой системы:

$$S_1 = S_2 = S_n = m + (2m+1)(n-m-1) \stackrel{\text{def}}{=} B,$$

Подсчитаем число Картана для этой системы [10]

$$Q = S_1 + 2S_2 + \dots + nS_n = (1+2+\dots+n)B = \frac{n(n+1)}{2}B.$$

Разрешим систему (3) по лемме Картана [10]:

$$\Delta\Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \Delta\Lambda_{\alpha K}^n = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L, \Delta\Lambda_{iK}^\alpha = \Lambda_{iKL}^\alpha \omega^L, \Delta\Lambda_{\alpha K}^i = \Lambda_{\alpha KL}^i \omega^L.$$

Найдем число линейно-независимых функций, стоящих в правых частях этой системы. Их число равно  $N = B \frac{n(n+1)}{2}$ . Так как  $Q = N$ , то система (1), (2) находится в инволюции [10]. Решение этой системы существует, и произвол её определяется характером  $S_n$ . Геометрические объекты  $\Gamma_1 = \{\Lambda_{iK}^n, \Lambda_{\alpha K}^n, \Lambda_{iK}^\alpha, \Lambda_{\alpha K}^i\}$ ,  $\Gamma_2 = \{\Lambda_{iKL}^n, \Lambda_{\alpha KL}^n, \Lambda_{iKL}^\alpha, \Lambda_{\alpha KL}^i\}$  являются фундаментальными геометрическими объектами [3]  $SH$ -распределения.

## § 2. Инвариантные нормализации основных структурных подрасслоений $SH$ -распределения

1. Из уравнений (2) следует, что совокупности функций  $\{\Lambda_{ij}^n\}$ ,  $\{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}$ ,  $\{\Lambda_{\sigma\rho}^n\} = \{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{\alpha\beta}^n\}$  образуют в силу строения  $SH$ -распределения невырожденные фундаментальные тензоры 1-го порядка соответственно  $\Lambda$ -,  $L$ -,  $H$ -подрасслоений:

$$\begin{aligned} \nabla\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 &= \Lambda_{ijL}^n \omega^L, \nabla\Lambda_{\alpha\beta}^n + \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = \Lambda_{\alpha\beta L}^n \omega^L, \nabla\Lambda_{\sigma\rho}^n + \Lambda_{\sigma\rho}^n \omega_0^0 = \\ &= \Lambda_{\sigma\rho L}^n \omega^L, \end{aligned} \quad (4)$$

для которых можно ввести обращенные фундаментальные тензоры 1-го порядка, удовлетворяющие соответственно условиям:

$$\begin{aligned}\Lambda_{ij}^n \Lambda_n^{jk} &= \delta_i^k, \Lambda_{ij}^n \Lambda_n^{ki} = \delta_j^k, \nabla \Lambda_{ij}^n - \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 \equiv 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^{\beta\gamma} &= \delta_\alpha^\gamma, \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^{\gamma\alpha} = \delta_\beta^\gamma, \nabla \Lambda_{\alpha\beta}^n - \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 \equiv 0, \\ \Lambda_{\sigma\rho}^n \Lambda_n^{\rho\tau} &= \delta_\sigma^\tau, \Lambda_{\sigma\rho}^n \Lambda_n^{\tau\sigma} = \delta_\rho^\tau, \nabla \Lambda_{\sigma\rho}^n - \Lambda_{\sigma\rho}^n \omega_0^0 \equiv 0.\end{aligned}$$

2. В каждом центре  $A_0$  нормаль 1-го рода  $N_{n-m}(A_0)$  образующего элемента  $\Lambda$ -подрасслоения определим следующим образом:

$$N_{n-m}(A_0) = [L_{n-m-1}(A_0), L_n], L_n = A_n + v_n^i A_i + v_n^\alpha A_\alpha.$$

Требование инвариантности плоскости  $N_{n-m}(A_0)$  приводит к уравнениям:

$$\nabla v_n^i + \omega_n^i = v_{nK}^i \omega^K, \quad (5)$$

а на величины  $\{v_n^\alpha\}$  это требование никаких условий не накладывает. Однако если потребовать инвариантность прямой  $l(v) = [A_0, L_n]$ , то величины  $\{v_n^\alpha\}$  должны удовлетворять условиям

$$\nabla v_n^\alpha + \omega_n^\alpha = v_{nK}^\alpha \omega^K. \quad (6)$$

Охват квазитензора  $\{v_n^\alpha\}$  (6) можно осуществить таким образом:  $v_n^\alpha = \Omega_n^\alpha$ , где

$$\Omega_n^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_n^{ij}, \nabla \Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{ij}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{iKL}^n \omega^L.$$

В дальнейшем будем считать что прямая  $l(v) = [A_0, L_n]$  инвариантна, т. е. в качестве точки  $L_n$  можно взять

$$L_n(v) = A_n + v_n^i A_i + \Omega_n^\alpha A_\alpha,$$

где величины  $\{v_n^i\}$  удовлетворяют **уравнениям (5)**. **Задание поля квазитензора  $\{v_n^i\}$  определяет поле инвариантных прямых  $l(v) = [A_0, L_n(v)]$ , а следовательно, поле инвариантных нормалей 1-го рода  $N_{n-m}(v) = [L_{n-m-1}, L_n(v)]$ .** Подразумевая это, мы в дальнейшем под пол 1 инвариантных нормалей 1-го рода  $\Lambda$ -подрасслоения будем понимать поле соответствующего квазитензора  $\{v_n^i\}$ . В репере  $R_0$  уравнения инвариантной нормали 1-го рода  $N_{n-m}(v)$  запишутся в виде:

$$x^i - v_n^i x^n = 0.$$

Пусть нормаль 2-го рода  $N_{m-1}(v)$  плоскости  $\Lambda(A_0)$  натянута на точки

$$N_i = A_i + v_i^0 A_0.$$

Требование инвариантности нормали  $N_{m-1}(v)$  равносильно тому, что величины  $\{v_i^0\}$  удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla v_i^0 + \omega_i^0 = v_{iK}^0 \omega^K.$$

3. Зададим инвариантное поле нормалей 1-го рода  $N_{n-m} = [L(A_0), L_n(A_0)]$  задано полем квазитензора  $\{v_n^i\}$ . Следуя работе [4], с учетом формул (1), (2), (4), (5) найдем фокальное многообразие  $\Phi_{n-m-1}^m(N, \Lambda) \subset N_{n-m}(A_0)$ :

$$x^i = 0, \det \|\delta_j^i x^0 + (v_{nj}^i - \Lambda_{ij}^n v_n^i v_n^j) x^n - (\Lambda_{aj}^i - v_n^i \Lambda_{aj}^n) x^\alpha\| = 0, \quad (7)$$

полученное при смещении точки  $A_0$  вдоль кривых, принадлежащих полю  $\Lambda$  – плоскостей. Линейная поляра точки  $A_0$  относительно многообразия (7) есть плоскость

$$K_{n-m-1}(A_0): x^i = 0, x^0 - v_\alpha^0 x^\alpha - v_n^0 x^n = 0, \quad (8)$$

где

$$v_\alpha^0 = -\frac{1}{m} (\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha i}^n v_n^i), v_n^0 = -\frac{1}{m} (v_{ni}^i - \Lambda_{ij}^n v_n^i v_n^j), \\ \nabla v_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = v_{\alpha K}^0 \omega^K, \nabla v_n^0 + v_n^i \omega_i^0 - v_\alpha^0 \omega_n^\alpha + \omega_n^0 = v_{nK}^0 \omega^K.$$

Плоскость  $K_{n-m-1}(A_0)$  (8) пересекает:

а) плоскость  $L(A_0)$  по её нормали 2-го рода  $N_{n-m-2}(A_0)$ :

$$x^i = 0, x^n = 0, x^0 - v_\alpha^0 x^\alpha = 0; \quad (9)$$

б) прямую  $l(v) = [A_0, L_n(v)]$  в точке  $A_n$ :

$$K_n: \begin{cases} x^\alpha = \Omega_n^\alpha x^n, \\ x^i = v_n^i x^n, \\ x^0 = (v_n + v_\alpha \Omega_n^\alpha) x^n. \end{cases} \quad (10)$$

4. Пусть задано поле нормалей  $N_{m+1}(A_0)$  1-го рода L-подрасслоения, т. е. задано поле квазитензора  $\{v_n^\alpha\}$ . Здесь

$$N_{m+1}(A_0) = [\Lambda(A_0), \ell_n = A_n + \Omega_n^i A_i + v_n^\alpha A_\alpha].$$

где

$$\Omega_n^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \Lambda_{\alpha\beta}^i \Lambda_n^{\beta\alpha}, \quad \nabla \Omega_n^i + \omega_n^i \equiv 0.$$

Аналогично, следуя работе [4], с учетом формул (1), (2), (4), (5), (6), находим фокальное многообразие  $\Psi_m^{n-m-1}(N, L)$ :

$$x^\alpha = 0, \quad \det \|\delta_\beta^\alpha x^0 + (v_{n\beta}^\alpha - \Lambda_{\alpha\beta}^n v_n^\alpha v_n^\beta) x^n - (\Lambda_{i\beta}^\alpha - v_n^\alpha \Lambda_{i\beta}^n) x^i\| = 0, \quad (11)$$

полученное при смещениях точки  $A_0$  вдоль кривых, принадлежащих L-подрасслоению. Линейная поляра точки  $A_0$  относительно многообразия  $N_{m+1}(A_0)$  есть плоскость

$$K_m(A_0): x^\alpha = 0, \quad x^0 - \mu_i^0 x^i - \mu_n^0 x^n = 0, \quad (12)$$

где

$$\mu_i^0 = -\frac{1}{n-m-1} (\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n v_n^\alpha), \quad \mu_n^0 = -\frac{1}{n-m-1} (v_n^\alpha - \Lambda_{\alpha\beta}^n v_n^\alpha v_n^\beta), \\ \nabla \mu_i^0 + \omega_i^0 = \mu_{iK}^0 \omega^K, \quad \nabla \mu_n^0 + v_n^\beta \omega_\beta^0 - \mu_i^0 \omega_n^i + \omega_n^0 = \mu_{nK}^0 \omega^K.$$

Плоскость  $K_m(A_0)$  2) пересекает:

а) плоскость  $\Lambda(A_0)$  по ее нормали 2-го рода  $N_{m-1}(A_0)$ :

$$x^\alpha = 0, \quad x^n = 0, \quad x^0 - \mu_i^0 x^i = 0; \quad (13)$$

б) прямую  $\ell(v) = [A_0, \ell_n(v)]$  в точк  $K_n^*$ :

$$K_n^*: \begin{cases} x^\alpha = v_n^\alpha x^n, \\ x^i = \varrho_n^i x^n, \\ x^0 = (\mu_n + \mu_i \varrho_n^i) x^n. \end{cases} \quad (14)$$

Следует заметить, что плоскость  $K_{n-m-1}(A_0)$  (8) является плоскостью Картана для образующего элемента  $\Lambda$ -подрасслоения, а плоскость  $K_m(A_0)$  (12) является плоскостью Картана для образующего элемента  $L$ -подрасслоения, в данном центре  $A_0$ . Точки  $K_n, K_n^*$  соответственно назовем  $v$  — виртуальными точками Картана прямых  $l(v), \ell(v)$ .

### §3. Соответствие Бомпьяни-Пантази

1. Плоскость  $\Pi_{n-1}(A_0) = [N_{m-1}(A_0), L_{n-m-2}(A_0)]$ , натянутую на нормали 2-го рода (9), (13) соответственно плоскостей  $L(A)$  и  $\Lambda(A)$ , является плоскостью Нордена-Тимофеева неголономной композиции  $(\Lambda, L)$  [6]:

$$x^n = 0, x^0 - v_\alpha^0 x^\alpha - \mu_i^0 x^i = 0, \quad (15)$$

а с другой стороны плоскость  $\Pi_{n-1}(A_0)$  (15) — нормаль второго рода  $H$ -плоскости в точке  $A_0$ . Введем в рассмотрение функции  $\Lambda_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\sigma n}^n$ , которые удовлетворяют уравнениям (при фиксации точки  $A_0$ ):

$$\nabla_\delta \Lambda_\sigma + \Lambda_\sigma \pi_0^0 = -\Lambda_{\sigma\rho}^n \pi_n^\rho - \pi_\sigma^0. \quad (16)$$

Из (16) следует что совокупность функций  $\{\Lambda_\sigma\}$  образует квазинормаль [4], [8]  $H$ -подрасслоения. Согласно работе [5] соответствие Бомпьяни – Пантази между нормальными 1-го и 2-го рода  $H$ -подрасслоения имеет вид

$$v_\sigma^0 = -\Lambda_{\sigma\rho}^n v_n^\rho + \Lambda_\sigma^0. \quad (17)$$

Разрешив уравнения (17) относительно  $v_n^p$  получим

$$v_n^\sigma = -\Lambda_n^{\sigma\rho} v_\rho^0 + \Lambda_n^\sigma,$$

где

$$\Lambda_n^\sigma = -\Lambda_n^{\sigma\rho} \Lambda_\rho, \quad \nabla \Lambda_n^\sigma + \Lambda_n^{\sigma\rho} \omega_\rho + \omega_n^\sigma = \Lambda_{nK}^\sigma \omega^K$$

С помощью квазинормалей [8]

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_i &= \Lambda_i - \Lambda_{i\alpha}^n v_n^\alpha; \nabla \tilde{\Lambda}_i + \tilde{\Lambda}_i \omega_0^0 = -\Lambda_{ij}^n \omega_n^j - \omega_i^0, \\ \tilde{\Lambda}_\alpha &= \Lambda_\alpha - \Lambda_{\alpha i}^n v_n^i; \nabla \tilde{\Lambda}_\alpha + \tilde{\Lambda}_\alpha \omega_0^0 = -\Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta - \omega_\alpha^0,\end{aligned}$$

введём в рассмотрение функции

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_n^i &= \Lambda_n^{ij} \tilde{\Lambda}_i; \nabla \tilde{\Lambda}_n^i + \omega_n^i + \Lambda_n^{ij} \omega_j^0 \equiv 0, \\ \tilde{\Lambda}_n^\alpha &= \Lambda_n^{\alpha\beta} \tilde{\Lambda}_\beta; \nabla \tilde{\Lambda}_n^\alpha + \omega_n^\alpha + \Lambda_n^{\alpha\beta} \omega_\beta^0 \equiv 0,\end{aligned}$$

и затем устанавливаем:

а) биекцию Бомпьяни-Пантази между нормальными 1-го и 2-го рода  $\Lambda$ -подрасслоения:

$$v_n^i = -\Lambda_n^{ij} v_j^0 + \tilde{\Lambda}_n^j, v_i^0 = -\Lambda_{ij}^n v_n^j + \tilde{\Lambda}_j^0;$$

б) биекцию Бомпьяни-Пантази между нормальными 1-го и 2-го рода  $L$ -подрасслоения:

$$v_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta} v_\beta^0 + \tilde{\Lambda}_n^\alpha, v_\alpha^0 = -\Lambda_{\alpha\beta}^n v_n^\beta + \tilde{\Lambda}_\alpha^0.$$

Если охваты нормалей 1-го и 2-го рода  $\Lambda$ -,  $L$ -,  $H$ -подрасслоений представить следующим образом

$$v_n^\alpha = \mathfrak{Q}_n^\alpha, v_n^i = \mathfrak{Q}_n^i, v_n^\sigma = \mathfrak{Q}_n^\sigma,$$

тогда охваты функций

$$\lambda_i^0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1} (\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n \mathfrak{Q}_n^\alpha), \lambda_\alpha^0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m} (\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha i}^n \mathfrak{Q}_n^i), \lambda_\sigma^0 \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_\sigma^0 - \Lambda_{\sigma\rho}^n \mathfrak{Q}_n^\rho,$$

определены в дифференциальной окрестности 1-го порядка, а охваты функций

$$K_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m} (\mathfrak{Q}_{ni}^i - \Lambda_{ij}^n \mathfrak{Q}_n^i \mathfrak{Q}_n^j), \mathfrak{Q}_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1} (\mathfrak{Q}_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\alpha\beta}^n \mathfrak{Q}_n^\alpha \mathfrak{Q}_n^\beta),$$

определены в дифференциальной окрестности 2-го порядка. Из (17) следует, что

$$\Omega_\alpha^0 = -\Lambda_{\alpha\beta}^n \Omega_n^\beta + \Lambda_\alpha^0, \Omega_i^0 = -\Lambda_{ij}^n \Omega_n^j + \Lambda_j^0.$$

В результате приходим к следующему предложению:

**Теорема 2.** *SH-распределение в дифференциальной окрестности 1-го порядка порождает внутренним инвариантным образом нормализацию Нордена-Тимофеева  $(\Omega_n^\sigma, \Omega_\sigma^0)$  H-подрасслоения, нормализации Нордена  $(\Omega_n^i, \Omega_i^0)$ ,  $(\Omega_n^\alpha, \Omega_\alpha^0)$  соответственно L-, L-подрасслоений, а в дифференциальной окрестности 2-го порядка поля v- виртуальных точек Кармана  $K_n = L_n + k_n^0 A_0$ ,  $K_n^* = L_n + \ell_n^0 A_0$  и поля плоскостей Кармана  $K_{n-m-1}(A_0) = [K_n^0; A_\alpha - \Omega_\alpha^0 A_0]$ ,  $K_m^*(A_0) = [K_n^*; A_i - \Omega_i^0 A_0]$ .*

### Список литературы:

1. Вагнер В.В. Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторн. и тензор-н. анализу/ М. — 950, — вып. 8, — с. 197—272.
2. Гохман А.В. Дифференциальная геометрия и классическая динамика систем.// Тр. геометр. семинара. /ВИНИТИ, — 1966, — Т. 1, — с. 111—138.
3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. Мат. Об-ва. — 1953. — Т. 2. — С. 275—382.
4. Лаптев Г.Ф. Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геометр. Семинара /ВИНИТИ АН СССР — 1971. — Т. 3. — С. 49—94.
5. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. // Тр. геометр. семинара/ВИНИТИ АН СССР. — 1973. — Т. 4. — С. 71—119.
6. Попов Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: Монография//Из-во С.-Петербургского ун-та, 1992. — 172 с.
7. Попов Ю.И. Столяров А.В. Специальные классы регулярных гиперполос проективного пространство. Учебное пособие, издание 2-ое. Изд-во БФУ им. Им. Канта, Калининград, 2011. — 122 с.
8. Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов. В кн.: Проблемы геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), М., — 1975, — Т. 7, — с. 117—151.
9. Столяров А.В. Дифференциальная геометрия полос// Проблемы геометрии. ВИНИТИ — 1978, — Т. 10, — с. 25—54.
10. Фиников С.П. Метод внешних форм Кармана М.-П. ГИТТЛ, 1948. — 432 с.



# ИНВОЛЮТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЕХСОСТАВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

*Попов Юрий Иванович*

*канд. ф-м. наук, профессор  
Балтийского федерального университета им. И. Канта,*

*РФ, г. Калининград,*

*E-mail: [AndreyBudylkin@rambler.ru](mailto:AndreyBudylkin@rambler.ru)*

## INVOLUTIVE CONVERSION THREEFOLD PROJECTIVE SPACE DISTRIBUTION

*Popov Yuri*

*candidate of Science, professor  
of Baltic federal university of I.Kant,*

*Russia, Kaliningrad*

### АННОТАЦИЯ

В данной работе доказано, что проективное преобразование  $\mathfrak{F}: \omega_i^{\bar{k}} \rightarrow \bar{\omega}_i^{\bar{k}}$  структурных форм  $\omega_i^{\bar{k}}$  проективного пространства является иволютивным, то есть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{-1}$ . Следуя работе [7] показано, что инволютивное преобразование  $\mathfrak{F}$  переводит трехсоставное распределение  $\mathcal{H} \subset P_n$  [4] в двойственный ему образ  $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{P}_n$ , заданный относительно тангенциального репера  $\{\tau^{\bar{k}}\}$ . Рассмотрены аналитические признаки двойственности  $\mathcal{H}(\Lambda)$  и  $\mathcal{H}(M)$  — подрасслоений, ассоциированных с данным  $\mathcal{H}$ -распределением, относительно преобразования  $\mathfrak{F}$  и дана их геометрическая интерпретация. Индексы принимают значения:

$$I, J, K, L = \overline{1, n}; \quad \bar{I}, \bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0, n}; \quad p, q, r, s, t, f = \overline{1, r}; \quad i, j, k, l, h = \overline{r+1, m};$$

$$a, b, c, d = \overline{1, m}; \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{\eta}, \bar{\xi} = \overline{m+1, n-1}; \quad \hat{a}, \hat{b}, \hat{d}, \hat{\eta}, \hat{\xi} = \overline{m+1, n};$$

$$u, v, w = \overline{r+1, n-1}; \quad \hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{r+1, n}; \quad \sigma, \rho, \tau = \overline{1, n-1}.$$

## ABSTRACT

In this paper it is proved that a projective transformation  $\mathfrak{P}: \omega_i^{\bar{K}} \rightarrow \bar{\omega}_i^{\bar{K}}$  structural forms  $\omega_i^{\bar{K}}$  of projective space is involutive —  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{-1}$ . The involutive transformation  $\mathfrak{P}$  transforms threefold distribution  $\mathcal{H} \subset P_n$  in its dual image  $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{P}_n$  specified with respect to the tangential frame  $\{\tau^{\bar{K}}\}$ . Having considered the analytical features of duality  $\mathcal{H}(\Lambda)$  and  $\mathcal{H}(M)$  — subbundles associated with the H-distribution, the transformation  $\mathfrak{P}$  and given their geometric interpretation. The indices take the values:

$$I, J, K, L = \overline{1, n}; \quad \bar{I}, \bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0, n}; \quad p, q, r, s, t, f = \overline{1, r}; \quad i, j, k, l, h = \overline{r+1, m};$$

$$a, b, c, d = \overline{1, m}; \quad \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}, \bar{\eta}, \bar{\xi} = \overline{m+1, n-1}; \quad \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\eta}, \hat{\xi} = \overline{m+1, n};$$

$$u, v, w = \overline{r+1, n-1}; \quad \hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{r+1, n}; \quad \sigma, \rho, \tau = \overline{1, n-1}.$$

**Ключевые слова:** распределения; инволютивное преобразование; двойственный образ.

**Keywords:** distribution; involutive transformation; dual image.

### § 1. Задание трехсоставного распределения

1. Тройку распределений, образованную соответственно распределениями  $r$ -плоскостей  $\Lambda$  ( $\Lambda$ -распределение),  $m$ -плоскостей  $M$  ( $M$ -распределение), гиперплоскостей  $H$  ( $H$ -распределение,  $r < m < n-1$ ) проективного пространства  $P_n$  с отношением инцидентности  $X \in \Lambda \subset M \subset H$  их соответствующих элементов в каждом центре  $X$  назовем трехсоставным распределением проективного пространства  $P_n$  или  $H$ -распределением [4], при этом  $\Lambda$ -распределение назовем базисным распределением, а  $M$ -распределение и  $H$ -распределение — оснащающими распределениями.

Обозначим через  $\Phi_{n-r-1}(X) = \Phi(X)$  ( $\Phi$ -плоскость)

и  $E_{n-m-1}(X) = E(X)$  ( $E$ -плоскость) характеристики гиперплоскости, полученные при смещениях центра  $X$  вдоль интегральных кривых соответственно  $\Lambda$ -распределения,  $M$ -распределения. Плоскость  $\Phi(X)$  пересекает плоскость  $M(X)$  по  $s$ -мерной плоскости  $L_s(X)$ :

$$\Phi(X) \cap M(X) = L_s(X), \quad s = m - r.$$

Кроме того, введем в рассмотрение плоскость  $\Psi(X) = [\Lambda(X); E(X)]$ .

Адаптируем подвижной репер  $R = \{A_j\}$  проективного пространства  $P_n$  с  $H$ -распределением следующим образом:

$$X \equiv A_0, \{A_p\} \subset \Lambda(A_0), \{A_i\} \subset L(A_0), \{A_\alpha\} \subset E(A_0), A_n \notin H(A_0).$$

Выбранный таким образом репер  $R$  является репером 1-го порядка  $R^1$ . Относительно репера  $R^1$  главные формы  $H$ -распределения имеют следующий вид:

$$\omega_p^n = \Lambda_{pK}^n \omega_0^K, \quad \omega_i^n = \Lambda_{i\dot{i}}^n \omega_0^{\dot{i}}, \quad \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\dot{\beta}}^n \omega_0^{\dot{\beta}}, \quad (a)$$

$$\omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K, \quad \omega_i^p = \Lambda_{iK}^p \omega_0^K, \quad \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K, \quad (1)$$

$$\omega_p^\alpha = \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^K, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \quad \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha K}^p \omega_0^K,$$

где

$$\Lambda_{\alpha i}^n = 0, \quad \Lambda_{\alpha p}^n = 0, \quad \Lambda_{ip}^n = 0. \quad (2)$$

Геометрические объекты  $\Gamma_1 = \{\Lambda_{pK}^n, \Lambda_{i\dot{i}}^n, \Lambda_{\alpha\dot{\beta}}^n, \Lambda_{pK}^i, \Lambda_{pK}^\alpha, \Lambda_{iK}^\alpha\}$  и  $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda_{iK}^p, \Lambda_{\alpha K}^i, \Lambda_{\alpha K}^p\}$  являются соответственно фундаментальными объектами 1-го и 2-го порядка  $H$ -распределения. Компоненты фундаментального объекта  $\Gamma_2$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla \Lambda_{pK}^n + \Lambda_{pK}^n \omega_0^0 - \omega_p^0 \delta_K^n = \Lambda_{pKL}^n \omega_0^L, \quad (a)$$

$$\nabla \Lambda_{pK}^i + \Lambda_{pK}^i \omega_0^0 + \Lambda_{pK}^n \omega_n^i - \omega_p^0 \delta_K^i = \Lambda_{pKL}^i \omega_0^L,$$

$$\nabla \Lambda_{pK}^\alpha + \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{pK}^n \omega_n^\alpha - \omega_p^0 \delta_K^\alpha = \Lambda_{pKL}^\alpha \omega_0^L,$$

$$\nabla \Lambda_{i\dot{i}}^n + \Lambda_{i\dot{i}}^n \omega_0^0 - \omega_i^0 \delta_{\dot{i}}^n = \Lambda_{i\dot{i}K}^n \omega_0^K, \quad (b)$$

$$\nabla \Lambda_{iK}^p + \Lambda_{iK}^p \omega_0^0 + \Lambda_{iK}^n \omega_n^p - \omega_i^0 \delta_K^p = \Lambda_{iKL}^p \omega_0^L, \quad (3)$$

$$\nabla \Lambda_{iK}^\alpha + \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{iK}^n \omega_n^\alpha - \omega_i^0 \delta_K^\alpha = \Lambda_{iKL}^\alpha \omega_0^L,$$

$$\nabla \Lambda_{\alpha\dot{\beta}}^n + \Lambda_{\alpha\dot{\beta}}^n \omega_0^0 - \omega_\alpha^0 \delta_{\dot{\beta}}^n = \Lambda_{\alpha\dot{\beta}K}^n \omega_0^K, \quad (c)$$

$$\nabla \Lambda_{\alpha K}^p + \Lambda_{\alpha K}^p \omega_0^0 + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_n^p - \omega_\alpha^0 \delta_K^p = \Lambda_{\alpha KL}^p \omega_0^L,$$

$$\nabla \Lambda_{\alpha K}^i + \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^0 + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_n^i - \omega_\alpha^0 \delta_K^i = \Lambda_{\alpha KL}^i \omega_0^L.$$

Кроме того, компоненты фундаментального объекта  $\Gamma_2$  связаны соотношениями:

$$\begin{aligned}\Lambda_{ij}^n \Lambda_{[pq]}^j + \Lambda_{i\alpha}^n \Lambda_{[pq]}^\alpha + \Lambda_{in}^n \Lambda_{[pq]}^n &= 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_{[ij]}^\beta + \Lambda_{\alpha n}^n \Lambda_{[ij]}^n + \Lambda_{p[i}^n \Lambda_{|\alpha|j]}^p + \Lambda_{k[i}^n \Lambda_{|\alpha|j]}^k &= 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_{[pq]}^\beta + \Lambda_{\alpha n}^n \Lambda_{[pq]}^n + \Lambda_{i|p}^n \Lambda_{|\alpha|q]}^i &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Таким образом, относительно репера  $R_1$  трехсоставное  $H$ -распределение задается уравнениями (1), (3) и соотношениями (2), (4).

## § 2. Инволютивность преобразования $\mathfrak{F}: \omega_I^{\bar{K}} \rightarrow \bar{\omega}_I^{\bar{K}}$

Рассмотрим систему из  $(n+1)^2$  форм Пфаффа  $\bar{\omega}_K^{\bar{I}}$ :

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_0^p &= \omega_0^p + \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n \omega_0^q, & \bar{\omega}_0^i &= \omega_0^i + \Lambda_n^{ij} \Lambda_{j\alpha}^n \omega_0^\alpha, & \bar{\omega}_0^\alpha &= \omega_0^\alpha + \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n \omega_0^n, \\ \bar{\omega}_p^n &= -\Lambda_{qp}^n \omega_0^q, & \bar{\omega}_i^n &= -\Lambda_{ji}^n \omega_0^j, & \bar{\omega}_\alpha^n &= -\Lambda_{\beta\alpha}^n \omega_0^\beta, \\ \bar{\omega}_p^0 &= \Lambda_{qp}^n \omega_n^q, & \bar{\omega}_i^0 &= \Lambda_{ji}^n \omega_n^j, & \bar{\omega}_\alpha^0 &= \Lambda_{\beta\alpha}^n \omega_n^\beta, \\ \bar{\omega}_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta S_K \omega_0^K + \Lambda_n^{\beta\gamma} \Lambda_{\gamma\alpha K}^n \omega_0^K, \\ \bar{\omega}_i^\alpha &= -\Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \omega_\beta^j, & \bar{\omega}_\alpha^i &= -\Lambda_n^{ij} \Lambda_{\beta\alpha}^n \omega_j^\beta, \\ \bar{\omega}_i^j &= \omega_i^j + \Lambda_n^{jh} \Lambda_{hiK}^n \omega_0^K - \delta_i^j S_K \omega_0^K, \\ \bar{\omega}_i^p &= -\Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{pq} \omega_q^j, & \bar{\omega}_p^i &= -\Lambda_{qp}^n \Lambda_{ij}^n \omega_j^q, \\ \bar{\omega}_p^t &= \omega_p^t + \Lambda_n^{tq} \Lambda_{qpK}^n \omega_0^K - \delta_p^t S_K \omega_0^K, \\ \bar{\omega}_\alpha^p &= -\Lambda_n^{pq} \Lambda_{\beta\alpha}^n \omega_q^\beta, & \bar{\omega}_p^\alpha &= -\Lambda_{qp}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \omega_\beta^q, \\ \bar{\omega}_0^n &= \omega_0^n, & \bar{\omega}_n^0 &= \omega_n^0, & \bar{\omega}_0^0 &= \omega_0^0 - S_K \omega_0^K, & \bar{\omega}_n^n &= \omega_n^n - S_K \omega_0^K.\end{aligned}\quad (a)$$

$$\bar{\omega}_i^\alpha = -\Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \omega_\beta^j, \quad \bar{\omega}_\alpha^i = -\Lambda_n^{ij} \Lambda_{\beta\alpha}^n \omega_j^\beta, \quad (b)$$

$$\bar{\omega}_i^j = \omega_i^j + \Lambda_n^{jh} \Lambda_{hiK}^n \omega_0^K - \delta_i^j S_K \omega_0^K, \quad (I)$$

$$\bar{\omega}_i^p = -\Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{pq} \omega_q^j, \quad \bar{\omega}_p^i = -\Lambda_{qp}^n \Lambda_{ij}^n \omega_j^q, \quad (c)$$

$$\bar{\omega}_p^t = \omega_p^t + \Lambda_n^{tq} \Lambda_{qpK}^n \omega_0^K - \delta_p^t S_K \omega_0^K,$$

$$\bar{\omega}_\alpha^p = -\Lambda_n^{pq} \Lambda_{\beta\alpha}^n \omega_q^\beta, \quad \bar{\omega}_p^\alpha = -\Lambda_{qp}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \omega_\beta^q,$$

$$\bar{\omega}_0^n = \omega_0^n, \quad \bar{\omega}_n^0 = \omega_n^0, \quad \bar{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - S_K \omega_0^K, \quad \bar{\omega}_n^n = \omega_n^n - S_K \omega_0^K.$$

Формы  $\bar{\omega}_K^{\bar{I}}$  удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства и задают инфинитезимальные перемещения тангенциального репера  $\{\tau_{\bar{I}}\}$ :

$$d\tau_{\bar{I}} = \bar{\omega}_I^{\bar{K}} \tau_{\bar{K}}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \rho[A_0, A_p, A_i, A_\alpha], \quad \tau_n = \rho[A_n, A_p, A_i, A_\alpha], \\
\tau_p &= \rho \sum_q \Lambda_{qp}^n [A_0, A_1, \dots, A_{q-1}, A_n, A_{q+1}, \dots, A_r, A_i, A_\alpha], \\
\tau_i &= \rho \sum_j \Lambda_{ji}^n [A_0, A_p, A_{r+1}, \dots, A_{j-1}, A_n, A_{j+1}, \dots, A_m, A_\alpha], \\
\tau_\alpha &= \rho \sum_\beta \Lambda_{\beta\alpha}^n [A_0, A_p, A_i, A_{m+1}, \dots, A_{\beta-1}, A_n, A_{\beta+1}, \dots, A_{n-1}],
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda \cdot L \cdot H}} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{S}};$$

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \det \|\Lambda_{pq}^n\| \neq 0, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \det \|\Lambda_{ij}^n\| \neq 0, \quad H \stackrel{\text{def}}{=} \|\Lambda_{\alpha\beta}^n\| \neq 0,$$

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \det \|S_{\sigma\rho}\| = \det \begin{vmatrix} \Lambda_{pq}^n & \Lambda_{pj}^n & \Lambda_{p\beta}^n \\ 0 & \Lambda_{ij}^n & \Lambda_{i\beta}^n \\ 0 & 0 & \Lambda_{\alpha\beta}^n \end{vmatrix} = \Lambda \cdot L \cdot H \neq 0,$$

$$S_K = \frac{1}{n+1} (\Lambda_K + L_K + H_K), \quad \nabla S_K + S_K \omega_0^\sigma + \delta_K^\sigma \omega_\sigma^0 - \Lambda_{\sigma K}^n \omega_n^\sigma \equiv 0.$$

Докажем, что преобразование  $\mathfrak{P}: \omega_K^{\bar{i}} \rightarrow \bar{\omega}_K^{\bar{i}}$  форм проективного пространства по закону (I) является инволютивным, т. е.  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{-1}$ .

Прежде всего, из формул (1.a)

$$\bar{\omega}_p^n = \bar{\Lambda}_{pK}^n \bar{\omega}_0^K, \quad \bar{\omega}_i^n = \bar{\Lambda}_{ii}^n \bar{\omega}_0^i, \quad \bar{\omega}_\alpha^n = \bar{\Lambda}_{\alpha\beta}^n \bar{\omega}_0^\beta$$

в силу соотношений (I.a) находим

$$\bar{\Lambda}_{pq}^n = -\Lambda_{qp}^n, \quad \bar{\Lambda}_{ij}^n = -\Lambda_{ji}^n, \quad \bar{\Lambda}_{\alpha\beta}^n = -\Lambda_{\beta\alpha}^n; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_{pi}^n &= \Lambda_{qp}^n \Lambda_n^{qs} \Lambda_{si}^n, \quad \bar{\Lambda}_{p\alpha}^n = \Lambda_{qp}^n \Lambda_n^{qs} \Lambda_{s\alpha}^n - \Lambda_{qp}^n \Lambda_n^{qs} \Lambda_{si}^n \Lambda_n^{ij} \Lambda_{j\alpha}^n, \\
\bar{\Lambda}_{pn}^n &= \Lambda_{qp}^n \Lambda_n^{qs} \Lambda_{sn}^n - \bar{\Lambda}_{pi}^n \Lambda_n^{ij} \Lambda_{jn}^n - \bar{\Lambda}_{p\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\bar{\Lambda}_{i\alpha}^n = \Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{jk} \Lambda_{k\alpha}^n, \quad \bar{\Lambda}_{in}^n = \Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{jk} \Lambda_{kn}^n - \Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{jk} \Lambda_{k\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n, \quad \bar{\Lambda}_{\alpha n}^n = \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_n^{\beta\gamma} \Lambda_{\gamma n}^n;$$

$$\bar{\Lambda}_{ip}^n = 0, \quad \bar{\Lambda}_{\alpha p}^n = 0, \quad \bar{\Lambda}_{\alpha i}^n = 0. \tag{9}$$

Из формул  $\bar{\Lambda}_n^{pq} \bar{\Lambda}_{qs}^n = \delta_s^p$ ,  $\bar{\Lambda}_n^{ij} \bar{\Lambda}_{jk}^n = \delta_k^i$ ,  $\bar{\Lambda}_n^{\alpha\beta} \bar{\Lambda}_{\beta\gamma}^n = \delta_\gamma^\alpha$  и формул (7) получаем

$$\bar{\Lambda}_n^{pq} = -\Lambda_n^{qp}, \quad \bar{\Lambda}_n^{ij} = -\Lambda_n^{ji}, \quad \bar{\Lambda}_n^{\beta\alpha} = -\Lambda_n^{\alpha\beta}. \quad (10)$$

Дифференциальные уравнения (3.a), при  $K=q$  относительно тангенциального репера  $\{\tau_i\}$  запишутся в виде

$$d\bar{\Lambda}_{qp}^n - \bar{\Lambda}_{sq}^n \bar{\omega}_p^s - \bar{\Lambda}_{ps}^n \bar{\omega}_q^s + \bar{\Lambda}_{pq}^n (\bar{\omega}_n^n + \bar{\omega}_0^0) = \bar{\Lambda}_{pqK}^n \bar{\omega}_0^K. \quad (11)$$

Из уравнений (11), с использованием формул (I), (7), (3.a) находим

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{pqs}^n &= \Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{if} \Lambda_{fqs}^n, \\ \bar{\Lambda}_{pqi}^n &= \Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{if} \Lambda_{fqi}^n - \bar{\Lambda}_{pqs}^n \Lambda_n^{sf} \Lambda_{fi}^n, \\ \bar{\Lambda}_{pq\alpha}^n &= \Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{if} \Lambda_{f\alpha}^n - \bar{\Lambda}_{pqs}^n \Lambda_n^{sf} \Lambda_{f\alpha}^n - \bar{\Lambda}_{pqi}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{k\alpha}^n, \\ \bar{\Lambda}_{pqn}^n &= \Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{if} \Lambda_{fqn}^n - \bar{\Lambda}_{pqs}^n \Lambda_n^{sf} \Lambda_{fn}^n - \bar{\Lambda}_{pqi}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kn}^n - \bar{\Lambda}_{pq\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично, из дифференциальных уравнений (3.b), при  $\hat{u} = j$  и (3.c) при  $\hat{\beta} = \beta$ , записанных относительно тангенциального репера (6), с учетом формул (1), (3.b), (3.c) соответственно получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{ijp}^n &= \Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{kl} \Lambda_{ijp}^n, \\ \bar{\Lambda}_{ijk}^n &= \Lambda_{hi}^n \Lambda_n^{hl} \Lambda_{ijk}^n - \bar{\Lambda}_{ijp}^n \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qk}^n, \\ \bar{\Lambda}_{ij\alpha}^n &= \Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{kl} \Lambda_{j\alpha}^n - \bar{\Lambda}_{ijk}^n \Lambda_n^{kl} \Lambda_{\alpha}^n - \bar{\Lambda}_{ijp}^n \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\alpha}^n, \\ \bar{\Lambda}_{ijn}^n &= \Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{kl} \Lambda_{ijn}^n - \bar{\Lambda}_{ijk}^n \Lambda_n^{kl} \Lambda_{ln}^n - \bar{\Lambda}_{ijp}^n \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n - \bar{\Lambda}_{ij\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n. \end{aligned} \quad (13)$$

---


$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{\alpha\beta p}^n &= \Lambda_{\epsilon\alpha}^n \Lambda_n^{\epsilon\delta} \Lambda_{\delta\beta p}^n, \\ \bar{\Lambda}_{\alpha\beta i}^n &= \Lambda_{\epsilon\alpha}^n \Lambda_n^{\epsilon\delta} \Lambda_{\delta\beta i}^n - \bar{\Lambda}_{\alpha\beta p}^n \Lambda_n^{pf} \Lambda_{fi}^n, \\ \bar{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma}^n &= \Lambda_{\epsilon\alpha}^n \Lambda_n^{\epsilon\delta} \Lambda_{\delta\beta\gamma}^n - \bar{\Lambda}_{\alpha\beta i}^n \Lambda_n^{ij} \Lambda_{j\gamma}^n - \bar{\Lambda}_{\alpha\beta p}^n \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\gamma}^n, \\ \bar{\Lambda}_{\alpha\beta n}^n &= \Lambda_{\epsilon\alpha}^n \Lambda_n^{\epsilon\delta} \Lambda_{\delta\beta n}^n - \bar{\Lambda}_{\alpha\beta p}^n \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n - \bar{\Lambda}_{\alpha\beta i}^n \Lambda_n^{ij} \Lambda_{jn}^n - \bar{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma}^n \Lambda_n^{\gamma\delta} \Lambda_{\delta n}^n. \end{aligned} \quad (14)$$

Последние группы необходимых соотношений между объектами, отнесенными к различным реперам  $\{A_{\bar{l}}\}$  и  $\{\tau_{\bar{k}}\}$ , находим из соотношений

$$\bar{\Lambda}_K = \bar{\Lambda}_n^{qp} \bar{\Lambda}_{qpK}^n, \quad \bar{L}_K = \bar{\Lambda}_n^{ji} \bar{\Lambda}_{ijK}^n, \quad \bar{H}_K = \bar{\Lambda}_n^{\beta\alpha} \bar{\Lambda}_{\alpha\beta K}^n$$

с использованием формул (7)—(14):

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_p &= -\Lambda_p, & \bar{\Lambda}_i &= -\Lambda_i + \Lambda_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qi}^n, \\ \bar{\Lambda}_\alpha &= -\Lambda_\alpha + \Lambda_p \Lambda_n^{pf} \Lambda_{f\alpha}^n + \Lambda_i \Lambda_n^{ik} \Lambda_{k\alpha}^n - \Lambda_p \Lambda_n^{pf} \Lambda_{jk}^n \Lambda_n^{ki} \Lambda_{i\alpha}^n, \\ \bar{\Lambda}_n &= -\Lambda_n + \Lambda_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n + \Lambda_\alpha \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n + \Lambda_i \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kn}^n - \Lambda_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n - \\ &- \Lambda_i \Lambda_n^{ik} \Lambda_{k\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n + \Lambda_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qi}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{k\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n - \Lambda_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qk}^n \Lambda_n^{ki} \Lambda_{in}^n; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_p &= -L_p, & \bar{L}_i &= -L_i + L_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qi}^n, \\ \bar{L}_\alpha &= -L_\alpha + L_p \Lambda_n^{pf} \Lambda_{f\alpha}^n + L_i \Lambda_n^{ik} \Lambda_{k\alpha}^n - L_p \Lambda_n^{pf} \Lambda_{jk}^n \Lambda_n^{ki} \Lambda_{i\alpha}^n, \\ \bar{L}_n &= -L_n + L_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n + L_\alpha \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n + L_i \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kn}^n - L_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n - \\ &- L_i \Lambda_n^{ik} \Lambda_{k\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n + L_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qi}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{k\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n - L_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qk}^n \Lambda_n^{ki} \Lambda_{in}^n; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_p &= -H_p, & \bar{H}_i &= -H_i + H_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qi}^n, \\ \bar{H}_\alpha &= -H_\alpha + H_i \Lambda_n^{ij} \Lambda_{j\alpha}^n + H_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\alpha}^n - H_p \Lambda_n^{pf} \Lambda_{fi}^n \Lambda_{j\alpha}^n, \\ \bar{H}_n &= -H_n + H_\alpha \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n - H_i \Lambda_n^{ij} \Lambda_{j\gamma}^n \Lambda_n^{\gamma\epsilon} \Lambda_{\epsilon n}^n + H_p \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n + H_i \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kn}^n - \\ &- H_i \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n + H_p \Lambda_n^{pf} \Lambda_{fi}^n \Lambda_n^{ij} \Lambda_{j\alpha}^n \Lambda_n^{\alpha\epsilon} \Lambda_{\epsilon n}^n - H_p \Lambda_n^{pf} \Lambda_{fi}^n \Lambda_n^{ij} \Lambda_{jn}^n. \end{aligned} \quad (17)$$

Наконец, разрешая формулы (I), с помощью соотношений (7)—(17), относительно  $\bar{\omega}_{\bar{l}}^{\bar{k}}$ , получаем формулы, определяющие преобразование  $\mathfrak{P}^{-1}(\bar{\omega}_{\bar{k}}^{\bar{l}} \rightarrow \bar{\omega}_{\bar{k}}^{\bar{l}})$ :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_0^p &= \bar{\omega}_0^p + \bar{\Lambda}_n^{pq} \bar{\Lambda}_{qp}^n \bar{\omega}_0^q, & \bar{\omega}_0^i &= \bar{\omega}_0^i + \bar{\Lambda}_n^{ij} \bar{\Lambda}_{j\alpha}^n \bar{\omega}_0^\alpha, & \bar{\omega}_0^\alpha &= \bar{\omega}_0^\alpha + \bar{\Lambda}_n^{\alpha\beta} \bar{\Lambda}_{\beta n}^n \bar{\omega}_0^n, \\ \bar{\omega}_p^n &= -\bar{\Lambda}_{qp}^n \bar{\omega}_0^q, & \bar{\omega}_i^n &= -\bar{\Lambda}_{ji}^n \bar{\omega}_0^j, & \bar{\omega}_\alpha^n &= -\bar{\Lambda}_{\beta\alpha}^n \bar{\omega}_0^\beta, \\ \bar{\omega}_p^0 &= \bar{\Lambda}_{qp}^n \bar{\omega}_n^q, & \bar{\omega}_i^0 &= \bar{\Lambda}_{ji}^n \bar{\omega}_n^j, & \bar{\omega}_\alpha^0 &= \bar{\Lambda}_{\beta\alpha}^n \bar{\omega}_n^\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha^\beta &= \bar{\omega}_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \bar{S}_K \bar{\omega}_0^K + \bar{\Lambda}_n^{\beta\gamma} \bar{\Lambda}_{\gamma\alpha K}^n \bar{\omega}_0^K, \\
\omega_i^\alpha &= -\bar{\Lambda}_n^{ij} \bar{\Lambda}_{\beta\alpha}^n \bar{\omega}_j^\beta, \quad \omega_i^\alpha = -\bar{\Lambda}_n^{ij} \bar{\Lambda}_{\alpha\beta}^n \bar{\omega}_j^\beta, \\
\omega_j^i &= \bar{\omega}_j^i + \bar{\Lambda}_n^{jl} \bar{\Lambda}_{lik}^n \bar{\omega}_0^K - \delta_j^i \bar{S}_K \bar{\omega}_0^K, \\
\omega_p^i &= -\bar{\Lambda}_n^{pq} \bar{\Lambda}_{ji}^n \bar{\omega}_q^j, \quad \omega_p^i = -\bar{\Lambda}_n^{pq} \bar{\Lambda}_{ij}^n \bar{\omega}_j^q, \\
\omega_p^i &= \bar{\omega}_p^i + \bar{\Lambda}_n^{iq} \bar{\Lambda}_{qpK}^n \bar{\omega}_0^K - \delta_p^i \bar{S}_K \bar{\omega}_0^K, \\
\omega_\alpha^p &= -\bar{\Lambda}_n^{pq} \bar{\Lambda}_{\beta\alpha}^n \bar{\omega}_q^\beta, \quad \omega_\alpha^p = -\bar{\Lambda}_n^{pq} \bar{\Lambda}_n^{\alpha\beta} \bar{\omega}_\beta^q, \\
\omega_0^n &= \bar{\omega}_0^n, \quad \omega_n^0 = \bar{\omega}_n^0, \quad \omega_0^0 = \bar{\omega}_0^0 - \bar{S}_K \bar{\omega}_0^K, \quad \omega_n^n = \bar{\omega}_n^n - \bar{S}_K \bar{\omega}_0^K.
\end{aligned} \tag{II}$$

Теперь из (I) и (II) следует, что  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{-1}$ . Дифференциальные уравнения регулярного  $\mathcal{H}$ -распределения, двойственного данному  $\mathcal{H}$ -распределению, имеет вид, аналогичный уравнениям (1) (без соответствующих замыканий):

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_p^n &= \bar{\Lambda}_n^{pk} \bar{\omega}_0^K, \quad \bar{\omega}_i^n = \bar{\Lambda}_{in}^k \bar{\omega}_0^K, \quad \bar{\omega}_\alpha^n = \bar{\Lambda}_{\alpha\beta}^n \bar{\omega}_0^\beta, \\
\bar{\omega}_p^i &= \bar{\Lambda}_n^{ik} \bar{\omega}_0^K, \quad \bar{\omega}_i^p = \bar{\Lambda}_{ik}^p \bar{\omega}_0^K, \quad \bar{\omega}_\alpha^i = \bar{\Lambda}_{\alpha k}^i \bar{\omega}_0^K, \\
\bar{\omega}_p^\alpha &= \bar{\Lambda}_n^{\alpha k} \bar{\omega}_0^K, \quad \bar{\omega}_i^\alpha = \bar{\Lambda}_{ik}^\alpha \bar{\omega}_0^K, \quad \bar{\omega}_\alpha^p = \bar{\Lambda}_{\alpha k}^p \bar{\omega}_0^K.
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом справедлива

**Теорема 1.** *Регулярное  $\mathcal{H}$ -распределение проективного пространства  $P_n$  во второй дифференциальной окружности его образующего элемента индуцирует:*

1. *проективное пространство  $\bar{P}_n$ , двойственное исходному проективному пространству  $P_n$  относительно инволютивного преобразования  $\mathfrak{F}$  форм  $\omega_i^K$  по закону (I),*

2. *регулярное распределение  $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{P}_n$ , двойственное исходному, причем его дифференциальные уравнения в тангенциальном репере (5)-(6) имеют вид (18), аналогичный уравнениям (I)  $\mathcal{H}$ -распределения проективного пространства  $P_n$ .*

Теорему 1 впервые доказал А.В. Столяров [6], [7] для гиперполосных распределений и для регулярных гиперполос, а также построил с помощью преобразования  $\mathcal{J}(I^*)$  двойственные образы.

Отметим, что инволютивность преобразования  $\mathfrak{F}$  (I) для частного класса трехсоставных распределений  $\mathcal{H}_{m,n-1}^r \subset P_n$  доказана в работе [5], для скомпонованных  $\mathcal{S}$ -распределений в работах [1], [2], для



$H$ -распределений в работе [3]. Двойственная теория имеет место и на оснащённом  $H$ -распределении в  $P_n$ .

Пусть основные структурные подрасслоения ( $\Lambda$ -подрасслоение,  $L$ -подрасслоение и  $E$ -подрасслоение [4]) нормализованы в смысле Нордена соответственно полями квазитензоров  $\{V_n^p, V_p^0\}, \{V_n^i, V_i^0\}, \{V_n^\alpha, V_\alpha^0\}$ , удовлетворяющими уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla V_n^p + \omega_n^p &= V_{nK}^p \omega_0^K, & \nabla V_p^0 + \omega_p^0 &= V_{pK}^0 \omega_0^K, \\ \nabla V_n^i + \omega_n^i &= V_{nK}^i \omega_0^K, & \nabla V_i^0 + \omega_i^0 &= V_{iK}^0 \omega_0^K, \\ \nabla V_n^\alpha + \omega_n^\alpha &= V_{nK}^\alpha \omega_0^K, & \nabla V_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 &= V_{\alpha K}^0 \omega_0^K, \end{aligned} \quad (19)$$

Легко убедиться, в силу соотношений (3), (I), (19), что функции

$$\begin{aligned} \bar{V}_n^p &= -\Lambda_n^{pq} V_q^0, & \bar{V}_p^0 &= \Lambda_{qp}^n V_n^q; & \bar{V}_n^i &= -\Lambda_n^{ik} V_k^0, & \bar{V}_i^0 &= \Lambda_{ki}^n V_n^k; \\ \bar{V}_n^\alpha &= -\Lambda_n^{\alpha\beta} V_\beta^0, & \bar{V}_\alpha^0 &= \Lambda_{\beta\alpha}^n V_n^\beta \end{aligned} \quad (20)$$

удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla \bar{V}_n^p + \bar{\omega}_n^p &= \bar{V}_{nK}^p \bar{\omega}_0^K, & \nabla \bar{V}_p^0 + \bar{\omega}_p^0 &= \bar{V}_{pK}^0 \bar{\omega}_0^K, \\ \nabla \bar{V}_n^i + \bar{\omega}_n^i &= \bar{V}_{nK}^i \bar{\omega}_0^K, & \nabla \bar{V}_i^0 + \bar{\omega}_i^0 &= \bar{V}_{iK}^0 \bar{\omega}_0^K, \\ \nabla \bar{V}_n^\alpha + \bar{\omega}_n^\alpha &= \bar{V}_{nK}^\alpha \bar{\omega}_0^K, & \nabla \bar{V}_\alpha^0 + \bar{\omega}_\alpha^0 &= \bar{V}_{\alpha K}^0 \bar{\omega}_0^K, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{V}_{nK}^p \bar{\omega}_0^K &= -\Lambda_n^{pq} V_{qK}^0 \omega_0^K, & \bar{V}_{pK}^0 \bar{\omega}_0^K &= \Lambda_{qp}^n V_{nK}^q \omega_0^K; \\ \bar{V}_{nK}^i \bar{\omega}_0^K &= -\Lambda_n^{ij} V_{jK}^0 \omega_0^K, & \bar{V}_{iK}^0 \bar{\omega}_0^K &= \Lambda_{ji}^n V_{nK}^j \omega_0^K; \\ \bar{V}_{nK}^\alpha \bar{\omega}_0^K &= -\Lambda_n^{\alpha\beta} V_{\beta K}^0 \omega_0^K, & \bar{V}_{\alpha K}^0 \bar{\omega}_0^K &= \Lambda_{\beta\alpha}^n V_{nK}^\beta \omega_0^K. \end{aligned}$$

Следовательно, всякая нормализация  $H$ -распределения индуцирует двойственную ей нормализацию. При этом оснащающие объекты связаны соотношениями (20), удовлетворяющими уравнениям (21).

Таким образом справедлива

**Теорема 2.** *Нормализация в смысле Нордена одного из регулярных трехсоставных распределений  $\mathcal{H} \subset P_n$  и  $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{P}_n$  равносильна*

нормализации другого, при этом компоненты полей оснащенных объектов связаны соотношениями (20).

В первых трех дифференциальных окрестностях в работе [4] построены (без применения теории двойственности) различные внутренние инвариантные нормализации  $H$ -распределения проективного пространства  $P_n$ . Таким образом, в силу теоремы 2 утверждаем: зная закон охвата объекта нормали первого (второго) рода  $\nu_n^\sigma(\nu_\sigma^0)$  любого ассоциированного распределения с данным  $H$ -распределением, можно построить внутренним образом определенную соответствующую нормаль второго (первого) рода  $\nu_\sigma^0(\nu_n^\sigma)$  данного ассоциированного распределения по следующей схеме [6],[7]. Построим охват квазитензора  $\bar{\nu}_n^\sigma(\bar{\nu}_\sigma^0)$  двойственного образа  $\bar{H} \subset \bar{P}_n$  аналогичный охвату  $\nu_n^\sigma(\nu_\sigma^0)$  после чего, используя двойственные соотношения (например (7)—(17), (20)) находим соответствующую нормаль  $\nu_\sigma^0(\nu_n^\sigma)$ . В этом случае говорят [6], [7], что поля нормалей  $\nu_n^\sigma$  и  $\nu_\sigma^0$  двойственны друг другу по отношению к инволютивному преобразованию  $\mathfrak{F}$  (I).

### § 3. Аналитические признаки двойственности и $\mathbf{H}(\Lambda)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{M})$ - подрасслоений, ассоциированных с $\mathbf{H}$ -распределением

Из формул (I.b) получаем соотношения:

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_{\alpha p}^i &= \Lambda_n^{ik} \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_{kp}^\beta, \\ \bar{\Lambda}_{\alpha j}^i + \Lambda_{\alpha p}^i \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qj}^n &= -\Lambda_n^{ik} \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_{kj}^\beta, \\ \bar{\Lambda}_{\alpha\beta}^i + \Lambda_{\alpha p}^i \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\beta}^n + \bar{\Lambda}_{\alpha j}^i \Lambda_n^{jk} \Lambda_{k\beta}^n &= -\Lambda_n^{ik} \Lambda_{\gamma\alpha}^n \Lambda_{k\beta}^\gamma, \\ \bar{\Lambda}_{\alpha n}^i + \bar{\Lambda}_{\alpha p}^i \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n + \bar{\Lambda}_{\alpha j}^i \Lambda_n^{jk} \Lambda_{kn}^n + \bar{\Lambda}_{\alpha\beta}^i \Lambda_n^{\beta\gamma} \Lambda_{\gamma n}^n &= -\Lambda_n^{ik} \Lambda_{\gamma\alpha}^n \Lambda_{kn}^\gamma.\end{aligned}\tag{III}$$

---


$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_{ip}^\alpha &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta p}^k, \\ \bar{\Lambda}_{ij}^\alpha + \Lambda_{ip}^\alpha \Lambda_n^{\beta q} \Lambda_{qj}^n &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta j}^k, \\ \bar{\Lambda}_{i\beta}^\alpha + \bar{\Lambda}_{ij}^\alpha \Lambda_n^{jk} \Lambda_{k\beta}^n + \bar{\Lambda}_{ip}^\alpha \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\beta}^n &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{\alpha\gamma} \Lambda_{\gamma\beta}^k, \\ \bar{\Lambda}_{in}^\alpha + \bar{\Lambda}_{ip}^\alpha \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n + \bar{\Lambda}_{ij}^\alpha \Lambda_n^{jk} \Lambda_{kn}^n + \bar{\Lambda}_{i\beta}^\alpha \Lambda_n^{\beta\gamma} \Lambda_{\gamma n}^n &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{\alpha\gamma} \Lambda_{\gamma n}^k;\end{aligned}\tag{IV}$$

Известно [7], что инволютивное преобразование  $\mathcal{J}(\bar{\omega}_{\bar{k}}^{\bar{I}} \rightarrow \bar{\omega}_{\bar{k}}^{\bar{I}})$ , заданное системой из  $(n+1)^2$  форм Пфаффа  $\bar{\omega}_{\bar{k}}^{\bar{I}}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_0^p &= \omega_0^p + \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qr}^n \omega_0^r, & \bar{\omega}_0^v &= \omega_0^v + \Lambda_n^{vw} \Lambda_{wn}^n \omega_0^n, \\
\bar{\omega}_p^n &= -\Lambda_{qp}^n \omega_0^q, & \bar{\omega}_v^n &= -\Lambda_{uv}^n \omega_0^u, & \bar{\omega}_p^0 &= \Lambda_{qp}^n \omega_n^q, & \bar{\omega}_v^0 &= \Lambda_{uv}^n \omega_n^u, \\
\bar{\omega}_v^u &= \omega_v^u - \delta_v^u S_K \omega_0^K + \Lambda_n^{uv} \Lambda_{vw}^n \omega_0^K, \\
\bar{\omega}_v^p &= -\Lambda_{vw}^n \Lambda_n^{pq} \omega_q^w, & \bar{\omega}_p^v &= -\Lambda_{qp}^n \Lambda_n^{vw} \omega_w^v, & & & & (I^*) \\
\bar{\omega}_p^j &= \omega_p^j + \Lambda_n^{jq} \Lambda_{qpK}^n \omega_0^K - \delta_p^j S_K \omega_0^K, \\
\bar{\omega}_\alpha^p &= -\Lambda_n^{pq} \Lambda_{\beta q}^n \omega_\alpha^\beta, & \bar{\omega}_p^\alpha &= -\Lambda_{qp}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \omega_\beta^q, \\
\bar{\omega}_0^n &= \omega_0^n, & \bar{\omega}_n^0 &= \omega_n^0, & \bar{\omega}_0^0 &= \omega_0^0 - S_K \omega_0^K, & \bar{\omega}_n^\alpha &= \omega_n^\alpha - S_K \omega_0^K,
\end{aligned}$$

преобразует гиперполосное распределение  $H(\Lambda)$  ( $H(\Lambda)$ -распределение) в двойственное ему гиперполосное распределение  $\overline{H(\Lambda)}$  Если преобразование  $\mathfrak{P}(I)$  индуцирует преобразование  $\mathcal{J}(I^*)$ , то выполняются условия

$$\bar{\omega}_\alpha^i = \omega_\alpha^i + \Lambda_n^{iv} \Lambda_{v\alpha K}^n \omega_0^K, \quad \bar{\omega}_i^\alpha = \omega_i^\alpha,$$

из которых согласно формулам (I) получим

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_{\alpha p}^i &= \Lambda_{\alpha p}^i + \Lambda_n^{iv} \Lambda_{v\alpha p}^n, \\
\bar{\Lambda}_{\alpha j}^i + \Lambda_{\alpha p}^i \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qj}^n &= \Lambda_{\alpha j}^i + \Lambda_n^{iv} \Lambda_{v\alpha j}^n, & & (V) \\
\bar{\Lambda}_{\alpha\beta}^i + \bar{\Lambda}_{\alpha p}^i \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\beta}^n + \bar{\Lambda}_{\alpha j}^i \Lambda_n^{jk} \Lambda_{k\beta}^n &= \Lambda_{\alpha\beta}^i \Lambda_n^{iv} \Lambda_{v\alpha\beta}^n. \\
\bar{\Lambda}_{\alpha n}^i + \bar{\Lambda}_{\alpha p}^i \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n + \bar{\Lambda}_{\alpha j}^i \Lambda_n^{jk} \Lambda_{kn}^n + \bar{\Lambda}_{\alpha\beta}^i \Lambda_n^{\beta\gamma} \Lambda_{\gamma n}^n &= \Lambda_{\alpha n}^i + \Lambda_n^{iv} \Lambda_{v\alpha n}^n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_{ip}^\alpha &= \Lambda_{ip}^\alpha, & \bar{\Lambda}_{ij}^\alpha + \bar{\Lambda}_{ip}^\alpha \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qj}^n &= \Lambda_{ij}^\alpha, \\
\bar{\Lambda}_{i\beta}^\alpha + \bar{\Lambda}_{ij}^\alpha \Lambda_n^{jk} \Lambda_{k\beta}^n + \bar{\Lambda}_{ip}^\alpha \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\beta}^n &= \Lambda_{i\beta}^\alpha, & & (VI) \\
\bar{\Lambda}_{in}^\alpha + \bar{\Lambda}_{ip}^\alpha \Lambda_n^{pq} \Lambda_{qn}^n + \bar{\Lambda}_{ij}^\alpha \Lambda_n^{jk} \Lambda_{kn}^n + \bar{\Lambda}_{i\beta}^\alpha \Lambda_n^{\beta\gamma} \Lambda_{\gamma n}^n &= \Lambda_{in}^\alpha.
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что из соотношений (III) и (V) следуют условия

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\alpha p}^i &= -\Lambda_n^{ij} \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_{jp}^\beta - \Lambda_n^{iv} \Lambda_{v\alpha p}^n, \\
\Lambda_{\alpha j}^i &= -\Lambda_n^{ik} \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_{kj}^\beta - \Lambda_n^{iv} \Lambda_{v\alpha j}^n, \\
\Lambda_{\alpha\beta}^i &= -\Lambda_n^{ik} \Lambda_{\gamma\alpha}^n \Lambda_{k\beta}^\gamma - \Lambda_n^{iv} \Lambda_{v\alpha\beta}^n, \\
\Lambda_{\alpha n}^i &= -\Lambda_n^{ij} \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_{jn}^\beta - \Lambda_n^{iv} \Lambda_{v\alpha n}^n,
\end{aligned} \tag{VII}$$

а из соотношений (IV) и (VI) соответственно условия

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ip}^\alpha &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{\alpha\gamma} \Lambda_{\gamma p}^k, & \Lambda_{ki}^\alpha &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{\alpha\gamma} \Lambda_{\gamma j}^k, \\
\Lambda_{i\beta}^\alpha &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{\alpha\gamma} \Lambda_{\gamma\beta}^k, & \Lambda_{in}^\alpha &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{\alpha\gamma} \Lambda_{\gamma n}^k.
\end{aligned} \tag{VIII}$$

Условия (VII), (VIII) являются не только необходимым, но и достаточными, чтобы преобразование  $\mathfrak{F}(I)$  порождало преобразование  $\mathcal{J}(I^*)$ . Действительно, если выполняются соотношения (VII) и (VIII) для  $H$ -распределения, то из (VII) и (III) следуют (V), а из (VIII) и (IV) следуют (VI).

Таким образом, доказана

**Теорема 3.** *Для того, чтобы инволютивное преобразование  $\mathfrak{F}(I)$  индуцировало инволютивное преобразование  $\mathcal{J}(I^*)$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (VII), (VIII).*

Геометрическая интерпретация теоремы 3 такова: инволютивное преобразование  $\mathfrak{F}$  при условиях (VII), (VIII), не только преобразует трехсоставное распределение  $H$  в двойственный ему образ  $\overline{H}$ , но и ассоциированное с ним  $H(\Lambda)$ -распределение преобразует в двойственный ему образ  $\overline{H}(\Lambda) \subset \overline{H}$ .

3. Преобразуем формулы (I.c) соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda}_{iq}^p &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{pt} \Lambda_{iq}^k, \\
\overline{\Lambda}_{ij}^p + \overline{\Lambda}_{iq}^p \Lambda_n^{qt} \Lambda_{ij}^n &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{pt} \Lambda_{ij}^k, \\
\overline{\Lambda}_{i\alpha}^p + \overline{\Lambda}_{iq}^p \Lambda_n^{qt} \Lambda_{i\alpha}^n + \overline{\Lambda}_{ij}^p \Lambda_n^{jk} \Lambda_{k\alpha}^n &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{pi} \Lambda_{i\alpha}^k, \\
\overline{\Lambda}_{in}^p + \overline{\Lambda}_{iq}^p \Lambda_n^{qt} \Lambda_m^n + \overline{\Lambda}_{ij}^p \Lambda_n^{jk} \Lambda_{kn}^n + \overline{\Lambda}_{i\alpha}^p \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{pi} \Lambda_m^k;
\end{aligned} \tag{IX}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_{pq}^i &= -\Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kp}^t, \\
\bar{\Lambda}_{pj}^i + \bar{\Lambda}_{pq}^i \Lambda_n^{qt} \Lambda_n^{ij} &= -\Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kj}^t, \\
\bar{\Lambda}_{p\alpha}^i + \bar{\Lambda}_{pq}^i \Lambda_n^{qt} \Lambda_n^{\alpha} + \bar{\Lambda}_{pj}^i \Lambda_n^{jk} \Lambda_n^{k\alpha} &= -\Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{k\alpha}^t, \\
\bar{\Lambda}_{pn}^i + \bar{\Lambda}_{pq}^i \Lambda_n^{qt} \Lambda_n^m + \bar{\Lambda}_{pj}^i \Lambda_n^{jk} \Lambda_n^{kn} + \bar{\Lambda}_{p\alpha}^i \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_n^{\beta n} &= -\Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kn}^t.
\end{aligned} \tag{X}$$

Аналогично, следуя работе [7], утверждаем, что инволютивное преобразование  $J(\omega_{\bar{K}}^{\bar{I}} \rightarrow \bar{\omega}_{\bar{K}}^{\bar{I}})$ , заданное системой из  $(n+1)^2$  форм Пфаффа

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_0^a &= \omega_0^a + \Lambda_n^{ab} \Lambda_{b\alpha}^n \omega_0^\alpha, & \bar{\omega}_0^\alpha &= \omega_0^\alpha + \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n \omega_0^n, \\
\bar{\omega}_a^n &= -\Lambda_{ba}^n \omega_0^b, & \bar{\omega}_a^\alpha &= -\Lambda_{\beta\alpha}^n \omega_0^\beta, \\
\bar{\omega}_a^0 &= \Lambda_{ba}^n \omega_0^b, & \bar{\omega}_a^\beta &= \Lambda_{\beta\alpha}^n \omega_0^\alpha, \\
\bar{\omega}_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta S_K \omega_0^K + \Lambda_n^{\beta\gamma} \Lambda_{\gamma\alpha K}^n \omega_0^K, \\
\bar{\omega}_\alpha^a &= -\Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_n^{ab} \omega_0^b, & \bar{\omega}_a^\alpha &= -\Lambda_{ba}^n \Lambda_n^{\alpha\beta} \omega_0^\beta, \\
\bar{\omega}_p^t &= \omega_p^t + \Lambda_n^{tq} \Lambda_{qpK}^n \omega_0^K - \delta_p^t S_K \omega_0^K, \\
\bar{\omega}_a^b &= \omega_a^b + \Lambda_n^{bc} \Lambda_{caK}^n \omega_0^K - \delta_a^b S_K \omega_0^K, \\
\bar{\omega}_0^n &= \omega_0^n, & \bar{\omega}_n^0 &= \omega_n^0, & \bar{\omega}_0^0 &= \omega_0^0 - S_K \omega_0^K, & \bar{\omega}_n^n &= \omega_n^n - S_K \omega_0^K,
\end{aligned} \tag{I*}$$

преобразует гиперполосное распределение  $\mathcal{H}(\mathcal{M})$  ( $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ -распределение) в двойственное ему гиперполосное распределение  $\overline{\mathcal{H}(\mathcal{M})}$ . Пусть преобразование  $\mathfrak{F}(\mathcal{I})$  индуцирует преобразование  $J(\mathcal{I}^*)$ , тогда выполняются равенства

$$\bar{\omega}_i^p = \omega_i^p + \Lambda_n^{pj} \Lambda_{jiK}^n \omega_0^K, \quad \bar{\omega}_p^i = \omega_p^i,$$

которые (в силу(I)) преобразуем, соответственно, в следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_{iq}^p &= \Lambda_{iq}^p + \Lambda_n^{pk} \Lambda_{kiq}^n, \\
\bar{\Lambda}_{ij}^p + \bar{\Lambda}_{iq}^p \Lambda_n^{qt} \Lambda_{tj}^n &= \Lambda_{ij}^p + \Lambda_n^{pk} \Lambda_{kij}^n, \\
\bar{\Lambda}_{i\alpha}^p + \bar{\Lambda}_{iq}^p \Lambda_n^{qt} \Lambda_{t\alpha}^n + \bar{\Lambda}_{ij}^p \Lambda_n^{jk} \Lambda_{k\alpha}^n &= \Lambda_{i\alpha}^p + \Lambda_n^{pk} \Lambda_{ki\alpha}^n, \\
\bar{\Lambda}_{in}^p + \bar{\Lambda}_{iq}^p \Lambda_n^{qt} \Lambda_{in}^n + \bar{\Lambda}_{ij}^p \Lambda_n^{jk} \Lambda_{kn}^n + \bar{\Lambda}_{i\alpha}^p \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n &= \Lambda_{in}^p + \Lambda_n^{pk} \Lambda_{kin}^n;
\end{aligned} \tag{XI}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_{pq}^i &= \Lambda_{pq}^i, \\
\bar{\Lambda}_{pj}^i + \bar{\Lambda}_{pq}^i \Lambda_n^{qt} \Lambda_{tj}^n &= \Lambda_{pj}^i, \\
\bar{\Lambda}_{p\alpha}^i + \bar{\Lambda}_{pq}^i \Lambda_n^{qt} \Lambda_{t\alpha}^n + \bar{\Lambda}_{pj}^i \Lambda_n^{jk} \Lambda_{k\alpha}^n &= \Lambda_{p\alpha}^i, \\
\bar{\Lambda}_{pn}^i + \bar{\Lambda}_{pq}^i \Lambda_n^{pt} \Lambda_{pn}^n + \bar{\Lambda}_{pj}^i \Lambda_n^{jk} \Lambda_{kn}^n + \bar{\Lambda}_{i\alpha}^p \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n &= \Lambda_{pn}^i.
\end{aligned} \tag{XII}$$

Теперь из соотношений (IX) и (XI) непосредственно получаем условия

$$\begin{aligned}
\Lambda_{iq}^p &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{pt} \Lambda_{tq}^k - \Lambda_n^{pk} \Lambda_{kiq}^n, & \Lambda_{ij}^p &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{pt} \Lambda_{tj}^k - \Lambda_n^{pk} \Lambda_{kij}^n, \\
\Lambda_{i\alpha}^p &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{pt} \Lambda_{t\alpha}^k - \Lambda_n^{pk} \Lambda_{ki\alpha}^n, & \Lambda_{in}^p &= -\Lambda_{ki}^n \Lambda_n^{pt} \Lambda_{in}^k - \Lambda_n^{pk} \Lambda_{kin}^n,
\end{aligned} \tag{XIII}$$

а из соотношений (X) и (XII) — условия

$$\begin{aligned}
\Lambda_{pq}^i &= -\Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kq}^t, & \Lambda_{pj}^i &= -\Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kj}^t, \\
\Lambda_{p\alpha}^i &= -\Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{k\alpha}^t, & \Lambda_{pn}^i &= -\Lambda_{ip}^n \Lambda_n^{ik} \Lambda_{kn}^t,
\end{aligned} \tag{XIV}$$

Соотношения (XIII), (XIV) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями, чтобы преобразование  $\mathfrak{F}(I)$  порождало инволютивное преобразование  $J(\Pi^*)$ . Действительно, если выполняются соотношения (XIII), (XIV) для  $H$ -распределения, то из (XIII) и (IX) следуют соотношения (XI), а из (XIV) и (X) следуют соотношения (XII). Это означает, что преобразование  $\mathfrak{F}(I)$  порождает преобразование  $J(\Pi^*)$ .

Итак, справедлива

**Теорема 4.** Для того, чтобы инволютивное преобразование  $\mathfrak{F}(I)$  порождало инволютивное преобразование  $J(\Pi^*)$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (XIII) и (XIV).

Теорему 4 можно геометрически интерпретировать следующим образом: инволютивное преобразование  $\mathfrak{F}$  при выполнении условий (XIII), (XIV) не только переводит трехсоставное распределение  $H$

в двойственный ему образ  $\overline{\mathcal{H}}$ , но и ассоциированное с ним  $N(M)$ -распределение преобразует в двойственный образ  $\overline{\mathcal{H}(M)} \subset \overline{\mathcal{H}}$ .

### Список литературы:

1. Волкова С.Ю. О двойственных проективных связностях  $N(\Lambda, L)$ -распределения. // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, Калинингр.ун-т, — 1993. — Вып. 24. — с. 28—37.
2. Волкова С.Ю. Двойственные аффинные и проективные связности  $S$ -распределения. /БВМИ. 2001. — 70 с. — Деп в ВИНТИ РАН. — 15.08.01. — № 1871–В2001.
3. Елисеева А.В.  $N(P)$ -распределения проективного пространства // ВИНТИ РАН. — 01.02.2002. — 49 с. — № 206-В2002Деп.
4. Попов Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. Монография. Санкт-Петербург. Из-во С-Петербургского ун-та, 1992. — 172 с.
5. Попов Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения  $\mathcal{H}_{m,n-1}^r$  проективного пространства. Калининградский гос. ун-т. Калининград. 1982. — 126 с. — Деп в ВИНТИ, № 6192-82Деп.
6. Столяров А.В. Двойственные нормальные связности на регулярной неголомомной гиперполосе // Изв. НАНИ ЧР (физ.-мат. Науки). Чебоксары, — 1996. — № 6 — С. 9—14.
7. Столяров А.В. Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. 2-е изд. \ Чуваш.пед.ин-т. Чебоксары, 1994. — 290 с.

## 1.4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

### КАТЕГОРИЧНЫЕ ФРАГМЕНТЫ ЙОНСОНОВСКИХ МНОЖЕСТВ

***Ешкеев Айбат Рафхатович***

*д-р ф-м. наук, профессор  
Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова,  
Республика Казахстан, г. Караганда  
E-mail: [modth1705@mail.ru](mailto:modth1705@mail.ru)*

***Муканов Амиржан Абзалович***

*канд. ф-м. наук, доцент  
Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова,  
Республика Казахстан, г. Караганда*

***Медеубаев Нурболат Куттымуратович***

*старший преподаватель Карагандинский государственный  
университет им. Е.А. Букетова,  
Республика Казахстан, г. Караганда  
E-mail: [medeubaev65@mail.ru](mailto:medeubaev65@mail.ru)*

## CATEGORICAL FRAGMENTS OF JONSSON SETS

***Yehskeev Aibat***

*doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor  
Karaganda State University. E.A. Buketov,  
Republic of Kazakhstan, Karaganda*

***Mukanov Amirzhan***

*candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor  
Karaganda State University. E.A. Buketov,  
Republic of Kazakhstan, Karaganda*



### АННОТАЦИЯ

В этой статье рассмотрены йонсоновские фрагменты йонсоновских множеств. Основным методом исследования данной работы является семантический метод для йонсоновских теорий. Его сущность заключается в переносе теоретико-модельных свойств центра на саму теорию.

### ABSTRACT

This article discusses the on fragments of Jonsson sets. The main research method of this paper is a semantic method for Jonsson theories. Its essence is to transfer the model-theoretic properties of the center on to the theory itself.

**Ключевые слова:** йонсоновские множества; йонсоновские теория; йонсоновский фрагмент; экзистенциальный замкнутый модель; категоричность.

**Keywords:** Jonsson set; Jonsson's theory; Jonsson fragment; existential closed model; categoricity.

Данная статья посвящена изучению специального вида позитивных теорий, являющихся фрагментом некоторого йонсоновского множества.

Множество  $K$  называется йонсоновским в теории  $T$ , если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $K$  есть  $\Sigma$  —определимое подмножество  $C$ ;
2.  $\text{dcl}(K)$  есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели  $C$ .

Дадим определения йонсоновского фрагмента:

Будем говорить, что все  $\forall\exists$ -следствия произвольной теории образуют йонсоновский фрагмент этой теории, если дедуктивное замыкание этих  $\forall\exists$ -следствий есть йонсоновская теория.

В силу того, что это не всегда верно, было бы интересно уметь выделять у произвольной теории такую часть, которая будет йонсоновской теорией. Такая задача имеет место быть, хотя бы в силу того, что морлизация произвольной полной теории нам это обеспечивает [3, с. 64]. Под морлизацией мы понимаем морлиевское обогащение теории, более того, полученная теория совершенна, т. е. семантическая модель данной теории насыщена в своей мощности.

Другой путь это использование такого факта, что любая счетная модель индуктивной теории обязательно вложится изоморфно в некоторую экзистенциально замкнутую модель рассматриваемой теории [3, с. 97]. Далее рассматриваем все  $\forall\exists$ -предложения истинные в этой модели. Тогда в случае йонсоновской теории хорошо известен тот факт, что  $\forall\exists$ -предложения истинные в данной экзистенциально замкнутой модели образуют йонсоновскую теорию.

Полученная в этом случае йонсоновская теория будет называться йонсоновским фрагментом соответствующего йонсоновского множества. Понятно, что мы можем проводить исследование йонсоновских фрагментов относительно связи с первоначальной теорией, что является новой постановкой задачи исследовании йонсоновских теорий.

Рассмотрим категоричные  $\Delta$ -йонсоновские теории, которые являются фрагментом некоторого йонсоновского множества.

Вначале мы хотим напомнить понятие  $\Delta$ -йонсоновских теорий ( $\Delta$ -J). В том случае, если при некотором фиксированном  $\Delta$ , в определении рассматриваемой  $\Delta$ -PJ теории [1, с. 61] заменить все  $\Delta$ -продолжения на  $\Delta$ -погружения, то мы получим определение  $\Delta$ -йонсоновских теорий ( $\Delta$ -J). Легко заметить, этот класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в отличии от ( $\Delta$ -PJ) теорий, которые могут быть вообще говоря и не йонсоновскими. В нашем случае это не так, так как продолжения всегда являются вложениями.

Далее мы предполагаем, что мы работаем только с теориями, которые фрагменты некоторого йонсоновского множества.

Пусть  $L$  язык первого порядка.  $At$  – есть множество атомарных формул данного языка.  $B^+(At)$  – замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных.  $Q(B^+(At))$  – есть множество формул в пренексном нормальном виде полученное с помощью применения кванторов ( $\forall$  и  $\exists$ ) к  $B^+(At)$ . Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству  $Q(B^+(At))$ . Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны.  $B(L^+)$  – это произвольная булева комбинация формул из  $L^+$ . Таким образом в дальнейшем мы в качестве морфизмов имеем только погружения.

Когда  $\Delta = B(At)$  мы получаем обычную йонсоновскую теорию с той лишь разницей, что у нее только позитивные  $\forall\exists$ -аксиомы.

В дальнейшем все определения понятий касающихся йонсоновских теорий (в обычном смысле) считаются известными и их можно извлечь, например, в [1].

Следующий результат можно найти в работе Сарацино [2, с. 169]:

**Теорема 1.** Если  $L$  — счетный язык и  $T$  полная  $\omega$ -категоричная теория, то  $T$  имеет  $\omega$ -категоричный модельный компаньон.

При изучении йонсоновских теорий главным инструментом их исследования является семантический метод, который заключается в следующем: элементарные свойства центра йонсоновской теории «транслируются» на саму теорию. При этом элементарная теория семантической модели йонсоновской теории аналогична позитивной робинсоновской теории, и является инвариантом этой йонсоновской теории, так как все семантические модели одной и той же йонсоновской теории элементарно эквивалентны между собой.

Следующее определение принадлежит Макинтайру [3, с. 244].

Теория  $T$  позитивно модельно полна, если  $T$  модельно полна и каждая экзистенциальная  $L$ -формула эквивалентна в  $T$  некоторой позитивно экзистенциальной  $L$ -формуле.

Модель  $A \in ModT$  называется простой (simple) в  $ModT$ , если каждый нетривиальный морфизм из  $A$  в  $B$ , где  $B \in ModT$ , является инъективным.

Из работы Вайспфенинга [4] можно извлечь следующий результат:

**Теорема 2.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $T$  позитивно модельно полна.
2.  $T$  модельно полна и каждая  $T$ -модель является простейшей в  $ModT$ .

Легко заметить, что позитивная робинсоновская теория в смысле [5, с. 56], [6, с. 111] является обобщением понятия оболочки Кайзера  $T^0$  для йонсоновской теории  $T$ . В случае, когда  $\Delta = B(At)$  и  $\Delta$ - $J$  теория совершенна, следует, что понятие семантической модели для позитивной йонсоновской теории и универсальной области из [5, с. 56], [6, с. 111] совпадают. С помощью этого замечания, мы хотим доказать результат описывающий счетно категоричные  $\Delta$ -йонсоновские теории.

**Теорема 3.** Пусть  $T$  —  $\Delta$ - $J$ -теория. Пусть  $F$  фрагмент произвольного йонсоновского подмножества семантической модели  $T$ , который является

$\Delta$ - $J$ -теорией и  $T^*$  есть центр теории  $F$ .

Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Теория  $T^*$  —  $\omega$ -категорична;
2. Теория  $T$  —  $\omega$ -категорична.

**Доказательство.** 1)  $\Rightarrow$  2).

1) Пусть  $T^* = Th(C)$  —  $\omega$ -категорична, где  $C$  —  $T$ -универсальная  $T$ -однородная модель теории  $T$ . Она существует в силу того, что  $T$ , в частности, является йонсоновской теорией. Так как  $T^*$  полная, то в силу теоремы 1,  $T^*$  имеет  $\omega$ -категоричный модельный компаньон  $T^*$ . В силу модельной совместности  $T$  и  $T^*$ ,  $T^*$  и  $T^*$ , и так как отношение быть модельно совместным транзитивно, мы имеем, что  $T^*$  модельно совместна с  $T$ . Из этого следует, что  $T^*$  является модельным компаньоном  $T$ . По теореме Робинсона о единственности модельного компаньона, следует, что  $T^* = T^*$ . Следовательно,  $T^*$  модельно полна и следовательно теория  $T$  — совершенна. Тогда в силу критерия о совершенности йонсоновских теорий, получим, что  $E_T = ModT^*$ . Отсюда, так как  $T^*$   $\omega$ -категорична по условию, следует, что в  $E_T$  всего одна счетная модель с точностью до изоморфизма. Обозначим эту модель через  $D$ . Пусть  $A$  счетная не экзистенциально замкнутая произвольная модель теории  $T$  не изоморфная  $D$ . Тогда в силу индуктивности теории, модель  $A \Delta$ -продолжается в некоторую  $B$ , где  $B \in (E_T)^+$ . Так как рассматриваемая теория является йонсоновской, мы имеем, что  $(E_T)^+ \supseteq E_T$ . Покажем обратное включение. Из того, что  $T^*$  модельно полна в силу совершенности и так как  $E_T = ModT^*$ , следует, что любая модель теории  $T^*$  является простейшей, тогда  $T^*$  позитивно модельно полна. Тогда, по определению любая  $\exists$ -формула эквивалентна некоторой позитивной  $\exists$ -формуле. Следовательно,  $(E_T)^+ \subseteq E_T$ . Таким образом,  $(E_T)^+ = E_T$ . Тогда и в  $(E_T)^+$  только одна счетная модель с точностью до изоморфизма, то есть  $B \cong D$ . Тогда в  $B$  содержится  $\Delta$ -начало изоморфное  $A$ , что противоречит предположению о том, что  $A$  не изоморфно  $D$ . Таким образом,  $T\omega$ -категорична.

2)  $\Rightarrow$  1). Пусть  $T\omega$ -категорична. Предположим противное, то есть в  $ModT^*$  существуют две счетные неизоморфные модели. Обозначим их  $A$  и  $B$ . Так как  $T \subseteq T^*$ , то  $ModT^* \subseteq ModT$ ,

а следовательно, так как  $A$  и  $B$  из  $ModT^*$ , то получаем противоречие с  $\omega$ -категоричностью  $T$ .

Далее мы рассмотрим несчетно категоричные  $\Delta$ -J-теории, Дадим следующие определения из работы [7, с. 94].

Формула  $\phi(\bar{x})$  называется  $\Delta^+$ -формулой относительно теории  $T$ , если существуют позитивно - экзистенциальные формулы  $\psi_1(\bar{x})$  и  $\psi_2(\bar{x})$  такие, что  $T \models (\phi \leftrightarrow \psi_1)$  и  $T \models (\neg\phi \leftrightarrow \psi_2)$ .

Мы будем говорить, что теория  $T$  допускает  $R_1^+$ , если для любой позитивно экзистенциальной формулы  $\phi(\bar{x})$  совместной с  $T$  существует формула  $\psi(\bar{x}) \in \Delta^+$  совместна с  $T$  такая, что  $T \models \psi \leftrightarrow \phi$ .

Счетная модель теории  $T$  называется счетно-алгебраически универсальной моделью, если в неё  $\Delta$ -погружаются все счетные модели данной теории.

Модель  $A$  является  $\Delta$ -алгебраически простой моделью теории  $T$ , если  $A$  является моделью теории  $T$  и  $A$  может быть  $\Delta$ -погружена в каждую модель теории  $T$ .

$\Delta$ -J-теория называется универсальной если её аксиомы позитивно-универсальны.

Следующие результаты содержатся в [7, с. 233].

**Теорема 4.** Пусть  $T$  — универсальная теория полная для экзистенциальных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда  $T$  имеет алгебраически простую модель, которая  $(\Sigma, \Delta)$ -атомная.

**Теорема 5.** Пусть  $T \forall\exists$ -теория полная для экзистенциальных предложений, допускающая  $R_1$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $T$  имеет алгебраически простую модель,
- 2)  $T$  имеет  $(\Sigma, \Delta)$ -атомную модель,
- 3)  $T$  имеет  $(\Delta, \Sigma)$ -атомную модель,
- 4)  $T$  имеет  $\Delta$ -nice алгебраически простую модель,
- 5)  $T$  имеет единственную алгебраически простую модель.

где условие  $R_1$  следующее: если для любой экзистенциальной формулы  $\phi(\bar{x})$  совместной с  $T$  существует формула  $\psi(\bar{x}) \in \Delta$  совместна с  $T$  такая, что  $T \models \psi \leftrightarrow \phi$ , а формула  $\phi(\bar{x})$  называется  $\Delta$ -формулой относительно теории  $T$ , если существуют экзистенцио-

нальные формулы  $\psi_1(\bar{x})$  и  $\psi_2(\bar{x})$  такие, что  $T \models (\phi \leftrightarrow \psi_1)$  и  $T \models (\neg\phi \leftrightarrow \psi_2)$ .

Как следствие можно получить следующие результаты относительно  $\Delta$ -J-теории.

**Теорема 6.** Пусть  $T$  — универсальная  $\Delta$ -J-теория, полная для позитивных экзистенциальных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Пусть  $F$  фрагмент произвольного йонсоновского подмножества семантической модели  $T$ , который является универсальной  $\Delta$ -J-теорией.

Тогда  $T$  имеет  $\Delta$ -алгебраически простую модель, которая  $(\Sigma, \Delta^+)$ -атомная.

**Теорема 7.** Пусть  $F$  есть фрагмент, являющийся  $\Delta$ -J-теорией полной для позитивно экзистенциальных предложений, допускающая  $R_1$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $F$  имеет  $\Delta$ -алгебраически простую модель,
- 1)  $F$  имеет  $(\Sigma, \Delta^+)$ -атомную модель,
- 2)  $F$  имеет единственную  $\Delta$ -алгебраически простую модель.

Пусть  $A, B \in (E_T)^+$  и  $A \subsetneq B$ . Тогда  $B$  называется  $\Delta$ -алгебраически простым модельным расширением  $A$  в  $(E_T)^+$ , если для любой модели  $C \in (E_T)^+$  из того, что  $A$   $\Delta$ -погружается в  $C$  следует, что  $B$   $\Delta$ -погружается в  $C$ .

Следующий классический результат Морли из [8, с. 76] описывает  $\omega_1$ -категоричные теории на языке простых расширений.

**Теорема 8.**

Полная теория  $T$   $\omega_1$ -категорична тогда и только тогда, когда любая её счетная модель имеет простое собственное элементарное расширение.

Следующий результат является обобщением этой теоремы.

**Теорема 9.**

Пусть  $T$  — универсальная  $\Delta$ -J-теория полная для позитивных экзистенциальных предложений, для которой выполняется  $R_1^+$  и  $\Delta = B(At)$ . Пусть  $F$  фрагмент произвольного йонсоновского подмножества семантической модели  $T$ , который является универсальной  $\Delta$ -J-теорией и  $T^*$  её центр.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $T^*$   $\omega_1$ -категорична,

2. любая счетная модель из  $(E_F)^+$  имеет  $\Delta$ -алгебраически простое модельное расширение в  $(E_F)^+$ .

**Доказательство:**

1)  $\Rightarrow$  2) Если  $T^*$   $\omega_1$ -категорична, то она совершенна в силу теоремы Морли о несчетной категоричности. Тогда в силу критерия совершенности йонсоновской теории мы имеем, что теория  $T^*$  модельно полна и  $ModT^* = E_T$ . В этом случае следует, что  $E_F = (E_F)^+$ . Если теория  $T^*$  модельно полна, то любое  $\Delta$ -погружение является изоморфным вложением. А в силу модельной полноты  $T^*$  элементарным. Так как  $T^*$  — полная теория, то, применяя к ней вышеуказанную теорему 8, получаем требуемое.

2)  $\Rightarrow$  1) Обращаясь к семантической модели  $C$  теории  $T$  (она существует так как  $T$  — йонсоновская теория), получим, что модель  $C$  —  $\omega$ -универсальная. Её мощность, вообще говоря, больше чем счетная. Поэтому рассмотрим её счетную элементарную подмодель  $D$ . В силу того, что  $C$  экзистенциально замкнута, её элементарная подмодель  $D$  тоже экзистенциально замкнута. Отсюда имеем, что она счетно-алгебраически универсальна. Теперь остается применить теорему 8, согласно которой теория  $T$  имеет  $\Delta$ -алгебраически простую модель  $A_0$ . Определим по индукции  $A_{\delta+1}$ , которая будет  $\Delta$ -алгебраически простым модельным расширением модели  $A_\delta$  и  $A_\lambda = \cup \{A_\delta \mid \delta < \lambda\}$ . Тогда пусть  $A_\lambda = \cup \{A_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ . Предположим, что  $B \models T$  и  $card B = \omega_1$ . Для того чтобы показать, что  $B \approx A$ , разложим  $B$  в цепь  $\{B_\delta \mid \delta < \omega_1\}$  счетных моделей. В силу йонсоновости теории  $T$  это возможно. Определим функцию  $g : \omega_1 \rightarrow \omega_1$  и цепь  $\{f_\delta : A_{g_\delta} \rightarrow B_\delta \mid 0 < \delta < \omega_1\}$   $\Delta$ -погружений индукцией по  $\delta$ :

1.  $g0 = 0$  и  $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$ .
2.  $g\lambda = \cup \{g\delta \mid \delta < \lambda\}$  и  $f_\lambda = \cup \{f_\delta \mid \delta < \lambda\}$ .
3.  $f_{\delta+1}$  равна объединению цепи  $\{f_\delta^\gamma \mid \gamma < \rho\}$ , которая определяется индукцией по  $\gamma$ .
4.  $f_{\delta+1}^0 = f_\delta, f_{\delta+1}^\lambda = \cup \{f_{\delta+1}^\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ .

5. Предположим, что  $f_1^\gamma : A_{g\delta+\gamma} \rightarrow B_{\delta+1}$ . Если  $f_{\delta+1}^\gamma$  – отображение на, то  $\rho = \gamma$ . В противном случае в силу  $\Delta$ -алгебраической простоты  $A_{g\delta+\gamma+1}$  можно продолжить  $f_{\delta+1}^\gamma$  до  $f_{\delta+1}^{\gamma+1} : A_{g\delta+\gamma+1} \rightarrow B_{\delta+1}$ .

$$6. \quad g(\delta+1) = g\delta + \rho.$$

Ясно, что  $f = \bigcup \{f_\delta \mid \delta < \omega_1\}$  отображает ( $\Delta$ -погружает)  $A$  в  $B$ . Так как  $B$  — произвольная модель теории  $T$ , а  $A$  — единственная  $\Delta$ -алгебраически простая и позитивно экзистенциально замкнутая модель в силу условия и построения, то отсюда следует, что  $(E_F)^+$  в несчетной мощности имеет единственную модель, значит семантическая модель теории  $T$  насыщена, то есть йонсоновская теория  $T$  совершенна. Отсюда следует, что  $ModT^* = (E_F)^+$ . Следовательно,  $T^*$  —  $\omega_1$ -категорична.

### Список литературы:

1. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории. (учебное пособие). Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.
2. Дж. Сакс. Теория насыщенных моделей. М.: Мир, 1976. — 192 с.
3. Справочная книга по математической логике: В 4-х частях/Под ред. Дж. Барвайса. Ч. 1. Теория моделей: пер. с англ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982, — 126 с.
4. Macintyre A.. Model-completeness for sheaves of structures. *Fundamenta Mathematicae*, vol. 81 (1973). — pp. 73—89.
5. Baldwin J.T. Kueker D.W. Algebraically prime models. *Ann. Math. Logic*. 1981, 20. — p. 289—330.
6. Itay Ben-Yaacov. Positive model theory and compact abstract theories. *Journal of Mathematical Logic* 3 (2003), № 1. — pp. 85—118.
7. Itay Ben-Yaacov. Compactness and independence in non first order frameworks. *Bulletin of Symbolic logic*, volume 11 (2005), № 1. — pp. 28—50.
8. Saracino D. Model companion for  $\omega$ -categorical theories// *Proc. Amer. Math. Soc.*, — 1973, — № 39, — P. 591—598.
9. Volker Weispfenning. The model-theoretic significance of complemented existential formulas. *The Journal of Symbolic Logic*, Volume 46, Number 4, Dec. 1981. — pp. 843—849.



## СЕКРЕТ «ТРУДНОЙ ЗАДАЧИ»

*Мамедяров Даглар Мамедярович*

*канд. пед. наук, «Социально – педагогический институт»,  
РФ, г. Дербент*

## THE SECRET OF “A CHALLENGING TASK”

*Daglar Mamedyarov*

*candidate of Pedagogical Sciences, “Social Pedagogical Institute”,  
Russia, Derbent*

### АННОТАЦИЯ

В статье Секрет «Трудной задачи» автор рассматривает особенности чисел ряда Рачинского и аналогичных последовательностей.

### ABSTRACT

In the article the secret of "a challenging task" the author examines the characteristics of Rachinskiy's sequence of numbers and similar sequences.

**Ключевые слова:** Рачинский4 последовательности.

**Keywords:** Rashinskiy; sequences.

В конце XIX века живописец-жанрист Н.Б. Богданов-Бельский (1868—1945) написал картину «Трудная задача». Мало кто из видевших эту картину вникал в содержание той «трудной задачи», которая на ней изображена. На ней изображена группа учеников сельской школы, задумавшихся над решением в «уме» задачи С.А. Рачинского, профессора естественных наук, покинувшего университетскую кафедру, чтобы сделаться рядовым учителем сельской школы. Талантливый педагог культивировал в своей школе устный счет, основанный на виртуозном использовании свойств чисел. На доске написано:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

Действительно, нелегкая задача для быстрого решения в «уме», если не знать «секрета». А «секрет» очень прост. Дело в том, что  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$  и  $13^2 + 14^2 = 365$ . Следовательно, искомый ответ 2.

Обратим внимание на другое. Из сопоставления выше написанных равенств следует, что  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ , то есть сумма квадратов нескольких последовательных чисел, равна сумме квадратов следующих чисел. Число слагаемых в левой части равенства только на одно больше, чем в правой. (Заметим, что  $3^2 + 4^2 = 5^2$ ).

Алгебра дает нам средство поставить вопрос об этой интересной особенности ряда чисел более широко:

1. Имеются ли, кроме чисел 3 и 4, другие два последовательные числа, сумма квадратов которых была равна квадрату следующего за ними числа, а кроме чисел 10, 11, 12, другие три последовательных числа, сумма квадратов которых была бы равна сумме квадратов двух непосредственно за ними следующих чисел?

2. Можно ли образовать равные суммы квадратов последовательных натуральных чисел, состоящие из четырех и трех слагаемых, из пяти и четырех слагаемых и вообще из  $n + 1$  и  $n$  возрастающих слагаемых? [1. с. 198].

Ответ на эти вопросы можно найти в решении такой вполне доступной задачи:

Найти  $n + 1$  последовательных чисел, сумма квадратов которых равна сумме квадратов следующих  $n$  чисел. Обозначив через  $x$  первое из искомым чисел, имеем уравнение:  $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$ . Раскрыв скобки и сделав упрощение, получаем  $x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$  или  $x^2 - 2x - 3 = 0$ . Отсюда  $x = 1 \pm \sqrt{1 + 3}$ ,  $x_1 = 1 + 2 = 3$ ,  $x_2 = 1 - 2 = -1$ .

Получаем два ряда чисел, обладающих требуемым свойством: 3, 4, 5, и -1, 0, 1.

В самом деле  $3^2 + 4^2 = 5^2$  и  $(-1)^2 + 0^2 = 1^2$ .

Теперь решим такое уравнение  $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x + 4)^2$ . Имеем:  $x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16$  или

$x^2 - 8x - 20 = 0$ . Отсюда  $x = 4 \pm \sqrt{16 + 20} = 4 \pm 6$ ,  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = -2$ . Существует два ряда чисел, обладающих требуемым свойством; ряд Рачинского 10, 11, 12, 13, 14 и ряд -2, -1, 0, 1, 2. В самом деле  $(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2$ .

Рассмотрим уравнение  $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 = (x + 4)^2 + (x + 5)^2 + (x + 6)^2$ . Раскрыв скобки получаем:

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 8x + 16 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 12x + 36 \quad \text{или} \quad x^2 - 18x - 69 = 0. \quad x = 9 \pm \sqrt{81 + 63} = 9 \pm 12,$$

$x_1 = 21, x_2 = -3$ . Имеем два ряда чисел; 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 и -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$  и  $(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$ . На два первых вопроса получили утвердительный ответ. Как уже заметили, эти последовательности являются арифметическими прогрессиями с разностью 1. Возникает вопрос: существуют ли другие последовательности с разностью 2, 3, 4, и т. д., обладающие требуемым свойством?

Решим уравнение  $x^2 + (x + d)^2 = (x + 2d)^2$ .

$$x^2 + x^2 + 2dx + d^2 = x^2 + 4dx + 4d^2, \quad x^2 - 2dx - 3d^2 = 0.$$

$$x = d \pm \sqrt{d^2 + 3d^2} = d \pm \sqrt{4d^2} = d \pm 2d, \quad x = 3d, \quad x = -d.$$

Если  $x = 3d, d = 1, x = 3$ . Имеем ряд 3, 4, 5:  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

$d = 2, x = 6$ . Имеем ряд 6, 8, 10:  $6^2 + 8^2 = 10^2$ .

$d = 3, x = 9$ . Имеем ряд 9, 12, 15:  $9^2 + 12^2 = 15^2$ .

$d = 4, x = 12$ . Имеем ряд 12, 16, 20:  $12^2 + 16^2 = 20^2$  и т. д.

Если  $x = -d, u x = 1$ , тогда имеем 1, 0, -1:  $1^2 + 0^2 = (-1)^2$ .

$x = 2, d = -2$ , тогда имеем 2, 0, -2:  $2^2 + 0^2 = (-2)^2$ .

$x = -4, d = 4$ , тогда имеем -4, 0, 4:  $(-4)^2 + 0^2 = 4^2$  и т. д.

Рассмотрим такое уравнение:

$$x^2 + (x + d)^2 + (x + 2d)^2 = (x + 3d)^2 + (x + 4d)^2.$$

Имеем:

$$x^2 + x^2 + 2dx + d^2 + x^2 + 4dx + 4d^2 = x^2 + 6dx + 9d^2 + x^2 + 8dx + 16d^2$$

Или

$$x^2 - 8dx - 20d^2 = 0, \quad x = 4d \pm \sqrt{16d^2 + 20d^2} = 4d \pm \sqrt{36d^2} = 4d \pm 6d,$$

$$x_1 = 10d, \quad x_2 = -2d.$$

Если  $d = 2$ , имеем  $x_1 = 20d, x_2 = -4$ .

Тогда имеем ряды 20, 22, 24, 26, 28 и -4, -2, 0, 2, 4.

$$20^2 + 22^2 + 24^2 = 26^2 + 28^2, \quad (-4)^2 + (-2)^2 + 0^2 = 2^2 + 4^2.$$

На этот вопрос мы тоже можем ответить утвердительно. Существует бесконечное множество последовательностей, отвечающих требуемому условию.

Теперь поставим такой вопрос. Существуют ли последовательности обладающие таким же свойством, где в левой части количество слагаемых больше чем в правой на 2, 3, 4 и т.д.?

Тогда наши уравнения в общем виде выглядят таким образом:

$$\underbrace{(x + d)^2 + (x + 2d)^2 + (x + 3d)^2 + \dots + (x + nd)^2}_{n \text{ слагаемых}} =$$

$n$  слагаемых

$$= \underbrace{(x + nd + 1)^2 + (x + nd + 2)^2 \dots *}_{m \text{ слагаемых}}$$

$m$  слагаемых, где  $n - m > 1$ .

Решая и анализируя много уравнений я установил, что коэффициенты квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , к которому приводится данное уравнение, имеют следующий вид:  $a = n - m$ ,  $b = 4C_{n+1}^2 - 2C_{2n-a+1}^2$ ;

$C = \frac{C_{2n+2}^3}{2} - \frac{C_{4n-2a+2}^3}{4}$ . Это для последовательности, где  $d = 1$ .

В общем виде:

$$a = n - m, \quad b = d(4C_{n+1}^2 - 2C_{2n-a+1}^2), \quad C = d^2 \left( \frac{C_{2n+2}^3}{2} - \frac{C_{4n-2a+2}^3}{4} \right).$$

По этим формулам мы легко можем составить квадратное уравнение для любых  $n, a, d$ .

Составим несколько уравнений для  $a = 1, d = 1, 2, \dots$

Пусть  $n = 2$ . Тогда  $b = 1 \cdot (4C_3^2 - 2C_4^2) = 12 - 2 \cdot 6 = 0$ .

$C = 1 \cdot \left( \frac{C_6^3}{2} - \frac{C_8^3}{4} \right) = 10 - 14 = -4$ . Получаем уравнение  $x^2 - 0 \cdot x - 4 = 0$ .

$x^2 - 4 = 0$ . Если  $d = 2, b = 0, C = -16$ . Уравнение имеет вид  $x^2 - 16 = 0$ .

Если  $d = 3, b = 0, C = -36$ . Уравнение принимает вид  $x^2 - 36 = 0$  и т.д.

Пусть  $n = 3$ . Тогда  $b = 4C_4^2 - 2C_6^2 = 24 - 30 = -6$ .

$C = \frac{C_8^3}{2} - \frac{C_{12}^3}{4} = \frac{56}{2} - \frac{220}{4} = 28 - 55 = -27$ . Уравнение принимает вид

$$x^2 - 6x - 27 = 0.$$

Пусть  $n = 4$ . Тогда  $b = 4C_5^2 - 2C_8^2 = 40 - 56 = -16$ .

$$C = \frac{C_{10}^3}{2} - \frac{C_{16}^3}{4} = \frac{56}{2} - \frac{220}{4} = 60 - 140 = -80. \text{ Уравнение имеет вид } x^2 - 16x - 80 = 0.$$

Пусть  $n = 5$ . Тогда  $b = 4C_6^2 - 2C_{10}^2 = 60 - 90 = -30$ .

$$C = \frac{C_{12}^3}{2} - \frac{C_{20}^3}{4} = 110 - 285 = -175. \text{ Уравнение принимает вид } x^2 - 30x - 175 = 0.$$

Дискриминанты этих квадратных уравнений при любых  $n$  и  $d$  и  $a = 1$  являются точными квадратами. Составим несколько уравнений при  $a > 1$ .

Пусть  $a = 2, n = 4, m = 2, d = 1$ .

Найдем  $b$  и  $C$ .  $b = 4C_5^2 - 2C_7^2 = 40 - 42 = -2$ .

$$C = \frac{C_{10}^3}{2} - \frac{C_{14}^3}{4} = 60 - 91 = -31. \text{ Уравнение принимает вид } 2x^2 - 2x - 31 = 0.$$

Пусть  $a = 2, n = 5, m = 3$ . Тогда  $b = 4C_6^2 - 2C_9^2 = 60 - 72 = -12$ .

$$C = \frac{C_{12}^3}{2} - \frac{C_{18}^3}{4} = 110 - 204 = -94. \text{ Уравнение принимает вид } 2x^2 - 12x - 94 = 0.$$

Составим уравнение при  $a = 3$ , пусть  $n = 4, m = 1$ .

тогда  $b = 4C_5^2 - 2C_6^2 = 40 - 30 = 10$ .

$$C = \frac{C_{10}^3}{2} - \frac{C_{12}^3}{4} = 60 - 55 = 5. \text{ Уравнение принимает вид } 3x^2 + 10x + 5 = 0.$$

пусть  $n = 5$ , тогда  $b = 4C_6^2 - 2C_8^2 = 60 - 56 = 4$ .

$$C = \frac{C_{12}^3}{2} - \frac{C_{16}^3}{4} = 110 - 140 = -30. \text{ Уравнение принимает вид } 3x^2 + 4x - 30 = 0.$$

Заметим, что при любых  $d > 1$  уравнение имеет вид  $ax^2 - bdx - cd^2 = 0$ .

Уравнения получаемые при  $d > 1$  не имеют решения в целых числах. Вернее, мне не удалось найти уравнение, где дискриминант был бы точным квадратом.

Существуют ли последовательности, где число слагаемых в левой части больше числа слагаемых в правой на 2 и 3 и т. д., и обладающим вышеуказанным свойством? Этот вопрос остается открытым.

Теперь рассмотрим последовательности, получаемые при  $a = 1$ .

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 10^2 + 11^2 + 12^2 &= 13^2 + 14^2 \\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 &= 25^2 + 26^2 + 27^2 \\ 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 &= 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 \end{aligned}$$

Эта пирамида обладает интересными свойствами.

1. Разность сумм слагаемых в левой и правой частях равна половине числа, равноудаленного от концов последовательности  $3 + 4 - 5 = \frac{4}{2} = 2$ ;  $10 + 11 + 12 - 13 - 14 = \frac{12}{2} = 6$  и т. д.

2. Число в середине последовательности равно удвоенному произведению числа слагаемых в левой и правой частях.

3. Сумма чисел в середине двух соседних последовательностей пирамиды является точным квадратом.

4. Дискриминанты уравнений, получаемых при  $a = 1, d = 1$  являются точными квадратами и равны квадрату удвоенного треугольного числа  $2C_n^2$ , то есть квадрату половины числа в середине последовательности.

«Секрет» Трудной задачи поставил перед нами еще более трудную задачу: при каких натуральных  $a$  и  $n$ , число

$D = d^2(2C_{n+1}^2 - 2C_{2n-a+1}^2)^2 - ad^4 \frac{C_{2n+2}^3}{2} - \frac{C_{4n-2a+2}^3}{4}$  является точным квадратом?

### Список литературы:

1. Перельман Я.Н. Занимательная алгебра. М.: АСТ; Астрель; Аст М., 2009 — с. 289.

## СЕКЦИЯ 2.

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

#### 2.1. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

#### СЦЕНАРНАЯ МОДЕЛЬ НОВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ ВУЗА В ЦЕЛОМ

*Сироткин Григорий Вячеславович*

*аспирант*

*Астраханского государственного технического университета,*

*РФ, г. Астрахань*

*E-mail: [sgv.astr@yandex.ru](mailto:sgv.astr@yandex.ru)*

#### THE SCENARIO MODEL OF THE NEW SYSTEM OF QUALITY MANAGEMENT OF EDUCATION OF THE UNIVERSITY AS A WHOLE

*Sirotkin Grigoriy*

*postgraduate of Astrakhan State Technical University,*

*Russia, Astrakhan*

#### АННОТАЦИЯ

В данной статье описана и представлена сценарная модель новой системы управления качеством образования вуза в целом.

#### ABSTRACT

This article describes and presents the scenario model of the new education quality management system of the University as a whole.

**Ключевые слова:** сценарная модель; новая система управления; качество образования вуза.





Анализ сценарной модели новой системы управления показал, что часть факторов блоков не влияют напрямую на получение знаний обучающимся. Тем не менее, они направлены на обеспечение условий получения знаний, а значит и на качество знаний. Они дополняют друг друга и образуют систему, направленную на обеспечение общей цели — обеспечение качества образования (знаний, умений и практических навыков).

Блоки обеспечивающих факторов сценарной модели новой системы управления не влияют друг на друга. Они разделены для решения определенных конкретных задач в системе. Факторы обеспечения знаний и условий, также не влияют друг на друга в блоках, а напрямую воздействуют на целевые факторы блоков, составляющие ядро системы. При этом, в системе нет длинных векторов управляющих воздействий на целевые факторы. Это обеспечивает устойчивость системы и стабилизирует её в целом.

Ослабление факторов знаний и условий не влияет на объем предоставляемых вузом знаний, но влияет на их качество, снижая его до полного отсутствия, что может привести к прекращению образовательной и даже всей деятельности вуза. Например: недостаточное финансирование или его отсутствие, недостаточная инфраструктура или её отсутствие, недостаточное количество преподавателей, обучающихся или их отсутствие и т. д. Предоставляя приоритет одним, вторые могут дестабилизировать систему. Поэтому необходимо уделять должное внимание всем факторам системы, выбирая из них приоритеты, исходя из их состояния на определенный момент и доли влияния на систему. Только при таком подходе система будет сбалансирована.

Для детального анализа сценариев развития системы, перейдем к решению прямой задачи — составим прогноз развития ситуации (управлений) с выбранным комплексом мероприятий по каждому из пяти вышеперечисленных управляющих блоков.

*Первый блок факторов* — образовательная программа включает в себя всю образовательную деятельность вуза по конкретной специальности. Поэтому прописанные в ней положения должны соответствовать: действующим правовым нормам (17); международным (1), европейским (2), национальным (3), сертификационным (4), профессиональным (5), корпоративным (6) стандартам, безопасности жизнедеятельности (18). А поскольку образовательная деятельность растянута во времени, то образовательная программа и факторы её обеспечения должны периодически обновляться (37), чтобы соответствовать текущему времени.

Для обеспечения востребованности обучающихся на производственные практики, а выпускников на рынке труда, необходимо чтобы в составлении и обновлении образовательной программы принимали участие: практические работники (27), а также сотрудники (8), профессорско-преподавательский состав (7), сотрудники и профессорско-преподавательский состав иностранных вузов (22), т.е. специалисты в этой области. Участие иностранных специалистов необходимо для сближения образовательных программ по специальности с иностранными вузами партнерами, с целью обеспечения востребованности выпускников не только в России, но и за рубежом. При этом, образовательная программа должна отвечать современным достижениям науки (23).

Образовательная программа — это набор знаний и порядок их преподавания. Если она не будет соответствовать национальным и сертификационным стандартам, то вуз не получит лицензию на право осуществления образовательной деятельности. Значит, не сможет заниматься образовательной деятельностью, а в случае не устранения недостатков, подлежит ликвидации. Также, если вуз не будет внедрять международные и европейские стандарты, то его выпускники не будут востребованы на международном рынке труда и их использование будет ограничено национальным рынком труда, что снизит престиж вуза и повлечет потерю абитуриентов (обучающихся) и доходы со всеми вытекающими из этого последствиями. Кроме этого, если образовательная программа не будет учитывать профессиональные стандарты, то востребованность выпускников вуза будет низкой. Поскольку организациям необходимо будет вкладывать средства в их переобучение. При таких обстоятельствах, вуз может не выдержать конкуренции на образовательном рынке и рынке труда, а его деятельность может быть прекращена. Не менее важны и корпоративные стандарты. Поскольку они выделяют выпускников вуза среди выпускников других вузов определенным набором знаний, умением их предъявить, реализовать на практике, а также определенной манерой поведения, что не менее важно.

В составлении образовательной программы должны принимать участие именно специалисты в этой области. Значит их нужно готовить именно для этих целей и обновлять их знания постоянно.

Необходимо проводить сопоставление образовательных программ и их сближение на взаимовыгодных, партнерских условиях, как с национальными, так и иностранными вузами. При этом, содержание образовательной программы и действия участников её разработки должны соответствовать правовым нормам, а условия

должны соответствовать требованиям безопасности. Если мы снизим качество указанных факторов, то образовательная программа будет иметь больше недостатков.

*Второй блок факторов* направлен на обеспечение качества образовательного процесса. Вида деятельности вуза, который направлен на передачу основных знаний от профессорско-преподавательского состава (7) к обучающемуся (10) с помощью сотрудников (8). Однако этого не достаточно. Для нормальной образовательной деятельности, вуз должен иметь достаточную материально-техническую базу (20), а при её недостаточности и ненадлежащем состоянии, должен это обеспечить через строительную деятельность (29), например: путем нового строительства, реконструкции имеющихся помещений, капитального и текущего ремонтов либо путем аренды. Также, для качественной передачи знаний обучающемуся, необходимо отвечающее современным достижениям науки (23) надлежащее научно-методическое обеспечение (21), информационный ресурс (33), обладающие достаточными знаниями сотрудники (8), профессорско-преподавательский состав (7), в том числе из практических работников (27) и иностранных преподавателей (22). При этом, образовательный процесс должен быть безопасен (18) и соответствовать правовым нормам (17). А поскольку знания и практические навыки передаются в течении определенного длительного времени, то все перечисленные элементы должны обновляться (37), чтобы соответствовать времени.

*Третий блок факторов* направлен на обеспечение качества внеучебной деятельности (14). Это продолжение образовательного и воспитательного процесса во внеурочное время. И для его обеспечения, также необходимы специалисты в этой области, т.е сотрудники (8), профессорско-преподавательский состав (7), в том числе из практических работников(27), иностранные специалисты и преподаватели (22).

Во внеучебное время обучающийся (10) повышает свой профессиональный уровень: занимаясь научной деятельностью (23), получая дополнительное образование (13) на основе современного научно - методического обеспечения (21), используя информационный ресурс (33) и материально-техническую базу (20) общую либо предназначенную для этих целей. Работая в организациях в период обучения (27), обучающийся получает практические навыки, новые знания либо закрепляет ранее полученные в вузе знания в процессе профессиональной деятельности. Это важно. Поскольку после окончания вуза молодого специалиста не нужно будет переучивать,

как сегодня это имеет место. Также, в период внеучебной деятельности, как в вузе, так и вне его, должны исполняться правовые требования и обеспечиваться безопасность жизнедеятельности (18). При этом, внеучебная деятельность должна соответствовать времени, а при несоответствии, она должна быть приведена в соответствие требованиям времени (37).

Снижение качества факторов, сначала повлечет снижение качества знаний, потом потерю престижа вуза, его конкурентоспособности, к росту безработных выпускников на рынке труда и к потере затраченных на эти цели средств, в том числе бюджетных.

Если снижать качество данных групп факторов системы до конца в любой последовательности, то это приведет к снижению знаний до их отсутствия, а при разрыве связи преподаватель-обучающийся, продолжение образовательной деятельности станет невозможно. Стсюда следует, что факторам профессорско-преподавательский состав (7) и обучающийся (10) должно быть повышенное внимание. Другие факторы в этих группах способствуют передаче и получению знаний, создают для этого условия и являются не менее важными. Поэтому обеспечить качественное образование возможно только при обеспечении качества всех элементов системы. Для этого обучающиеся должны широко вовлекаться в научную, инновационную и практическую деятельность. Должна поощряться международная и партнерская деятельности, обмен обучающимися, преподавателями, специалистами, а также программами, лекциями, практикой и т. д. Сотрудники и профессорско-преподавательский состав должны постоянно повышать свой профессиональный уровень, а обучающиеся заниматься самообразованием и самоконтролем. Материально-техническая и научно-методическая базы, информационный ресурс обновляться и т. д. Только таким образом можно обеспечить надлежащее качество образования. В противном случае, мы получим обратный результат.

*Четвертый блок факторов* направлен на обеспечение финансовой стабильности вуза (28). Для ведения нормальной образовательной деятельности необходимо иметь доходы достаточные для этого. Но чтобы получить доход, необходимо товар (образовательную программу) продать потребителю-абитуриенту (9). Но чтобы о товаре стало известно потребителям, информацию о нем необходимо до них донести т.е. провести рекламную кампанию через информационную деятельность (25) и издательскую деятельность (26), обеспечив маркетинг образовательных услуг (31).

Рынок образовательных услуг давно вышел за пределы национальных границ, и любой вуз сегодня действует в условиях жесткой международной конкуренции. Значит для привлечения иностранных абитуриентов для обучения в вузе и обеспечения конкурентоспособности вуза на международном образовательном рынке, необходимо информацию об образовательных услугах донести и на международный рынок, в том числе через международную деятельность (22).

От количества поступивших абитуриентов — будущих обучающихся (10), зависит доход вуза (28) и его нормальная образовательная деятельность. Поэтому, чем больше обучающихся, тем больше доход и наоборот. Чем больше конкурс, тем больше цена и наоборот. Чем больше конкурс, тем лучше качество абитуриентов, а значит обучающихся и выпускников. Поэтому цена должна покрывать издержки, приносить доходы и не снижать конкурс.

Основной доход вуза формируется за счет бюджетных и коммерческих мест. При недостаточности средств по причине недобора обучающихся, недостаточного государственного финансирования либо того и другого, для продолжения осуществления в полном объеме своей основной уставной деятельности, необходимы дополнительные доходы, источниками которых может быть иная деятельность вуза, а именно: научная (23), инновационная (24), международная (22), издательская (26), коммерческая (13) и другая. Также, увеличение доходов может быть за счет экономии денежных средств путем снижения издержек, энергоэффективности и энергосбережения (32). Возможно получение дополнительных денежных средств за счет инвестиций, грантов, кредитов и других источников. Естественная убыль обучающихся, также влияет на доходы вуза и их количество в сторону уменьшения, в связи с уменьшением их числа. Поэтому для восполнения доходов и увеличения выпуска необходимо увеличение набора до величины естественной убыли, проведение донаборов на эту же величину, либо обеспечение дополнительных доходов. Имея возможность увеличить доход, вуз может позволить себе увеличить расходы на улучшение условий оказания образовательных услуг. При этом, выбор приоритетов расходования денежных средств (19) позволят вузу более эффективно их использовать. Если снижать качество данной группы факторов системы, то это приведет к уменьшению доходов, ухудшению нормальной образовательной деятельности, а значит и качества образования до его отсутствия и прекращения всей деятельности вуза.

*Пятый блок факторов* направлен на проверку знаний, умений и практических навыков (далее знаний) на определенных вузом этапах обучения, а также помощи в получении практических навыков и трудоустройстве обучающимся и выпускникам.

Знания обучающегося на каждом этапе обучения должны проверяться через контрольные опросы и работы, промежуточные, переводные и выпускные экзамены (35), чтобы знать его уровень подготовки и своевременно принять меры к его повышению либо отчислению обучающегося из вуза, тем самым подвергнув наказанию за неуспеваемость одних, мотивируем к повышению знаний других. При этом, обучающийся (10) тоже должен сам проверять свои знания (36) и уровень подготовки, а вуз должен ему обеспечить возможность самостоятельно провести контрольное тестирование своих знаний. Если вуз и обучающийся, к этому подойдут серьезно, то уровень знаний обучающегося значительно будет выше. Только после проверки знаний и положительной аттестации, обучающийся может быть переведен на следующий этап обучения, либо допущен к производственной или к преддипломной практике (15). При этом, практика должна проходить большее время проходить в организации партнеров (27) либо в инновационных организациях вуза (24), чтобы обучающиеся не просиживали время в вузе, а нарабатывали практические навыки на будущих возможных рабочих местах, и им не пришлось после окончания вуза проходить переобучение. Кроме этого, для обеспечения высокого уровня трудоустройства, вуз должен проводить мониторинг рынка образовательных услуг и труда (34), чтобы знать уровень востребованности выпускающих специальностей и наличия вакансий. Также вуз должен оказывать помощь выпускникам в их трудоустройстве (16), чтобы знать уровень спроса на выпускников и своевременно принять меры к повышению своей конкурентоспособности.

Новая система управления включает в себя количество элементов, достаточное для обеспечения качества деятельности и образование вуза в целом. Ухудшая состояние элементов (факторов) по блокам системы, мы дестабилизируем систему, что, в конечном счете, приведет к снижению знаний обучающихся и выпускников. Только в обеспечении качества всех элементов системы, можно добиться высокого качества деятельности и образования вуза.

При этом, как показали исследования новой системы управления, требуемое (целевое) состояние системы **будет достигнуто если:**

1. Знания, умения и практические навыки абитуриента достаточны для освоения образовательной программы.

2. Обучающийся добросовестно будет относиться к обучению, освоит учебные дисциплины и выполнит учебный план в полном объеме.

3. Вуз обеспечит качество образования.

4. Вуз обеспечит мотивацию обучающегося на обучение.

Изложенные нами обстоятельства и приведенные доводы соответствуют положению дел в вузах, что подтверждает их реальность, возможность реализации на практике, а значит работоспособность предлагаемой новой системы управления.

Когнитивная модель новой системы управления нами была преобразована в сценарную модель. Поэтому по результатам данного этапа исследования была сформирована уточненная когнитивная матрица весов, содержащая усредненные оценки интенсивности влияний в виде таблицы 1, которая содержит более точные данные. При этом, пробелы в таблице 1 указывают на исключенные излишние взаимосвязи между элементами системы.

Каждый фактор системы носит общий характер, что не дает возможности определить его конкретное состояние на каком-то отрезке времени. Поэтому, для обеспечения работоспособности системы нужны индикаторы оценки и контроля состояния факторов, влияющих на качество образования вуза в целом, механизмы определения состояния системы на определенный момент с целью определения отклонений и принятия управленческих решений для возврата их в требуемое состояние для обеспечения сбалансированности системы.

Таким образом, на следующем этапе исследований актуальной задачей является задача создания методики формирования системы оценки и определения состояния качества образования вуза в целом, позволяющей сформировать систему оценки и производить расчет отклонений качества образования вуза в целом, и на этой основе выполнять анализ состояния качества образования. Результаты исследований будут представлены позже.

Таблица 1.

Уточненная когнитивная матрица весов новой системы управления качеством образования вуза в целом

№п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22	0	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0	0	0,7	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,4	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0		
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,4	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	
27	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0,3	0,3	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0
37											0,7	0,7																									0	0	



*Новизна исследований* заключается в том, что нами впервые представлена сценарная модель системы управления качеством образования вуза в целом на основе нечетко-когнитивного моделирования.

*Практическая значимость* заключается в том, что модель может быть использована любым типом вуза, поскольку она является общей.

### **Список литературы:**

1. Сироткин Г.В. Сценарная модель ядра новой системы управления качеством образования вуза в целом // Г.В. Сироткин // «Естественные и математические науки в современном мире»: сборник статей по материалам XX международной научно-практической конференции (02 июля 2014 г.). — 2014. — № 7 (19). — С. 6—17.

## **2.2. АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ И ПРОИЗВОДСТВАМИ**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СОПРОВОЖДЕНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**

*Деменкова Екатерина Алексеевна*

*канд. техн. наук, доцент САФУ им. М.В. Ломоносова,  
РФ, г. Архангельск  
E-mail: [e.demenkova@narfu.ru](mailto:e.demenkova@narfu.ru)*

*Бобров Дмитрий Александрович*

*студент САФУ им. М.В. Ломоносова,  
РФ, г. Архангельск  
E-mail: [dmitry.b@live.com](mailto:dmitry.b@live.com)*

### **SIMULATION OF SUPPORT ACTIVITIES OF EDUCATIONAL INSTITUTIONS**

*Ekaterina Demenkova*

*candidate of engineering sciences, associate professor of NArFU,  
Russia, Arkhangelsk*

*Dmitry Bobrov*

*student of NArFU,  
Russia, Arkhangelsk*

#### **АННОТАЦИЯ**

Предложена математическая модель процессов сопровождения деятельности образовательного учреждения, разработанная на основе аппарата теории полихроматических множеств.

#### **ABSTRACT**

A mathematical model of the processes support the activities of the educational institution, developed on the basis of the theory of polychromatic sets.

**Ключевые слова:** математическая модель; производственные процессы; теория полихроматических множеств.

**Keywords:** mathematical model; production processes; the theory of polychromatic sets.

Для повышения эффективности функционирования любой организации на современном этапе развития науки и техники применяется автоматизация производственных процессов. Применение таких систем позволяет автоматизировать процесс поддержки принятия решений в различных ситуациях, избавляет сотрудников от выполнения рутинных операций, упрощает ведение учета, хранения и обработки данных различной природы, организует внутренний документооборот, автоматизирует выполнение расчетов, формирование отчетов и многое другое.

Особенностью автоматизации процессов в сфере образования является тот факт, что среди образовательных учреждений, помимо университетов, колледжей и образовательных школ, существуют различные специализированные учебные заведения, учреждения дополнительного образования. К разным видам учреждений требуется индивидуальный подход с изучением соответствующей нормативной базы, а так же рассмотрение внутренних и внешних потоков информации, применение современных подходов проектирования систем. Использование же автоматизированных систем позволяет повысить качество предоставляемых услуг сотрудниками детских образовательных центров (ДОЦ), сократит риск появления ошибок.

Для моделирования информационных процессов сопровождения деятельности образовательного центра выберем аппарат теории полихроматических множеств.

При математическом моделировании производственных процессов сопровождения деятельности образовательного учреждения разрабатывается производственная система  $P$ , которая состоит из двух составляющих:

- системы технологических операторов, характеризующих производственные процессы (процессы документооборота и др.);
- системы информационных объектов, включающих данные, необходимые для реализации технологических операторов.

На теоретико-множественном уровне состав технологических операторов и их свойств представляются множествами этих элементов и их персональных цветов. Свойства производственной системы в целом представляются множеством унитарных цветов. Множества технологических операторов, их персональных цветов и унитарных

цветов моделируют структуру производственного процесса. Так, состав элементов технологического процесса системы сопровождения деятельности образовательного учреждения описывается множеством

$$T = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_n), \quad (1)$$

где элементы множества описывают операции технологического процесса сопровождения деятельности образовательного учреждения в системе. Такими операциями, например, являются формирование групп, подготовка договора и др.

Информационные объекты, необходимые для реализации процессов сопровождения деятельности образовательного учреждения, описываются множеством  $\Pi$ , множеством их персональных цветов

$$\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_j, \dots, \pi_m) \quad (2).$$

Для процессов представленной системы, элементами множества  $\Pi$  будут персональные данные обучающегося, данные законного представителя обучающегося, выбранное объединение и др.

Полный состав элементов системы сопровождения деятельности образовательного учреждения описывается множеством

$$P = T \cup \Pi \quad (3).$$

Отношения смежности, порядка или иерархической подчиненности между элементами всей технологической системы  $P$  описываются с помощью булевой матрицы  $[P \times P]$ , которая представляется в виде блочной матрицы

$$[P \times P] = \begin{matrix} & \begin{matrix} T & \Pi \end{matrix} \\ \begin{matrix} T \\ \Pi \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} [T \times T] & [T \times \Pi] \\ \hline [ \Pi \times T ] & [ \Pi \times \Pi ] \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} T \\ \Pi \end{matrix} \quad (4)$$

В этой матрице блоки  $[T \times T]$  и  $[\Pi \times \Pi]$  описывают бинарные отношения между элементами одного множества, задающего технологические операции сопровождения деятельности образовательного учреждения  $T$  или информационные объекты  $\Pi$ . Блоки  $[T \times \Pi]$  и  $[\Pi \times T]$  описывают бинарные отношения между  $t_i \in T$  и  $\pi_j \in \Pi$ , т. е.

определяют необходимые для процесса сопровождения информационные объекты и наоборот.

Для установления отношений и связей между свойствами модели производственной системы сопровождения деятельности образовательного учреждения  $P$  используется пространство контуров  $F$ , единой для всех элементов машины и производственной системы контроля.

$$F = (F_1, \dots, F_N), \forall F(A_i), F(P) (F(A_i), F(P) \subseteq F) \quad (5)$$

Пространство контуров  $F$  представляется как булево векторное пространство, в котором составы контуров технологических операторов модели сопровождения деятельности образовательного учреждения и других элементов производственной системы представлены булевыми векторами в пространстве (5). Составы контуров технологических операторов и информационных объектов представляются матрицами контуров

$$\| c_{i(j)} \|_{T, F(T)} = [T \times F(T)], \quad (6)$$

$$\| c_{i(j)} \|_{\Pi, F(\Pi)} = [\Pi \times F(\Pi)], \quad (7)$$

а составы контуров элементов производственной системы в целом описываются булевой матрицей контуров

$$\| c_{i(j)} \|_{P, F(P)} = [P \times F(P)] \quad (8)$$

Процесс сопровождения деятельности образовательного учреждения моделируется в виде технологического процесса  $T_i$  как упорядоченной последовательности технологических операторов

$$T_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik-1}, t_{ik}, \dots, t_{in}), \quad (9)$$

воздействующих на модель функционирования по основному назначению  $A_i$  и осуществляющих преобразование этой модели из предшествующего  $(A_i)_{k-1}$  в последующее  $(A_i)_k$  состояние. При этом принимается  $F(T) = F(P)$ .

Состав контуров производственной системы восстановления работоспособности, взаимодействующей с контурами объектов восстановления, равен

$$F(P) = F(T) = \bigvee_{k=1}^n F(p_k) = \bigvee_{k=1}^n F(t_k) \quad (10)$$

Исходной информацией выступает вектор  $VLi$  ( $i = 1..K$ ) с набором определенных значений. Тот компонент вектора, который имеет нулевое значение и нуждается в реализации. Вектор  $VLi$  может иметь не одно, а несколько нулевых значений.

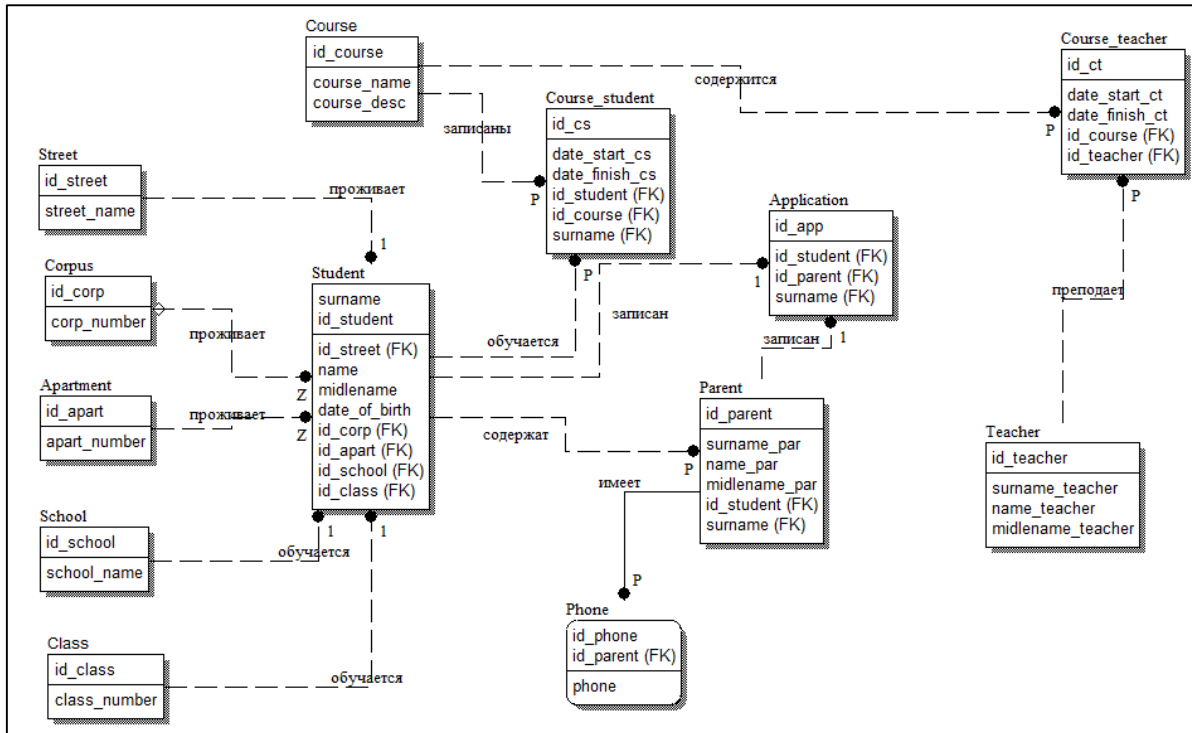
Сопроводительные процессы могут комбинироваться в группы, например, необходимость учета нескольких свойств при формировании отчета и др. Поэтому связь между элементами модели дизъюнктивная.

При дизъюнктивной форме связи контуров производственных процессов  $A$  и модели производственной системы сопровождения деятельности образовательного учреждения для преобразующего контура  $F_j(t_k)$  оператора, взаимодействующего с контуром  $F_j(A)$  основного процесса, принимаются следующие логические значения:  $F_j(t_k) = 1$ , если оператор  $t_k$  реализует контур  $F_j(A)$ , и  $F_j(t_k) = 0$  – в противном случае.

На основе математической модели разработаны функциональные модели с использованием методологии SADT, на основе которых разработана логическая модель системы автоматизации процессов сопровождения деятельности образовательного учреждения. Фрагмент модели приведен на рисунке 1.

Таким образом, для моделирования производственных процессов образовательного учреждения необходимо выделить три составляющие:

1. модель процессов ведения образовательной деятельности  $A$  (основная деятельность по предназначению);
2. модель процессов сопровождения деятельности образовательного учреждения  $P$  (подготовка договоров, отчетов и др.), которая в свою очередь состоит из:
  - системы технологических операторов, характеризующих производственные процессы  $T$  (процессы документооборота и др.);
  - системы информационных объектов, включающих данные, необходимые для реализации технологических операторов  $П$ .



*Рисунок 1. Логическая модель данных, построенная на основе математической модели*

### **Список литературы:**

1. Павлов В.В. Структурное моделирование в CALS-технологиях/ В.В. Павлов; [отв.ред. Ю.М. Соломенцев]; Ин-т конструкторско-технологической информатики РАН. М.: Наука, 2006. — 307 с.
2. Павлов В.В. CALS-технологии в машиностроении (математические модели). Под редакцией Ю.М. Соломенцева. М.: ИЦ МГТУ СТАНКИН, 2002. — с. 328.



## **2.3. УПРАВЛЕНИЕ В СОЦИАЛЬНЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

### **CASE-СРЕДСТВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ БИЗНЕС- ПРОЦЕССОВ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**

***Гоголева Ирина Васильевна***

*канд. пед. наук, заведующий кафедрой  
«Математика и бизнес-информатика»*

*Якутской государственной сельскохозяйственной академии,  
РФ, г. Якутск*

*E-mail: [ivgogoleva61@yandex.ru](mailto:ivgogoleva61@yandex.ru)*

***Уарова Саргылана Ивановна***

*доцент кафедры «Математика и бизнес-информатика»*

*Якутской государственной сельскохозяйственной академии,  
РФ, г. Якутск*

### **CASE-TOOLS TO DESCRIBE BUSINESS PROCESSES OF EDUCATIONAL INSTITUTIONS**

***Irina Gogoleva***

*candidate of Science, Head of the Department "Mathematics  
and business informatics" Yakut State Agricultural Academy,*

*Russia, Yakutsk*

***Sargylana Uarova***

*associate Professor of " Mathematics and business informatics"  
Yakut State Agricultural Academy,*

*Russia, Yakutsk*

#### **АННОТАЦИЯ**

Повышение эффективности деятельности предприятия в любой отрасли экономики невозможно без применения новых информационных технологий. Методы и средства моделирования бизнес-процессов существуют уже много лет, но в основном используются в крупном бизнесе. Положения федерального закона ФЗ-273

«Об образовании в РФ» требуют внедрения систем менеджмента качества и методов описания бизнес процессов в образовательную деятельность. Целью данной работы является выбор Case-средства для описания бизнес-процессов и моделирование процессов учебного заведения.

### ABSTRACT

Improving the performance of the company in any sector of the economy is impossible without the use of new information technologies. Methods and tools for modeling business processes existed for many years, but mainly used in big business . The provisions of the Federal Law «On Education in the Russian Federation» require the implementation of quality management systems and methods for describing business processes in educational activities. The aim of this work is the choice of Case tool for describing business processes and modeling of educational institution.

**Ключевые слова:** бизнес-процессы; Case-средства.

**Keywords:** business processes; Case tools.

В настоящее время стандарты системы менеджмента качества и процессного подхода, которые направлены на повышение эффективности и результативности работы предприятий, в основном нашли применение в крупных коммерческих компаниях. В экономически развитых странах применение моделей архитектуры предприятия является обязательным элементом успешности бизнеса.

Согласно положений межгосударственного стандарта системы менеджмента качества, организации для улучшения и повышения эффективности деятельности должны управлять ресурсами и процессами, применять методы процессного подхода. А для того, чтобы правильно управлять процессами требуется их изучить и описать.

Любая деятельность организации состоит из последовательности взаимосвязанных бизнес-процессов. Бизнес процесс — это любая деятельность организации, которая имеет вход и выход. Вход — ресурс, необходимый для выполнения бизнес- процесса. Выход — результат выполнения бизнес процесса. Ресурсы на входе поступают от поставщика. Результат выполнения на выходе имеет потребитель.

Для выбора программно-инструментального Case-средства для описания бизнес-процесса организации мы отобрали следующие программы: BPWIN, ARIS, RAMUS. Определим следующие критерии выбора:

- функциональность (возможности) CASE-средства;
- простота использования и установки;

- доступность приобретения (цена) CASE-средства.

Значения критериев определили, используя открытые ресурсы в сети Интернет. Сравнив функциональные возможности CASE-средств, пришли к выводу, что ARIS имеет больше возможностей, чем BPWIN и RAMUS. Наиболее просты в освоении и в установке BPWIN и RAMUS. Цена превосходит у ARIS. Таким образом, каждая из этих программ свои имеет свои плюсы и минусы. Но учитывая, что ARIS имеет бесплатную усеченную версию, мы выбрали его для данной работы.

Основываясь на наиболее популярной классификации норвежского проекта TOPP выделим три группы бизнес-процессов учебного заведения: процессы основной деятельности, вспомогательные процессы или обеспечивающие процессы, процессы развития. Назначение процессов основной деятельности — создание основных товаров либо услуг. Основные процессы добавляют к товару ценность для потребителя. Примеры основных процессов: в производственной компании — изготовление товара, в финансовой сфере — финансовые услуги, в учебной организации — обучение.

Назначение вспомогательных процессов — обеспечение деятельности основных процессов. Потребителями вспомогательных процессов являются внутренние клиенты. Примеры вспомогательных процессов: деятельности бухгалтерской, кадровой, транспортной и ИТ-служб. Процессы развития — это процессы, которые в настоящее время не создают цепочку ценности, но направлены на увеличение прибыли в долгосрочной перспективе.

Для выделения бизнес-процессов деятельности учебного заведения можно использовать методы структурного анализа. При структурном анализе система представляется в виде модели, которая начинается с ее общего обзора и затем детализируется, приобретая иерархическую структуру со все большим числом уровней. В целях «читаемости» количество моделей элементов на одном уровне и количество уровней должно быть ограничено и степень детализации не может дойти до слишком мелких операций.

В деятельности ЯГСХА выделим процессы основной деятельности, для удобства, сократив их наименования: реализация программ профобразования, выполнение научных исследований, повышение квалификации, подготовка научных кадров. Выделим вспомогательные процессы ВУЗА: кадровое обеспечение, обеспечение общежитием, эксплуатация имущественного комплекса, информационное обеспечение, услуги библиотеки. Выделим процессы

развития: разработка новых образовательных программ, разработка новых научных направлений.

Детализируем основной (далее — ПО)» на следующие подпроцессы: организация приема в Академию, разработка ООП, учебный процесс, итоговая аттестация выпускников.

Для наглядности, на рисунке 1 с использованием средства для моделирования бизнес-процессов ARIS представим перечень бизнес процессов ЯГСХА верхнего уровня с детализацией процесса «реализация программ профессионального образования». На схеме наиболее важные процессы принято располагать выше.



*Рисунок 1. Перечень бизнес процессов ЯГСХА верхнего уровня*

Рассмотрим организацию приема абитуриентов, которая в ЯГСХА регламентирована и утверждена в виде текстового документа. Опишем данный процесс в виде диаграммы с использованием BPMN — нотации для моделирования бизнес-процессов. На рисунке 2 представлена модель данного процесса, разработанная инструментом ARIS.

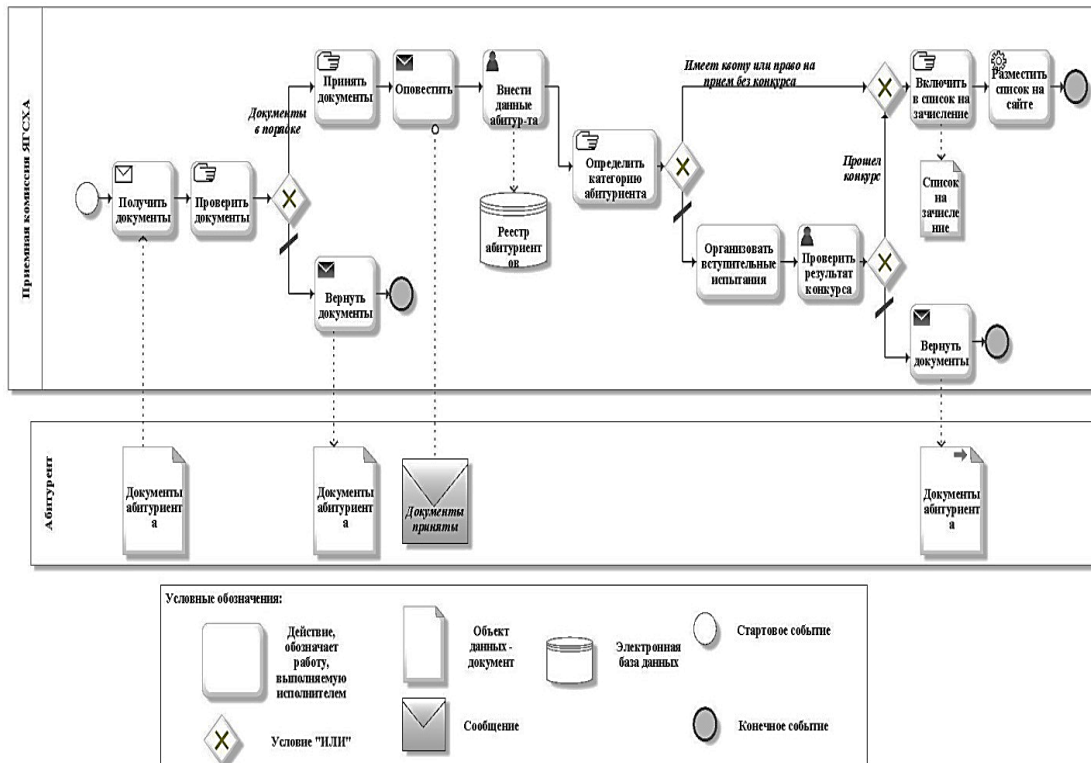


Рисунок 2. Модель процесса организации приема абитуриентов

В заключении отметим, что выделение процессов деятельности учебного заведения и моделирование процессов может быть успешно использованы при разработке документов и получении сертификата в соответствии с требованиями межгосударственного стандарта системы менеджмента качества.

### **Список литературы:**

1. Андерсен Б. Бизнес-процессы. Инструменты совершенствования. М.: РИА Стандарты и качество, 2003. — 272 с.
2. Репин В.В., Елиферов В.Г. Бизнес-процессы: Регламентация и управление. М.: ИНФРА-М, 2004. — 319 с.
3. Репин В.В., Елиферов В.Г. Процессный подход к управлению: Моделирование бизнес-процессов. М.: РИА «Стандарты и качество», 2004. — 398 с.
4. Шеер А.В. ARIS — моделирование бизнес-процессов. М.: Вильямс, 2008. — 224 с.

## **2.4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ**

### **ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА НА ГОРОДСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ**

***Попков Владимир Константинович***

*д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник  
Института вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН,  
РФ, г. Новосибирск  
E-mail: [vkropkov@mail.ru](mailto:vkropkov@mail.ru)*

***Ахмедиярова Айнур Танатаровна***

*докторант КазНТУ им. К.И. Сатпаева по специальности  
«Информационные системы»,  
Республика Казахстан, г. Алматы  
E-mail: [AAT.78@mail.ru](mailto:AAT.78@mail.ru)*

***Куандыкова Джанна Рискуловна***

*канд. техн. наук, доцент университета «Туран»,  
Республика Казахстан, г. Алматы  
E-mail: [dzhannak@mail.ru](mailto:dzhannak@mail.ru)*

### **ON A PROBLEM OF TRANSPORT ROUTING FOR URBAN TRANSPORT NETWORKS**

***Popkov Vladimir***

*Dr., Professor, Senior Researcher, Institute of Computational Mathematics  
and Mathematical Geophysics SB RAS,  
Russia, Novosibirsk*

***Ahmediyarova Aynur***

*doctoral KazNTU by specialty "Information Systems",  
Republic of Kazakhstan, Almaty*

*Kuandykova Gianna*

*Ph.D., Associate Professor University "Turan",  
Republic of Kazakhstan, Almaty*

### **АННОТАЦИЯ**

Рассматривается работа системы управления маршрутизацией транспорта, проведен обзор теоретической основы маршрутизации для информационных сетей. Даны описания алгоритмов поиска кратчайших путей на графах. Представлена концепция системы управления маршрутизацией транспортных средств для городских транспортных сетей.

### **ABSTRACT**

We consider the work of the routing control of transport, a review of the theoretical basis for the routing information networks. Describes the search algorithms of the shortest paths in graphs. Introduces the concept of routing control vehicles for urban transport networks.

**Ключевые слова:** потоки машин; управление транспортом; алгоритм управления маршрутизацией.

**Keywords:** heavy traffic; transportation management; routing control algorithm.

### **Введение**

В настоящее время с ростом населения крупных городов значительно увеличилось число автомобилей на дорогах. Загруженность городских автомагистралей усилилась, также неизбежно выросла вероятность совершения аварии, по вине которой движение замедляется или вообще останавливается. Вместе с тем человек, естественно, желает добраться куда-либо как можно быстрее. Или он просто ездит с работы домой и обратно и не хочет тратить свое время на «стояние» в пробке, или это курьер, или работник экстренной службы, для которого каждая минута на счету.

Одним из выходов может стать система управления маршрутизацией транспорта, владеющая самой свежей информацией о состоянии дорог и способная вычислить кратчайший путь через весь город. Таким образом, автомобилисты смогут избежать пробок и достигнуть места назначения в кратчайшие сроки.

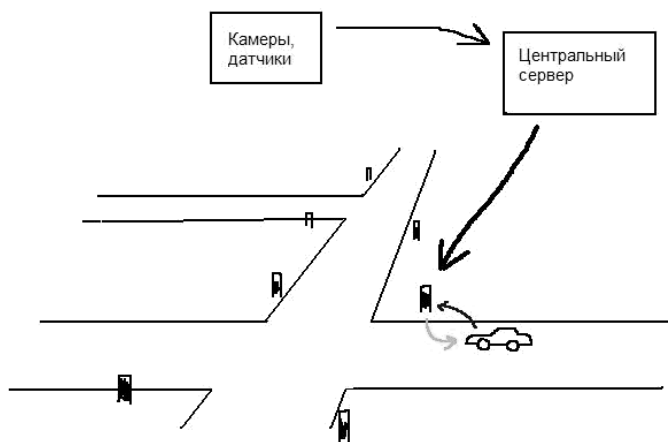
### **Постановка задачи**

Задача маршрутизации транспорта на городских транспортных сетях очень похожа на маршрутизацию компьютерного трафика в сетях информационных. Главные отличия состоят в том, что в пер-



вом случае в качестве пакета рассматривается транспортное средство, а также существуют правила дорожного движения, ограничивающие передвижение пакетов. В то же время, задача маршрутизации транспорта состоит все в той же проблеме нахождения кратчайшего пути между двумя узлами.

Рассмотрим идею работы системы управления маршрутизацией транспорта.



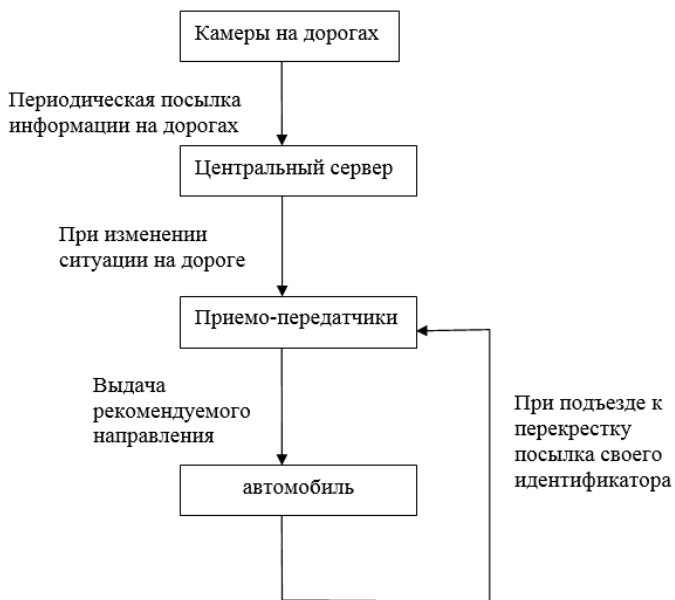
**Рисунок 1. Работа системы управления маршрутизацией транспорта**

На подъездах к перекресткам установлены специальные приемопередатчики, связанные с центральным сервером. На центральный сервер периодически поступает информация с камер/датчиков, расставленных на дорогах и следящих за состоянием дорожной сети. Эти камеры способны замерять скорость движения потока по участкам дороги. Таким образом, центральный сервер узнает об изменении условий движения на каком-то участке дороги и отправляет соответствующую информацию на приемопередатчики. Автомобиль оборудован специальной меткой. При подъезде к перекрестку, который является фактически узлом коммутации, приемопередатчик считывает информацию об автомобиле. Эта информация может быть

зашифрована в виде <номер автомобиля, точка назначения>. Затем автомобиль получает направление до следующего узла и продолжает движение.

Как уже было сказано выше, мы будем рассматривать централизованный адаптивный алгоритм управления маршрутизацией, так как это позволяет снизить затраты, поскольку нет необходимости оснащать приемо-передатчики процессорами большой мощности. Также необходимо учитывать задержки при обмене информацией между приемо-передатчиками и центральным сервером. Однако скорость движения автомобилей гораздо меньше скорости распространения электронного сигнала, так что неприятностей можно избежать, расставив приемо-передатчики соответствующим образом.

Блок-схема работы системы приведена ниже.



*Рисунок 2. Блок-схема работы системы*

### **Математическая постановка**

Математически задача маршрутизации вообще и транспорта в частности сводится к нахождению кратчайшего пути в (не)ориентированном графе.

*Определение: Городская транспортная сеть* —  $G=(N, A)$  — взвешенный ориентированный граф, где  $N$  — множество вершин (перекрестков)  $A$  — множество дуг (участков дорог, соединяющих две вершины каждый).

Функция  $c: A \rightarrow R^+$  определяет стоимость каждой дуги  $(i, j) \in A$ . Метрикой в нашем случае является время прохождения пакета по дуге.

Таким образом, целевая функция выглядит следующим образом:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}, \quad x_{ij} \in \{0,1\} \quad (1)$$

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -n+1, & i=r, \\ 1, & i \in N \setminus \{r\}; \end{cases} \quad (2)$$

Некоторые пояснения.

$BS(i)$  и  $FS(i)$  — это соответственно звезды исходящих и входящих путей в вершину  $i$ , то есть:

$$BS(i) = \{(u, v) \in A \mid v = i\},$$

$$FS(i) = \{(u, v) \in A \mid u = i\};$$

Таким образом, решается целочисленная задача булева линейного программирования — минимизация суммарного времени пути от узла  $r$  к узлу  $i$ .

Существуют разные алгоритмы решения подобного типа задач.

**Метод Дейкстры (Dijkstra).**

Алгоритм Дейкстры — это классический алгоритм для поиска кратчайших путей от одной вершины графа до всех остальных. Пусть  $G=(V, E)$  — взвешенный ориентированный граф с неотрицательными весами дуг,  $s \in V$  — источник,  $t$  — сток, и  $l(v, w)$  длина дуги  $(v, w) \in E$ . Тогда алгоритм выглядит следующим образом:

**Алгоритм 1**

1. Пусть  $U$  пустое множество, и потенциалы  $p(v) = +\infty$  для каждой вершины  $v \in V$ , кроме  $p(s) = 0$ .

2. Добавляем к  $U$  вершину  $v_0$ , имеющую минимальный потенциал в  $V \setminus U$ . Если  $t \in U$ , стоп.

3. Для каждой вершины  $v \in V$  такой, что  $(v_0, v) \in E$ , если  $p(v_0) + I(v_0, v) < p(v)$ , положить  $p(v) := p(v_0) + I(v_0, v)$  и перемещаемся в вершину  $v$  ( $v := v_0$ ).

4. Перейти на шаг 2.

Минимальное время работы алгоритма есть  $O(|E| + |V| \log(|V|))$ .

Мы написали программу, использующий метод Дейкстры для поиска кратчайшего пути на графе между двумя вершинами.

**Алгоритм А\*.**

А\* («А-звёздочка») — это расширение метода Дейкстры, эвристический алгоритм для поиска кратчайшего пути между двумя вершинами. Он использует эвристическое приближение для длины кратчайшего пути от каждой вершины к вершине-назначению. Пусть  $h(u, v)$  — оценщик длины кратчайшего пути между  $u$  и  $v$ . И пусть  $t$  — точка назначения. Тогда алгоритм действует по следующей схеме:

**Алгоритм 2**

1. Пусть  $U$  пустое множество, и потенциалы  $p(v) = +\infty$  для каждой вершины  $v \in V$ , кроме  $p(s) = 0$ .

2. Добавляем к  $U$  вершину  $v_0$ , для которой  $p(v) + h(v_0, t)$  минимально в  $V \setminus U$ . Если  $v_0 = t$ , стоп.

3. Для каждой вершины  $v \in V$ , такой, что  $(v_0, v) \in E$ , если  $p(v_0) + I(v_0, v) < p(v)$ , положить  $p(v) := p(v_0) + I(v_0, v)$ , перемещаемся в вершину  $v$  ( $v := v_0$ ) и удаляем  $v$  из  $U$ , если  $v \in U$ .

4. Перейти на шаг 2.

Если  $h(v, t)$  удовлетворяет ограничению, что  $h(v, t)$  есть нижняя граница  $h^*(v, t)$ , то полученный путь обязательно будет оптимальным кратчайшим путем.

$$\forall v \in V \quad h(v, t) \leq h^*(v, t) \quad (3)$$

Следует отметить, что если  $h(v, t) = h^*(v, t) \quad \forall v \in V$ , алгоритм А\* сразу найдет только дуги на кратчайшем пути от источника к стоку. Более того, удаление вершины из  $U$  на шаге 3 может быть исключено

из алгоритма, если приближение удовлетворяет следующему ограничению, называемому монотонным ограничением:

$$\forall(u, v) \in E \quad l(u, v) + h(v, t) \geq h(u, t) \quad (4)$$

В этом случае оценщик называется выполнимым для двойственной задачи (dual feasible estimator). Например, для евклидово расстояния на дорожной сети — оценщик для двойственной задачи выполним, то есть двойственная задача выполнима. Очевидно, что  $h^*(v, t)$  также удовлетворяет верхнему ограничению. Следует отметить, что число найденных вершин в этом случае всегда не превосходит числа найденных вершин методом Дейкстры. Фактически метод Дейкстры — это метод  $A^*$ , у которого  $h(v, t) = 0$  для всех вершин.

### *Двунаправленный метод (The bidirectional Method)*

Двунаправленный метод также используется для поиска кратчайшего пути между двумя вершинами графа. Он не требует эвристическую оценку, но может уменьшить число найденных вершин в большинстве случаев. В этом алгоритме поиск ведется не только от источника к стоку, но и в обратную сторону. Алгоритм работает следующим образом:

#### **Алгоритм 3**

1. Пусть  $U$  и  $W$  — пустые множества, и пусть потенциалы  $p_s(v)$  и  $p_t(v)$  равны  $+\infty$  для каждой вершины  $v \in V$ , за исключением  $p_s(s) = 0$  и  $p_t(t) = 0$ .
2. Добавляем к  $U$  вершину  $v_0$ , которая имеет наименьший потенциал  $p_s(v)$  в  $V \setminus U$ . Если  $v_0 \in W$ , перейти на шаг 7.
3. Для каждой вершины  $v \in V$ , такой, что  $(v_0, v) \in E$ , если  $p_s(v_0) + l(v_0, v) < p_s(v)$ , положим  $p_s(v) := p_s(v_0) + l(v_0, v)$  и рассматриваем предыдущую<sup>s</sup> вершину  $v$  в качестве  $v_0$ .
4. Добавляем к  $W$  вершину  $v_0$ , которая имеет наименьший потенциал  $p_t(v)$  в  $V \setminus W$ . Если  $v_0 \in U$ , перейти на шаг 7.
5. Для каждой вершины  $v \in V$ , такой, что  $(v, v_0) \in E$ , если  $p_t(v_0) + l(v, v_0) < p_t(v)$ , положим  $p_t(v) := p_t(v_0) + l(v, v_0)$  и рассматриваем предыдущую<sup>t</sup> вершину  $v$  в качестве  $v_0$ .
6. Перейти на шаг 2.

7. Найти дугу  $(u_0, w_0) \in E$ , которая имеет наименьшее значение  $p_s(u) + l(u, w) + p_t(w)$ . Кратчайший путь от  $s$  до  $t$  состоит из кратчайшего пути от  $s$  до  $u_0$ , дуги  $(u_0, w_0)$  и кратчайшего пути от  $w_0$  до  $t$ .

### **Описание работы системы управления маршрутизацией**

В данной работе предлагается разбить задачу управления маршрутизацией транспорта на две части: статическую и динамическую.

#### ***Статическая часть***

Если рассматривать городскую транспортную сеть в виде графа, то появляется проблема, связанная с большой размерностью системы. Облегчить вычислительную задачу может разбиение городской сети на меньшие сегменты, связанные между собой через единственные узлы. То есть такие узлы, которые нельзя миновать при движении из одной точки города в другую. Например, для Новосибирска такими узлами могут быть: мост через Иню, дамба Обь-ГЭС и т.п. При таком разбиении кратчайшие пути не изменятся, так как здесь будет работать принцип оптимальности.

Далее, при первоначальной прокладке маршрута предлагается воспользоваться статистическими данными. Это средние скорости транспортного потока на всех участках дорог в зависимости от дня недели, времени суток, возможно погоды. По этим данным вычисляются веса ребер графа, и кратчайший маршрут вычисляется с помощью любого из алгоритмов поиска кратчайшего пути на графе.

#### ***Динамическая часть***

В динамической части предполагается собственно управление маршрутизацией транспортных средств центральным сервером в режиме реального времени. При этом предлагается использовать аналог метода рельефов для информационных сетей.

Метод рельефов - это динамический децентрализованный адаптивный алгоритм. Его удобство заключается в том, что при нём пакету дается направление движения к следующему узлу, что очень удобно в случае маршрутизации автомобильного транспорта. Таким образом, водителю транспортного средства будет дана рекомендация по выбору дальнейшего направления. И при подъезде следующего автомобиля не потребуются никаких перевычислений, при условии сохранения тех же параметров пропускной способности дорог.

### **Заключение**

1. В статье был проведен обзор теоретической основы маршрутизации для информационных сетей. Даны описания

алгоритмов поиска кратчайших путей на графах и создана программа на основе одного из них.

2. Представлена концепция системы управления маршрутизацией транспортных средств для городских транспортных сетей.

3. Показано, что городская транспортная сеть может быть представлена в виде графа, и теория и методы, посвященные маршрутизации в информационных сетях, могут быть перенесены на транспортные сети. Это является заделом для дальнейших исследований в данной области.

В будущем предполагается:

- Произвести детальное сравнение не только классических, но и имеющихся в настоящее время алгоритмов поиска кратчайших путей на графах.

- Создать централизованный аналог метода рельефов для управления маршрутизацией транспорта в городской дорожной сети.

### **Список литературы:**

1. Крылов Ю.Д. Вычислительные сети // Учебное пособие, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, стр. 105—111, СПб 2006.
2. Смелянский Р.Л. Системы передачи данных и сети ЭВМ // лекции ВМИК МГУ.
3. Hector Gonzalez. Adaptive Fastest Path Computation on a Road Network: A Traffic Mining Approach // VLDB '07, September 23—28, 2007, Vienna, Austria.
4. Rico Jacob. A Computational Study of Routing Algorithms for Realistic Transportation Networks // ACM.
5. Shivaram Subramanian. Routing algorithms for dynamic, intelligent transportation networks, // Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.
6. Tetsuo Shibuya. Computing the  $n \times m$  Shortest Path Efficiently // ALENEX'99, LNCS 1619, pp. 210—224, 1999.
7. Yun-Wu Huang. Query optimization for navigation in geographic information systems // Dissertation, The University of Michigan, 1997.

## СЕКЦИЯ 3.

### ФИЗИКА

#### 3.1. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

##### УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

***Крылова Екатерина Юрьевна***

*канд. физ.-мат. наук ассистент*

*Саратовского государственного университета  
им. Н.Г. Чернышевского,*

*РФ, г. Саратов*

*E-mail: [kat.krylova@bk.ru](mailto:kat.krylova@bk.ru)*

***Папкова Ирина Владиславовна***

*канд. техн. наук доцент*

*Саратовского государственного технического университета  
им. Гагарина Ю.А.,*

*РФ, г. Саратов*

*E-mail: [ikravzova@mail.ru](mailto:ikravzova@mail.ru)*

***Салтыкова Ольга Александровна***

*канд. физ.-мат. наук доцент*

*Саратовского государственного технического университета  
им. Гагарина Ю.А.,*

*РФ, г. Саратов*

*E-mail: [olga\\_a\\_saltykova@mail.ru](mailto:olga_a_saltykova@mail.ru)*



# CONTROL OF CYLINDRICAL SHELLS VIBRATIONS

*Krylova Ekaterina*

*candidate of Science, Saratov state university,  
Russia, Saratov*

*Papkova Irina*

*candidate of Science, assistant professor  
of Saratov state technical university,  
Russia, Saratov*

*Saltykova Olga*

*candidate of Science, Ph.D., assistant professor  
of Saratov state technical university,  
Russia, Saratov*

*Работа проведена при финансовой поддержке РФФИ МОЛ-А-2014 № 14-01-31335*

## АННОТАЦИЯ

Управлять колебаниями оболочки предлагается на основании карт типа колебаний, построенных с учетом различных вариантов приложения нагрузки.

## ABSTRACT

Control of cylindrical shells vibrations is proposed based on type vibrations cards. Cards constructed taking into account the various options the load application.

**Ключевые слова:** оболочка; хаос; бифуркации; Ляпуновские показатели; управление колебаниями.

**Keywords:** shell; chaos; bifurcation; Lyapunov exponents; control of vibrations.

В работе исследуются колебания гибких изотропных цилиндрических прямоугольных в плане оболочек, под действием внешней знакопеременной сдвиговой нагрузки. Рассматриваемые оболочки являются элементами многих инженерных конструкций, находящихся под действием внешнего динамического давления. Поэтому возникает необходимость комплексного исследования поведения таких систем и установления множества параметров

воздействия, характеризующих безопасный и опасный режимы их работы.

Математическая модель колебаний оболочки, построенная на основе модели Кирхгофа с учетом нелинейной зависимости между деформациями и перемещениями в форме Кармана, представляет собой систему неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций прогиба и усилий. Для сведения распределенной системы к системе с сосредоточенными параметрами по пространственным переменным применяется метод конечных разностей с аппроксимацией  $O(h^2)$ , что позволяет рассматривать оболочку как механическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Система обыкновенных дифференциальных уравнений по времени решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. В прямоугольной системе координат трехмерная область запишется в виде:  $\Omega = \{x_1, x_2, x_3 \mid (x_1, x_2) \in [0; a] \times [0; b], x_3 \in [-h; h]\}$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Исходными являются уравнения теории пологих оболочек, записанные в безразмерном виде [1]:

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)} (\nabla_\lambda^4 w) - \nabla_k^2 F - L(w, F) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - q(x_1, x_2, t) + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla_\lambda^4 F + \nabla_k^2 w + \frac{1}{2} L(w, w) = 0,$$

где:  $\nabla_\lambda^4$ ,  $L(w, F)$  и  $\nabla_k^2$  — известные нелинейные операторы,

$w$  и  $F$  — функция прогиба и усилия. К уравнениям (1.1) присоединим граничные условия шарнирного оперения на жесткие (несжимаемые) ребра:

$$w = 0; \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0; F = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0 \text{ при } x_1 = 0; 1;$$

$$w = 0; \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0; F = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 0 \text{ при } x_2 = 0; 1 \quad (1.2)$$

и нулевые начальные условия:

$$w(x_1, x_2)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

Дифференциальная задача (1.1—1.3) приведена к безразмерному виду с использованием теории размерностей и подобия стандартным образом. Нагрузка задавалась в виде  $S = s_0 \sin \omega_p t$ , где  $\omega_p$ ,  $s_0$  — частота и амплитуда внешнего воздействия, соответственно,  $\lambda = 1$ , коэффициент диссипации  $\varepsilon = 1$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0.3$ , временной интервал  $t \in [0, 286]$ , количестве деления отрезка в методе конечных разностей  $n = 14$  [2], выбор шага по времени по правилу Рунге. Влияние количества степеней свободы на достоверность результатов приведено в работах [3]

В работе построены карты типа колебаний размером 300x300 для управляющих параметров  $\{s_0, \omega_p\}$  (Таблица 1) для оболочке различной геометрии. Амплитуда внешнего воздействия менялась на интервале  $s_0 \in (0, 30)$ , интервал по частоте выбирался таким образом, чтобы для каждого случая в его центре была частота собственных колебаний оболочки. Идентификация типа колебаний для каждого сигнала  $w(t)$  проводилась с помощью анализа спектра мощности  $S(\omega_p)$  и показателей Ляпунова. Таким образом, при построении одной карты необходимо решать 9\*104 задач.

Анализ карты типа колебаний оболочки при  $k_{x1} = k_{x2} = 0$  (Таблица 1 а.), показал, что при малых значениях амплитуды сдвиговой нагрузки ( $s_0 \leq 8$ ) колебания системы носят затухающий характер. С увеличением  $s_0$  характер колебаний становится гармоническим, что соответствует безопасному режиму воздействия. Но при  $\omega_p > 4.35$  зоне гармонических колебаний предшествует довольно широкая полоса бифуркаций Хопфа. Далее, с ростом  $s_0$ , система переходит в неустойчивое состояние, появляются зоны независимых частот. Такие наборы параметров внешнего воздействия соответствуют переходным зонам, в которых значения Ляпуновских показателей близки к нулю. Дальнейший рост  $s_0$  приводит к обширным областям хаотических колебаний.

Карта с параметрами  $k_{x1} = 0, k_{x2} = 12$  (Таблица 1 б.), показала, что при  $s_0 \leq 15$  колебания системы также носят затухающий характер. Зона затухающих колебаний здесь немного шире, чем в случае

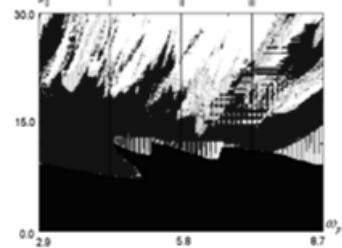
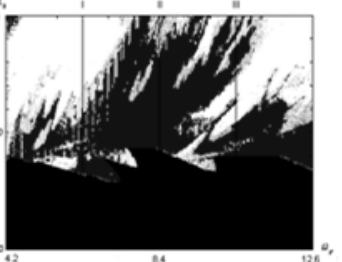
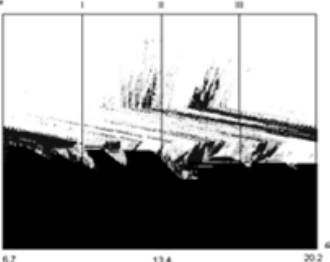
$k_{x1} = k_{x2} = 0$ . При движении по  $s_0$ , также как и в случае  $k_{x1} = k_{x2} = 0$ , обнаружены зоны гармонических колебаний, но локализация их отличается от случая пластины. Наиболее обширная зона гармонических колебаний лежит в области резонанса, на линии частоты собственных колебаний, при  $\omega_p = 8.4$ . Она охватывает широкий диапазон амплитуд внешней сдвиговой силы  $12 \leq s_0 \leq 30$ . Меньшие окна гармонических колебаний локализованы в областях низких и высоких частот, но диапазон амплитуд нагрузки здесь не столь велик,  $12 \leq s_0 \leq 18$ . При больших амплитудах нагрузки система переходит в неустойчивое состояние, появляются обширные зоны хаоса, окаймленные незначительными переходными зонами.

Анализ карты типа колебаний оболочки с параметрами  $k_{x1} = 0, k_{x2} = 24$  (Таблица 1с.) показывает, что при  $s_0 \leq 15$ , колебания носят затухающий характер. Дальнейший рост  $s_0$  приводит систему в состояние хаоса. Переходные зоны представлены очень узкими окнами, растянутыми вверх по оси амплитуд. Островки гармонических колебаний встречаются при  $s_0 \approx 20$  и в области высоких частот при  $s_0 < 20$ . Они незначительны с сильными вкраплениями бифуркаций Хопфа и суперпозиций независимых частот.

Карты характера колебаний свидетельствуют о том, что при увеличении значений геометрических параметров оболочек, система переходит в нерегулярные состояния раньше, при меньших значениях амплитуды внешней сдвиговой знакопеременной нагрузки. Также чем больше изогнута оболочка, тем процесс перехода ее колебаний в хаос резче, тем меньше переходных зон (бифуркаций, суперпозиций независимых частот, колебаний на частоте равной половине частоты возбуждения), тем обширнее хаотические области на карте.

Таблица 1.

Карты типа колебаний оболочки с учетом геометрических параметров

а. Карта при $k_{x1} = k_{x2} = 0$ .	Условные обозначения
	<ul style="list-style-type: none"> <li><span style="display: inline-block; width: 15px; height: 15px; background-color: black; margin-right: 5px;"></span> затухающие колебания</li> <li><span style="display: inline-block; width: 15px; height: 15px; background-color: darkgray; margin-right: 5px;"></span> гармонические колебания</li> <li><span style="display: inline-block; width: 15px; height: 15px; background-color: gray; margin-right: 5px;"></span> колебания на частоте <math>\omega_r/2</math></li> <li><span style="display: inline-block; width: 15px; height: 15px; background-color: white; border: 1px solid black; margin-right: 5px;"></span> хаотические колебания</li> <li><span style="display: inline-block; width: 15px; height: 15px; background-color: lightgray; margin-right: 5px;"></span> суперпозиция независимых частот</li> <li><span style="display: inline-block; width: 15px; height: 15px; border: 1px solid gray; margin-right: 5px;"></span> бифуркации Холфа</li> </ul>
б. Карта при $k_{x1} = 0, k_{x2} = 12$ .	с. Карта при $k_{x1} = 0, k_{x2} = 24$ .
	

Список литературы:

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963, — 880 с.
2. Awrejcewicz J., V.A. Krysko, Papkova I.V. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 1 // Mathematical models and solution methods Chaos, Solitons & Fractals. Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena, 45 (2012).
3. Awrejcewicz J., E.Y. Krylova, I.V. Papkova, V.A. Krysko Wavelet-based analysis of the regular and chaotic dynamics of rectangular flexible plates subjected to shear-harmonic loading // Shock and vibration 19 (2012) — p. 979—994.

## 3.2. ОПТИКА

### МЕТОД ЛАЗЕРНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ КОМПЛЕМЕНТА

***Непомнящая Элина Константиновна***

*студент Санкт-Петербургского Государственного  
Политехнического университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [elina.nep@gmail.com](mailto:elina.nep@gmail.com)*

***Величко Елена Николаевна***

*канд. техн. наук, доцент  
Санкт-Петербургского Государственного  
Политехнического университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [velichko-spbstu@yandex.ru](mailto:velichko-spbstu@yandex.ru)*

***Аксёнов Евгений Тимофеевич***

*д-р физ.-мат. наук, профессор  
Санкт-Петербургского Государственного  
Политехнического университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [et.akenov@gmail.com](mailto:et.akenov@gmail.com)*

***Богомаз Татьяна Александровна***

*канд. мед. наук, инженер  
Санкт-Петербургского Государственного  
Политехнического университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [ta.bogomaz@yandex.ru](mailto:ta.bogomaz@yandex.ru)*

# METHOD OF LASER CORRELATION SPECTROSCOPY FOR RESEARCH OF THE COMPLEMENT SYSTEM

***Nepomniashchaia Elina***

*student of St. Petersburg State Polytechnic University,  
Russia, St. Petersburg*

***Velichko Elena***

*candidate of Science, associate professor  
of St. Petersburg State Polytechnic University,  
Russia, St. Petersburg*

***Aksenov Evgeny***

*doctor of Science, professor of St. Petersburg State Polytechnic University,  
Russia, St. Petersburg*

***Bogomaz Tatiana***

*candidate of Science, engineer  
of St. Petersburg State Polytechnic University,  
Russia, St. Petersburg*

## **АННОТАЦИЯ**

Работа посвящена развитию метода лазерной фотон-корреляционной спектроскопии для целей медицинской диагностики. Рассматривается задача исследования белков, составляющих систему комплемента (иммунитет человека), в плазме крови. Представлена схема лазерного корреляционного спектрометра и предложенный алгоритм обработки сигналов. Получены данные по оценке распределения белковых конгломератов по размерам.

## **ABSTRACT**

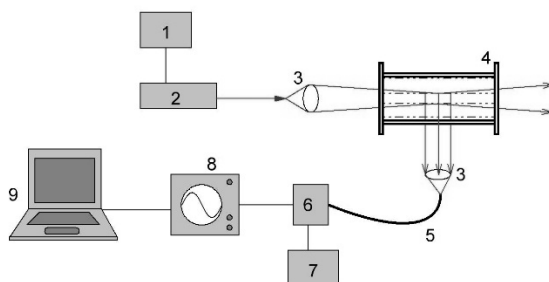
The development of a laser photon-correlation spectroscopy method for medical diagnostics is considered. The problem of investigation of the blood plasma proteins of a complement system (or person immunity) is discussed. The scheme of photon-correlation spectrometer, algorithm of signal processing and data on protein size distribution are presented.

**Ключевые слова:** лазерное светорассеяние; корреляционная спектроскопия; система комплемента.

**Keywords:** laser light scattering; correlation spectroscopy; complement system

Известно, что болезни, связанные с нарушением иммунного ответа организма, вызывают изменения состава и динамики активации белков системы комплемента [1—2]. Исследование связанных с этими изменениями параметров позволяет производить диагностику аутоиммунных заболеваний на ранних стадиях, а так же изучать новые лекарственные препараты.

Метод лазерной корреляционной спектроскопии (ЛКС) довольно давно применяется для исследования биологических объектов в естественной среде, однако, ряд трудностей, таких как большая стоимость и отсутствие специализации для изучения динамики активации белковых комплексов [3; 6], заставили отказаться от использования коммерческих приборов на основе лазерной корреляционной спектроскопии. В связи с этим для исследования белков системы комплемента была разработана и создана экспериментальная установка, позволяющая получать сигнал светорассеяния и производить дальнейшую его обработку различными методами (рис. 1). Основными компонентами прибора являются источник излучения — полупроводниковый лазер видимого диапазона длин волн, столик для размещения кюветы с исследуемым объектом, ФЭУ в качестве устройства регистрации рассеянного излучения и компьютер для записи и обработки получаемых сигналов.



**Рисунок 1** *Схема лабораторной установки для регистрации рассеянного излучения. 1 — источник питания; 2 — полупроводниковый лазер; 3 — фокусирующая линза; 4 — кювета с раствором; 5 — оптическое волокно; 6 — ФЭУ; 7 — источник питания ФЭУ; 8 — осциллограф; 9 — компьютер*

Сигнал светорассеяния на компьютере подвергался корреляционной обработке, вычислялась автокорреляционная функция, вид которой можно описать формулой [4]:



$$G(\tau) = \int_0^{\infty} A(\Gamma) e^{-\Gamma\tau} d\Gamma, \quad (1)$$

где:  $\Gamma$  — диффузное уширение,  
 $A(\Gamma)$  — интенсивность рассеяния на частицах,  
 $\tau$  — время корреляции.

Для вычисления размеров частиц коэффициент  $\Gamma$  связывают с коэффициентом диффузии  $D$ :  $\Gamma = Dq^2$  ( $q = (4\pi n/\lambda)\sin(\theta/2)$  — вектор рассеяния,  $n$  — коэффициент преломления среды,  $\lambda$  — длина волны,  $\theta$  — угол регистрации рассеяния), и используют формулой Стокса-Эйнштейна:

$$D = k_b T / 6\pi\eta R \quad (2)$$

( $\eta$  — вязкость среды,  $k_b$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура,  $R$  — радиус).

Для нахождения коэффициентов  $\Gamma$  в уравнении (1) необходимо использование специальных методов решения обратных некорректных задач. Нами был выбран метод регуляризации Тихонова, дающий наиболее точные результаты. Кроме того была разработана оригинальная программа обработки экспериментальных данных на основе метода регуляризации Тихонова [5].

Здесь вместо уравнения (1) решается задача минимизации невязки:

$$\min(\|k\mathbf{A} - \mathbf{G}\|^2 + \alpha\|\mathbf{A}\|^2). \quad (3)$$

Параметр  $\alpha$  — регуляризирующее слагаемое, оно позволяет избавиться от шумовых помех в сигнале.

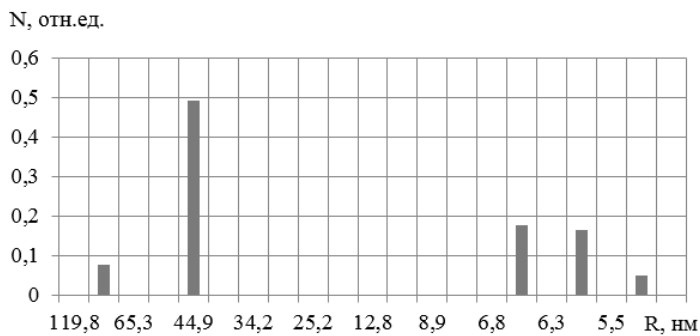
Алгоритм программы заключался в следующем:

1. задание начального (достаточно большого) значения  $\alpha$ ;
2. решение уравнения (3);
3. вычисление невязки по найденному в предыдущем пункте решению;
4. при превышении невязки заранее заданного уровня шума: уменьшение  $\alpha$  и возврат к решению (3);
5. проверку наличия отрицательных решений.

Все отрицательные решения приравниваются к нулю и исключаются из дальнейших расчётов. Полученные данные представляют собой таблицу амплитуд коэффициентов  $\Gamma$ .

Работоспособность установки и предложенного алгоритма обработки подтвердились модельными экспериментами с использованием суспензий микросфер фиксированного размера.

Результаты исследования белков в крови человека позволяют судить о размерах белков и белковых комплексов, а также различать отдельные группы белков. На рис. 2 приведена характерная картина распределения белков в плазме крови человека по размерам. По вертикали отложено относительное количество белка, по горизонтали — радиус в нанометрах.



**Рисунок 2** Распределение белков по размерам в сыворотке крови

Разработанная установка и алгоритм обработки данных позволяют отслеживать распределения белковых конгломератов по размерам в крови человека. Полученные результаты дают возможность в дальнейших исследованиях выявить этапы активации системы комплемента и степень задействования в них отдельных белковых комплексов. Что, в свою очередь, позволит проводить диагностику иммунного ответа организма при различных заболеваниях и оценку эффективности проводимого лечения.

### Список литературы:

1. Дубовой Р.М., Алчинова И.Б., Бобровницкий И.П. Взаимосвязь между метаболическими сдвигами и содержанием ряда элементов в биосубстратах человека // Вестник восстановительной медицины. — 2009. — № 2. — С. 42—44.
2. Ковалева О.И., Ушаков А.А., Лебедева М.А. Новые подходы к ранней диагностике заболеваний системы крови // Кремлевская медицина. Клинический вестник. — 2004. — № 3. — С. 11—13.

3. Крылов Б.А., Гришенцев А.Ю., Величко Е.Н. Методы регистрации, обработки и анализа изображений. Учебно-методическое пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. — 60 с.
4. Непомнящая Э.К., Величко Е.Н., Богомаз Т.А., Аксёнов Е.Т. Развитие методов лазерной корреляционной спектроскопии для исследования параметров технических и биологических суспензий // Лазеры. Измерения. Информация, 2014: сб. докладов 24 междунар. конф. Т. 1. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. — с. 295—306.
5. Karganov M., Alchinova I., Arkhipova E., Skalny A.V. Laser Correlation Spectroscopy: Nutritional, Ecological and Toxic Aspects // Biophysics 2012, — 220 p.
6. Nepomnyashchaya E., Velichko E., Aksenov E., Bogomaz T. Optoelectronic method for analysis of biomolecular interaction dynamics // IOP Journal of Physics: Conference Series, Vol. 541. 2014, [электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://iopscience.iop.org/1742-6596/541/1/012039;jsessionid=55236A64A6E4D728B03CA3F6F3C385CC.c3> (дата обращения 03.02.2015).

### 3.3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

#### ПЕРЕВОДЫ ТРУДОВ КЛАССИКОВ НАУКИ АКАДЕМИКОМ А.Н. КРЫЛОВЫМ

***Поляхова Елена Николаевна***

*канд. физ.-мат. наук, доцент,  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [pol@astro.spbu.ru](mailto:pol@astro.spbu.ru)*

***Королев Владимир Степанович***

*канд. физ.-мат. наук, доцент,  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [yokorol@bk.ru](mailto:yokorol@bk.ru)*

***Холшевников Константин Владиславович***

*д-р физ.-мат. наук, профессор,  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [kyk@astro.spbu.ru](mailto:kyk@astro.spbu.ru)*

#### TRANSLATIONS OF WORKS OF THE CLASSICS OF SCIENCES BY THE ACADEMICIAN A.N. KRYLOV

***Elena Polyakhova***

*candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
assistant professor, Saint-Petersburg State University,  
Russia, Saint-Petersburg*

***Vladimir Korolev***

*candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
assistant professor, Saint-Petersburg State University,  
Russia, Saint-Petersburg*

**Konstantin Kholshchikov**  
*doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
professor, Saint-Petersburg State University,  
Russia, Saint-Petersburg*

### АННОТАЦИЯ

Рассматриваются переводы на русский язык публикаций классиков науки по прикладной математике, механике и астрономии, которые были выполнены академиком А.Н. Крыловым. Сделана попытка оценить его вклад в эти области и дальнейшее развитие науки.

### ABSTRACT

Translations into Russian of publications of the classics of science on applied mathematics, mechanics and astronomy executed by the academician A.N. Krylov are examined. An attempt to estimate his contribution to these areas and further development of science is fulfilled.

**Ключевые слова:** астрономия; математика; механика; развитие науки.

**Keywords:** astronomy; mathematics; mechanics; development of science.

### **Введение.**

Недавно, в 2013 г., научная общественность отмечала 150-летие со дня рождения академика Алексея Николаевича Крылова (1863—1945), выдающегося российского и советского ученого. О нем существует обширная научная и биографическая литература разных лет [5; 12—14; 19; 20].

Основные научные исследования А.Н. Крылова относятся к теории корабля, гидромеханике, баллистике, строительной механике, теории гироскопов, теории дифференциальных уравнений, прикладной математике и методам вычислений, небесной механике, теории реактивного движения, истории науки. А.Н. Крылов приобрел мировую известность своими трудами по механике корабля, кораблестроению и теории вибрации судов. Провел ряд исследований по непотопляемости судна и его устойчивости, оценил влияние качки на меткость стрельбы с корабля. Создал теорию килевой качки на базе гидромеханической теории волн, изучил колебания судна на волнении.

Мы хотим сосредоточить внимание на менее известных аспектах деятельности юбиляра по математике, механике и астрономии в переводах трудов классиков науки. Это позволило следующим

поколениям ученых и специалистов знакомиться в лучших условиях с достижениями корифеев науки.

### **Вклад А.Н. Крылова в изучение истории и развитие науки.**

Крылов с удовольствием занимался историей науки, исследовал научное наследие ученых, знакомил широкие круги исследователей с работами таких великих математиков как Ньютон, Эйлер, Лагранж, Гаусс, Чебышев, Остроградский, Коркин, Ляпунов и других. Подчеркивая их значение для науки и часто творчески перерабатывая их труды, А.Н. Крылов вносил поправки в их произведения, не считая эти труды неприкосновенными, развивал их идеи дальше в соответствии с новыми потребностями практики.

Наиболее существенным вкладом А.Н. Крылова в историю и развитие науки следует считать перевод «Начал» И. Ньютона с латыни на русский язык. Крылов перевел и издал в Петербурге книгу Ньютона «Математические начала натуральной философии» (“*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*”, Londini, 1687) [15]. Методы решения задач небесной механики, предложенные Ньютоном, Крылов преобразовал к современной форме, избежав архаичности их первоначального изложения. Многие модификации методов, выполненные Крыловым, применяются и в настоящее время. Как переводчик «Начал» А.Н. Крылов прекрасно владел латинским текстом И. Ньютона, не уставая одновременно комментировать его мысли как физического, так и философского содержания.

Крылов начинает работу над переводом еще в 1914 г. Он пишет [6; 13]: «...оставшееся время я посвящал научной работе, главным образом, изучению *Начал* Ньютона, которые и намеревался перевести с латинского на русский язык». В 1915 г. выходит в Известиях Николаевской военно-морской академии (Вып. 4) первый том (Книга I) выполненного Крыловым перевода с латыни знаменитого сочинения. Книга II выйдет в том же издании (Вып. 5) в 1916 г. Обе книги войдут в 1936 г. в 7-й том Собрания трудов А.Н. Крылова.

Крылов отдавал себе отчет, что в книге Ньютона заложены основы не только классической механики, но и теоретической астрономии и небесной механики. Его перевод, снабженный прекрасными комментариями, сделал широко доступным это важнейшее сочинение, написанное Ньютоном по латыни и весьма трудным для понимания стилем.

Большую роль сыграло здесь знание А.Н. Крыловым латыни. Первой его встречей с переводом была брошюра К.Ф. Гаусса “*Intensitas vis magneticae terrestrius ad mensuram absolutam revocata*” («Напряжение земной магнитной силы, приведенное к абсолютной

мере») [4], которую ему предложено было перевести и изучить в 1884 г. по поводу работ по девиации магнитной стрелки компаса. Позднее, в 1932 г., Крылов сделает доклад об этой работе Гаусса в Институте истории науки и техники АН СССР. По поводу латыни Крылов напишет в своих «Воспоминаниях» [13]: «Много раз в течение моей жизни и научной деятельности мне с пользой служила латынь. Конечно, я не мог читать ни Цицерона, ни Ювенала, но зато я свободно разбирался в элементарно простой латыни Эйлера, несколько труднее в превосходной латыни Ньютона и еще труднее в чисто классической латыни Гаусса и Якоби».

Крылов понимал, что замечательный труд Ньютона нужен молодым ученым и инженерам для расширения кругозора и для решения практических задач. Но он был написан по латыни и мало кто мог его прочесть. Крылов видел, что перевод потребует много сил и времени, но тем не менее при своей занятости он решил им заняться. Сначала он переводит каждое слово буквально, потом редактирует текст, затем переписывает все начисто, снабжая выводы Ньютона своими примечаниями, пояснениями и комментариями. К тексту Ньютона А.Н. Крылов дал 207 пояснений — от примечания в две строчки до очерков объемом более печатного листа. Он неоднократно исправляет и переписывает перевод, стараясь как можно больше научных латинских слов заменить русскими аналогами. В течение двух лет он работает над переводом по три часа утром и по три часа вечером.

Перевод явился неоценимым вкладом в науку, так как многочисленные комментарии Крылова позволили широкому кругу русских ученых и инженеров проникнуть в рассуждения Ньютона, которые сами по себе отличались предельной краткостью. Выполненный перевод, снабженный обширными комментариями переводчика, представляет собой в первую очередь во многом самостоятельный труд Крылова по классической и небесной механике, помогающий глубже осмыслить гениальный замысел книги Ньютона.

Истоки творчества А.Н. Крылова восходят к знаменитой петербургской математической школе, основателями которой были М.В. Остроградский и П.Л. Чебышев [17; 18; 21]. Основная тематика работ приходится на теорию корабля и баллистику, тем не менее огромную ценность имеют труды, посвященные наследию классиков науки по механике и астрономии и переводам на русский язык сочинений знаменитых европейских ученых.

В 1919 г. издан перевод «Теоретической астрономии» К.Ф. Гаусса [3], выполненный А.Н. Крыловым (включен в т. 6

Собрания трудов за 1936 г.). Позднее — перевод «Теории движения Луны» Л. Эйлера [22]. В 1933 г. Крылов принимает участие в торжественном заседании АН СССР в память величайшего ученого XVIII века Леонарда Эйлера (150 лет со дня смерти), где произнес юбилейную речь [9]. Он дал подробный разбор важнейших трудов Эйлера, в частности, «Механики», изданной в Петербурге в 1736 г., обосновав значимость книги в том смысле, что в ней Эйлер развил зародившийся тогда математический анализ: «В этом смысле его *Механика* бесподобна и служит лучшим свидетельством его гениальности». Приложив математический анализ к решению задач механики, Эйлер «сделал свою механику из науки физической, т. е. из науки, которая должна исследовать явления, совершающиеся в природе, в науку чисто математическую, исследующую движение воображаемой точки под действием воображаемых и не существующих в природе сил».

В 1919 г. Крылов избирается членом Президиума Академии наук, вносит предложение об издании трудов классиков математики, которое принимается. Создается специальная академическая комиссия во главе с Крыловым.

Интересны работы Крылова как историка науки. Он написал более десятка работ, в том числе биографические работы, посвященные юбилейным датам ученых: «Галилей как основатель механики» (В сб. «Галилео Галилей», М.-Л., Изд-во АН СССР, 1943), «Жозеф Луи Лагранж» (1936), «Леонард Эйлер» (1933), «Ньютон и его значение в мировой науке» (1943), «П.Л. Чебышев» (1944), «Памяти А.М. Ляпунова» (1919, 1927), «Краткий биографический очерк А.Н. Коркина», «Мысли и материалы о преподавании механики» и другие.

А.Н.Крылов оставил после себя богатое научное наследие, в списке его трудов около 500 названий. В 1956 г. в Издательстве АН СССР вышло в свет «Собрание трудов» А.Н. Крылова из 12 томов, общим объемом более 600 авторских листов.

### **История создания и переводов книги И. Ньютона.**

Книга И.Ньютона (Isaac Newton, 1643—1727) была написана по латыни и при его жизни издана в Англии три раза: в 1687, 1713 и 1726 годах. Ньютон начал интенсивно размышлять над идеями “Principia” около 1680 г., однако вопросом природы тяготения он начал заниматься значительно раньше, еще в середине 1660-х годов, когда из-за эпидемии чумы был закрыт Кембриджский университет и Ньютон уехал в деревню к матери, где пробыл два года (1665—1666). Эти годы были самыми плодотворными в его жизни.



«В начале 1665 г. я начал думать о тяжести, простирающейся до орбиты Луны (найдя, как вычислить силу, с которой шар, обращающийся внутри сферы, давит на поверхность сферы); из кеплеровского правила, что периоды планет находятся в полуторном отношении к их расстоянию от центра их орбит, я вывел, что силы, которые удерживают планеты на их орбитах, должны быть обратно пропорциональны квадратам их расстояний от центров, вокруг которых они обращаются: в связи с этим я сравнил силу, потребную, чтобы удержать Луну на орбите, с силой тяжести на поверхности Земли и нашел их весьма близко совпадающими. Все это произошло в два чумных года: 1665—1666. Ибо в это время я находился в наилучшем для открытий возрасте и думал о математике и философии больше, чем когда-либо позже» [6].

Результаты, полученные Ньютоном в этот период, не были каким-то озарением. Это были плоды его размышлений, расчетов, критического анализа работ Кеплера, Галилея, Декарта, Гука [1; 2; 6] и других. Ньютон, страстно увлеченный научными проблемами своего времени, был прекрасно осведомлен о всех их тонкостях и деталях. При этом он не торопился с публикацией своих сочинений, оставляя недописанными свои предыдущие работы, идеи и решения, которые долгие годы оставались в черновиках, а большинство современников знали о них лишь понаслышке. В то же время Ньютон и позже не переставал думать о законе тяготения, причем к формулировке «закона всемирного тяготения» к 1680-му году кроме него вплотную подошли еще и крупнейшие английские ученые того времени.

1. Эдмунд Галлей (Edmund Halley, 1656—1742), астроном и геофизик, профессор Оксфордского университета, а также первооткрыватель известной кометы 1682 года, получившей его имя, член Лондонского Королевского общества с 1678 г., друг Ньютона и его восторженный поклонник.

2. Кристофер Рен (Christopher Wren, 1632—1723), профессор астрономии в Оксфорде, математик, астроном, механик, инженер (конструктор приборов), архитектор, автор проекта собора Св. Павла в Лондоне, один из основателей Лондонского Королевского общества.

3. Роберт Гук (Robert Hooke, 1635—1703), изобретатель, инженер, архитектор, метеоролог, знаменитый физик-энциклопедист, член Лондонского Королевского общества со времени его основания и куратор экспериментов, ученый секретарь этого Общества (1677—1682), а также постоянный и непримиримый оппонент Ньютона в научных вопросах.

Они все трое, как и сам И. Ньютон, сходились на том, что притяжение следует закону обратных квадратов, но никто из них не знал, как из этого закона получить эллиптическую форму планетных орбит, т. е. первый закон Кеплера. Гук в своей лекции «Опыт доказательства вращения Земли» в 1674 г. высказал идею закона всемирного тяготения в форме закона обратных квадратов. Эта лекция в качестве первой главы вошла в сборник лекций «*Lectiones Cutleriana or a Collection of Lectures Physical, Mechanical, Geographical and Astronomical made before the Royal Society*», изданный в 1679 г. в Лондоне. В 1684 г. они втроем, Гук, Галлей и Рен, встретились в Лондоне и обсудили вопрос о траектории движения под действием силы тяготения. Гук сразу заявил, что у него якобы уже готово решение, но он пока откладывает сообщение о нем. После этой встречи, в том же 1684 г., Галлей пишет письмо Ньютону в Кембридж, чтобы проконсультироваться с ним и ставит перед ним задачу, какова должна быть орбита тела, движущегося под действием силы тяготения, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Ньютон немедленно сообщил Галлею, что он уже владеет решением и что ему уже давно, в 1679 г., удалось вывести из этого закона эллиптические орбиты планет, и обещал Галлею выслать ему подробное доказательство, что и было им вскоре сделано. С этого момента и начинается напряженная работа Ньютона, приведшая к созданию «*Principia*». Действительно, летом 1684 г. Ньютон пишет трактат «*Propositiones de Motu*» («Предложения о движении»), состоящий из 11 предложений (разделов), ставший впоследствии ядром будущей книги, ее первой частью. По этому поводу Галлей, который помог Ньютону в сборе необходимых астрономических данных, посетил его в Кембридже, убедив в необходимости срочно представить трактат в Королевское общество для «регистрации» с целью обеспечения приоритета. Такое внесение открытия в «Протоколы Королевского общества», о котором позаботился Галлей, состоялась 25 февраля 1685 г. после того как от Ньютона было получено письмо, в котором он заявлял о своих намерениях опубликовать полученные результаты.

Э. Галлею удалось добиться, чтобы И. Ньютон был активно вовлечен в разработку изложения сложившихся у него ранее идей, то есть в написание «*Principia*», а члены Королевского общества получили возможность подробно ознакомиться с этими идеями. Ньютон работал много и успешно. Первая книга под названием «О движении тел», начатая в ноябре-декабре 1684 г. после визита Галлея, была представлена Королевскому обществу уже весной 1686 г.

Во время чтения рукописи Ньютона на заседании Королевского общества 28 апреля 1686 г. присутствующие с восторгом отзывались об его открытии. Вторая книга “Principia” под тем же названием, что и первая, была представлена в Общество летом 1686 г., а третья под названием «О системе мира» — в апреле 1687 г. Рукопись всей книги Ньютона в законченном виде появилась в июле 1687 г., однако уже 19 мая 1686 г. Королевское общество постановило напечатать трактат Ньютона на средства Общества, а наблюдения за изданием возложить на Э. Галлея. Поскольку денег ни у Общества, ни у Ньютона не оказалось, то Галлею пришлось печатать “Principia” за свой счет.

Заслуга Э. Галлея перед наукой состояла не только в том, что ему удалось убедить Ньютона в необходимости немедленно и полно изложить предмет, но и в том, что он принял на себя все хлопоты и расходы по первому изданию книги. Галлей выполнил намеченное и в конце 1687 г. первое издание “Principia” вышло в свет в Лондоне. Оно представляло собой пятьсот десять страниц латинского текста. На титульном листе стояло: [Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Autore Is. Newton — Londini: Iussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater. 1687]. Труд Ньютона был посвящен обобщению результатов, полученных в механике до 1684 г., и выводу закона всемирного тяготения. Здесь он не только приводит основные понятия и законы динамики точки, но и решает многие практически важные задачи: о движении тела в центральном поле сил, об ударе, о движении тела в среде и многие другие.

После выхода книги начался спор Гука с Ньютоном о приоритете. Претензии Гука имели под собой ряд оснований, так как до 1679 г. Ньютон вообще не занимался вопросами гравитации и начал свои исследования лишь после убеждений Гука. Однако написать “Principia” в XVII веке никто кроме Ньютона не мог, хотя нельзя оспаривать, что именно Гук дал Ньютону решающее и важное направление для размышлений, и что программа, план книги был впервые набросан Гуком, хотя математического доказательства у Гука по-видимому не было вообще, а были только догадки. Не решая задачи, он нашел ее ответ. Вместе с тем это была не случайно брошенная Гуком мысль, но несомненно плод долголетней работы. У Гука была гениальная догадка физика-экспериментатора, прозревающего в лабиринте фактов истинные соотношения и законы природы. Хотя Гук далеко превосходил Ньютона как экспериментатор, но его методы ни в коей мере нельзя сравнивать с математическим методом Ньютона: синтез философии природы, новое миропонимание создать мог только Ньютон. В итоге спора Ньютон согласился

сослаться на Гука в отношении закона обратных квадратов, но указал, что Рен и Галлей сделали столько же, сколько и Гук. Это была неправда, что прекрасно знал и сам Ньютон, однако этот ход Ньютона означал, что кольцо друзей Гука было разомкнуто в самом необходимом месте, тем более, что никаких публикаций у Гука не было.

Введение к книге, содержащее «Определения» и «Аксиомы или законы движения», представляло собой ценнейший вклад в динамику. В нем давались определения пространства, времени, количества движения, инерции, сил и массы. Каждый раздел первой книги (в ней их всего 14) в свою очередь был разделен на предложения, теоремы, леммы, задачи и «поучения». Вторая книга состояла из 9 отделов, третья — из нескольких десятков «предложений». Третья книга в первом издании содержала 9 «гипотез», а во втором издании 4 «правила научного рассуждения», 5 «явлений», 42 «утверждения» и 1 «общее поучение».

Тираж первого издания был невелик. Позднее из-за крайней занятости Ньютон поручил второе издание своему молодому ученику, английскому математику, физика, астроному и натуралисту, профессору Кембриджского университета Роджеру Котсу (Roger Cotes, 1682—1716), конечно под своим наблюдением и руководством. Изменения, которые Ньютон собирался внести в книгу, обсуждались в их долгой и оживленной переписке. Они относились, в основном, к лунной теории, к теории кометных орбит и к другим вопросам астрономии. Второе, дополненное издание, Р. Котс выпустил в 1713 г. тиражом 750 экземпляров. Почти сразу оно было повторено в Амстердаме в 1714 г. Известно, что шесть экземпляров Кембриджского издания 1713 г. были отправлены в Россию, в Москву, царю Петру Великому. Второе издание разошлось еще быстрее первого.

Третье прижизненное издание было осуществлено другом Ньютона, молодым английским врачом и естествоиспытателем Генри Пембертоном (Henry Pemberton, 1694—1771), который сам много занимался математикой. Вышло оно в Лондоне в 1726 г. тиражом 1250 экземпляров. На этот раз сам Ньютон почти не принимал участия в его подготовке, а внесенные им изменения не имели принципиальной важности: прибавлены рассуждения о движении Луны, наблюдения Юпитера и определение орбиты кометы Галлея. Третье издание оказалось самым полным изданием “Principia” и одновременно последним научным трудом самого Ньютона.

Что касается переводов книги с латыни, то первый перевод на английский язык был сделан вскоре после смерти Ньютона,

в 1727 г., А. Моттом и был издан в 1729 г. под названием “Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World. Translated into English by Andrew Motte in 1729”. При переводе он пользовался не только самым полным (третьим) изданием 1726 г., но и двумя другими, включая в свой перевод некоторые отдельные фрагменты из них.

Известно, что идеи Ньютона довольно долго не приживались в Европе, особенно во Франции, где господствовали, главным образом, картезианские идеи. Еще лет двадцать после смерти Ньютона Европа придерживалась декартовой теории вихрей. Дольше всех упорствовала Парижская Академия наук.

К началу XX столетия русских переводов “Principia” еще не существовало. Крылов пришел к мысли о необходимости полного перевода “Principia” после сделанных им ранее переводов работ Ньютона по астрономической тематике с целью облегчения их изучения, которое Крылов считал необходимым для образовательных программ офицеров российского флота. Он располагал свободным временем, так как по случаю начала войны занятия в Академии были отменены. В 1989 г. юбилейное академическое издание «Начал» в переводе Крылова вышло отдельной книгой в серии «Классики науки», будучи приурочено к 300-летию первого издания книги Ньютона [15].

А.Н. Крылов не только блестяще сделал перевод с латыни, но и снабдил его научными комментариями. Именно это сочетание поставило этот первый и до сих пор единственный русский перевод в уровень самостоятельного труда по классической и небесной механике, помогающего глубже осмыслить гениальный замысел книги Ньютона, которая написана весьма сложным стилем. Идеи, им предложенные, трудно было понять неподготовленному читателю, причем сам Ньютон заявлял, что он написал всю книгу в подобном стиле намеренно, «чтобы избежать придинок тех, кто мало что смыслит в математике». Крылов писал: «Геометрическое изложение, соответствовавшее обычному состоянию науки того времени, для большинства теперешних читателей при старинном начертании формул с показателями степени, обозначенными словами, а не числами, представляет при чтении излишнюю трудность. Эта трудность увеличивается еще и тем, что Ньютон в целях сжатости изложения идет крупными шагами, пропуская многие промежуточные рассуждения. Поэтому в моем переводе ньютоновых *Начал* на русский язык я придал формулам общепринятый теперь вид и большую часть доказательств пояснил в примечаниях, с соответствующими

аналитическими выводами и алгебраическими выкладками в теперешней форме».

Подобного издания Ньютона ни на одном языке еще не существовало, все вышеуказанные переводы выполнялись либо вовсе без комментариев, либо с небольшими пояснениями, которые были, к тому же, весьма далеки от того особенного языка Ньютона, который так сумел прочувствовать А.Н. Крылов. С помощью своих пояснений ему удалось блестяще сохранить круг идей Ньютона и с непревзойденной ясностью и полнотой воспроизвести доказательства и выводы формул с помощью математической символики XX столетия.

### **Переводы трудов классиков и работы А.Н. Крылова по астрономии.**

Интересен также перевод Крыловым неопубликованного рукописного конспекта курса лекций К.Ф. Гаусса (C.F. Gauss, 1777—1855) по теоретической астрономии, записанных в 1819—1821 гг. в Геттингенском университете слушателем — физиком А.Я. Купфером (1799—1865), будущим петербургским академиком, специалистом по магнетизму и метеорологии. В списке трудов Гаусса такая книга не значилась. Публикация перевода лекций Гаусса совпала по времени с назначением А.Н. Крылова на пост директора Физической обсерватории в 1916 г. Менее чем за год Крылов успел основательно познакомиться с архивом и библиотекой Обсерватории, где и обнаружил тетради с ранее неизвестными записями Купфером лекций по теоретической астрономии Гаусса. А.Н. Крылов немедленно занялся тщательным разбором и переводом этой рукописи. Записи велись готическим шрифтом, некоторые страницы просто стерлись. Крылов сначала переписал все современным немецким шрифтом, а уже затем занялся переводом на русский. Благодаря интересу Крылова к этим записям, гауссовы лекции, которые никогда не издавались на родине ученого, после ста лет забвения впервые увидели свет в России, и притом сразу на русском языке. Перевод записей лекций К.Ф. Гаусса “Theoretische Astronomie gehoert bei Gauss in Goettingen von May 1820 bis Maerz 1821. Kupffer” на русский язык [3] был опубликован в 1919 г., а в 1936 г. вошел в 6-й том Трудов А.Н. Крылова.

Крылову принадлежит также публикация в переводе с немецкого писем Гаусса в Петербургскую академию наук астроному и математику Н.И. Фуссу (1755—1826), который был Секретарем академии с 1800 г. Письма посвящены астрономическим проблемам, в том числе методам определения кеплеровых орбит недавно открытых малых планет Церера и Паллада.

Работа А.Н. Крылова [8], посвященная методам теории возмущений, содержит вывод уравнений Лагранжа из тех соображений, что если рассматривать действие возмущающей силы на бесконечно малом промежутке времени, то по аналогии с теорией удара можно принять координаты точки неизменными, варьируя только скорость. Оказалось, что метод полностью основан на одном из предположений Ньютона и на истинном значении его слов и определений.

В 20-е годы XX столетия А.Н. Крылов вновь возвращается к методам определения орбит комет. Он тщательно восстанавливает классические методы определения орбит, а при изложении метода Ньютона проводит колоссальную работу: к общетеоретическим выкладкам добавляет примеры, просчитанные им самим, в том числе пример перевычисления орбиты кометы Галлея 1682 года, включенной И. Ньютоном в "Principia". Об этом сам Крылов пишет так: «Способ Ньютона представляет собой образец чистого геометрического синтеза той необычайной проникновенности, поэтому, если вы впоследствии забудете ход рассуждений Ньютона, то их возможно лишь припомнить, самому же до них никогда не дойти, не восстановить. Я перечислил этот пример (орбита кометы 1682 года) полностью трижды, вычисляя каждую величину для контроля двумя совершенно различными манерами... Произошло это потому, что я сперва не получал тех чисел, которые показаны у Ньютона, хотя я получал числа, весьма к ним близкие, а так как в числах, приводимых Ньютоном, ошибки быть не может, то и надо было доискаться до того способа, каким он свои числа получил».

Вводя ряд поправок и проникая все глубже в сущность геометрического метода Ньютона, А.Н. Крылов наконец получил в точности числа Ньютона. Аналитическое изложение метода Ньютона для параболических орбит было опубликовано Крыловым впервые в 1911 г. [7].

Дело в том, что объяснение Ньютоном кометных движений явилось одним из важнейших аргументов в пользу истинности закона тяготения. Единственно твердо установленным в XVII столетии фактом было отсутствие у комет суточного параллакса. Это позволило Ньютону прийти к выводу об их существенной удаленности от Земли, после чего он успешно аппроксимировал вытянутую эллиптическую орбиту параболической и определил орбиту по трем наблюдениям. Решение Ньютона состояло из серии чрезвычайно искусных геометрических построений, а его основная идея заключалась в варьировании геоцентрического расстояния кометы для второго наблюдения. А.Н. Крылов показал, что метод Ньютона является

абсолютно строгим. Лишь его чрезвычайная сложность явилась в свое время препятствием для широкого распространения метода среди астрономов.

Первый (геометрический) способ вычисления параболической орбиты на основе закона всемирного тяготения Ньютон разработал в 1686 г., исходя из наблюдений. Его рассуждения были, однако, столь скупы и кратки, что из современников Ньютона один только Галлей смог применить их к вычислению орбит комет. Галлей пришел к выводу об эллиптичности орбиты одной из изученной им комет, которой было присвоено его имя.

Что касается аналитического способа вычисления орбит комет, то его впервые дал Л. Эйлер в 1744 г. Хотя его метод оказался мало пригодным для практического применения, ему принадлежит важнейшая теорема, лежащая в основе всех методов определения орбит комет [11]. В 1761 г. метод обобщил И.Г. Ламберт для кометных орбит любого типа. В 1778 г. Ж.Л. Лагранж разработал свой первый аналитический метод определения орбиты небесного тела с произвольным эксцентриситетом, развив его как «второй метод» в 1783 г. Хотя эти работы имели чисто теоретическое значение, практическое применение им дал К.Ф. Гаусс, опираясь на первый метод Лагранжа. Гаусс публикует свой знаменитый метод вычисления эллиптической орбиты небесного тела «по трем наблюдениям» в 1809 г.

Итак, основы теории определения орбит небесных тел были заложены в трудах великих математиков — Ньютона, Эйлера, Лагранжа и Гаусса, что отмечал и Крылов. Эти методы получили широкое развитие в XIX в., причем кроме математиков ими занялись и механики и астрономы. Например, в 1883 г. Н.Е. Жуковский упрощенным способом вывел формулы метода Гаусса для определения эллиптических орбит из наблюдений и предложил графическое решение основного уравнения Гаусса. Метод Гаусса и метод Лапласа определения орбит были проанализированы А.Н. Крыловым в 1911 г. в «Бесedah» [7], где он писал: «Я решил ввиду приближения кометы Галлея обстоятельно изучить метод Ньютона определения параболической кометной орбиты по трем наблюдениям. Получилось обширное, поясненное рядом примеров исследование метода Ньютона. Затем я перешел к методу Лапласа, потом — Ольберса, и, наконец, — Гаусса». Работа Крылова составила первый выпуск нового журнала «Известия Морской академии» за 1911 г.

А.Н. Крылов посылает свои астрономические статьи в Англию в журнал Королевского Астрономического общества, председателем которого в течение 25 лет состоял в свое время сам Ньютон.



В них Крылов так раскрывает цель своих астрономических исследований: «Моя цель — привлечь внимание к этим изумительным страницам ньютоновских *Начал* и обнаружить, что они в той же мере совершенны, как и все, что Ньютон когда-либо писал». Что касается именно кометной тематики, то Крылов еще в «Бесedah» доказал, что основная (десятая) лемма Ньютона, по существу, совпадает с теоремой, которую астрономы традиционно связывают с именами Эйлера и Ламберта. На это тождество впервые обратил внимание Лагранж, но не представил обоснования. Крылов излагает свой оригинальный и простой вывод теоремы Эйлера-Ламберта [11] для определения орбиты непосредственно из десятой леммы Ньютона, заключая: «Множество доказательств этой основной формулы можно найти в современных трактатах, но ньютоново доказательство остается непревзойденным по его изумительной динамической проникновенности».

Работы А.Н. Крылова по астрономии представляют ценность не только по существу содержания и использования в них методов прикладной математики, но и одновременно служат выдающимся образцом исследований в области истории астрономии. Упомянутыми выше работами, а также переводом лунной теории Эйлера, Крылов открыл у великих классиков те идеи, которые могли быть полезны для новых отраслей науки XX века. Действительно, в переводе «Теории движения Луны» Крылов показывает, что Эйлер, по существу, пользовался приемом, эквивалентным разложению в кратные ряды Фурье, хотя во времена Эйлера не были известны даже простейшие гармонические ряды.

Примечательна и сама история перевода лунной теории Эйлера. Подготавливая доклад к мемориальному заседанию Академии наук СССР по поводу 150-летия со дня смерти Эйлера, Крылов обратил внимание на нелинейные дифференциальные уравнения, которые Эйлер составлял для определения прямоугольных координат Луны. Для решения этой системы уравнений, представляющей общий случай колебательного движения, Эйлер во всех подробностях развивает фундаментальный, но при этом весьма простой метод интегрирования этой системы, доводя его до численного результата.

Обратив внимание на эйлеров метод решения, А.Н. Крылов так говорит о практической роли лунной теории для своих современников: «Это сочинение Эйлера представляется настолько замечательным, что первую общую часть следовало бы издать в переводе на русский язык, ибо вид дифференциальных уравнений, рассмотренных Эйлером, настолько общий, что подобного рода

уравнения, но гораздо более простые, встречаются во множестве прикладных и технических вопросов, и сделать методы Эйлера доступными техникам и инженерам вполне соответствует задачам Издательства Академии наук». Это мнение ученого еще раз подчеркивает тот очевидный факт, что эйлерова теория Луны опередила свою эпоху более чем на 100 лет. В ней можно найти, на что Крылов сразу обратил внимание, элементы современной теории нелинейных колебаний и методов усреднения из прикладной математики.

С одобрения Академии наук А.Н. Крылов предпринял перевод второй лунной теории Эйлера, которая содержит уравнения движения Луны и общий метод их интегрирования. Эти уравнения Эйлер записал в принципиально новой системе координат по сравнению со своей первой теорией Луны.

Поскольку Л. Эйлер предназначал свое сочинение для нужд астрономов-профессионалов, Крылов снабдил свой перевод «прибавлениями и примечаниями», содержащими все необходимые астрономические сведения для ясного понимания оригинального текста Эйлера. Необходимость крыловских «прибавлений» диктовалась еще и тем, что практическое применение эйлерова метода разложения решений дифференциальных уравнений в ряды по степеням малого параметра было связано с появлением вековых слагаемых. Чтобы избавиться от них, необходимо было ввести в рассмотрение частоту основных колебаний системы, измененную в результате присутствия нелинейности. Значение этой частоты определяется некоторым уравнением, составить которое Эйлер, по выражению Крылова, «не отважился», но взял это значение из наблюдений. Составление и решение уравнения для определения измененной частоты колебаний системы было выполнено через сто лет после Эйлера американским астрономом Дж.У. Хиллом (George William Hill, 1838—1914), создавшим окончательный вариант лунной теории. Изложение метода Хилла А.Н. Крылов также посчитал необходимым и полезным включить в свои «прибавления» к эйлеровой теории Луны.

К творческому воссозданию классического наследия Ньютона Крылов вернется в 1935 г. в статье о ньютоновой теории астрономической рефракции [10], т. е. изменения направления лучей света, идущих от небесных светил, под влиянием их преломления в земной атмосфере. Само явление рефракции было известно еще Птолемею, а строгая теория была дана Ньютоном в 1694 г. Учет этого эффекта является весьма важным для проведения астрономических наблюдений на море, что и привлекло внимание к необходимости этого перевода. Основанием для этой реконструкции

послужили соображения Ньютона, изложенные им в одном из его писем к своему коллеге астроному Джону Флемстиду (John Flamsteed, 1646—1719), основателю в 1676 г. и первому директору Гринвичской Обсерватории, автору таблиц атмосферной рефракции. Однажды в 1694 году Флемстид прислал Ньютону письмо, в котором просил его помочь разобраться с явлением астрономической рефракции. Прошло немного времени и в ответном письме Ньютон лишь кратко изложил суть своей фундаментальной теоремы о принципах составления таблиц рефракции, указывая, что «эта теорема может быть доказана аналитически, но доказательство слишком сложно для изложения в письме». Ньютон приложил к письму две составленные им таблицы астрономической рефракции, но не объяснил метода их составления, причём просил Флемстида не разглашать их.

Находясь в Европе в заграничной командировке, А.Н. Крылов больше всего времени провел в Англии. Бродя по Лондону, он любил заглянуть в лавки букинистов — нет ли чего-нибудь интересного из старинных книг. В одной из лавок он увидел увесистый том переписки английского астронома Флемстида с современниками. Крылов не только никогда не видел этой книги, но и вообще не знал о ней. Он купил книгу и с увлечением прочитал ее, решив попытаться перевести ее и восстановить теорию Ньютона. Вернувшись в 1927 г. на родину после шестилетней командировки в Европу Крылов вплотную занялся этой книгой и после кропотливой работы восстановил весь ход рассуждений Ньютона. Однако вследствие огромной занятости ему удалось закончить эту работу только к 1935 г. Потерянная для науки теория великого Ньютона была воссоздана русским ученым, по словам которого «эта теория достойна подробного и внимательного изучения, ибо по точности не уступает всем современным теориям, а по общности метода далеко превосходит их».

Крылов расшифровал также составленные Ньютоном (без всяких указаний самого Ньютона на способ их составления) таблицы атмосферной рефракции. Здесь помогло также глубокое знакомство Крылова со всем творчеством Ньютона, в том числе и с оптическими работами ученого. В результате перед читателями — астрономами, физиками, математиками и историками науки — предстала простая и ясная теория атмосферной рефракции, созданная Ньютоном в XVII столетии и остававшаяся практически неизвестной вплоть до этой работы Крылова.

Выполняя доказательство в простом и изящном аналитическом виде, Крылов пользуется современными ему математическими методами, однако не выходя «за пределы того, чем в то время Ньютон

владел, чтобы, сохраняя сущность и метод его рассуждения, представить их в привычной теперешнему читателю форме». Восстанавливая ход рассуждений Ньютона в теореме о рефракции, Крылов сравнивает таблицы астрономической рефракции с современными ему таблицами С. Ньюкома (Simon Newcomb, 1835—1909), выпущенными в 1906 г., и Б.Г. Стремгрена (Bengt Georg Stroemgren, 1908—1987), выпущенными в 1933 г. Он приходит к важному заключению, что «эта теорема, как основная, достойна подробного и внимательного изучения, а не того беглого о ней упоминания или полного умолчания, как это делается во всех известных мне учебных руководствах по астрономии». Как позднее напишет А.Н. Крылов в своих «Воспоминаниях», теория Ньютона «по степени точности при равной затрате труда не уступает всем современным теориям, а по общности метода далеко превосходит их». Напомним, что Крылову были хорошо известны и работы Л.Эйлера по теории астрономической рефракции. Так, в 1754 г. Эйлер вывел, а в 1756 г. опубликовал дифференциальное уравнение теории астрономической рефракции для изменения зенитного расстояния наблюдаемого светила. Эйлер рассмотрел геометрические свойства светового луча в атмосфере Земли, определив его первый и второй радиусы кривизны. При этом он нашел выражения для учета рефракции при соответствующих предположениях о строении атмосферы, т. е. установил зависимость рефракции от давления и температуры атмосферы в месте наблюдения. Позднее Эйлер выводит уравнение распространяющегося в земной атмосфере светового луча. Это уравнение позволяет найти кривизну светового луча. А.Н. Крылов упоминает о тех изменениях, которые могли бы понадобиться в этих упрощенных методах вычисления рефракционной поправки для очень больших расстояний.

Итак, работы А.Н. Крылова по небесной механике и кометной астрономии оказались важными не только с исторической точки зрения, но и как пример осуществления конкретных практических потребностей российского флота в области навигации в начале XX столетия, а также как весомый успех применявшихся им методов прикладной математики [20].

Отдельный интерес представляет перевод [4] работ Гаусса по земному магнетизму, в том числе работы: Carl Friedrich Gauss. «Allgemeine Theorie der Magnetismus der Erde» (1836 г.). Гаусс выполнял эти исследования, будучи директором астрономической обсерватории Геттингенского университета, где он сотрудничал с известным физиком, геофизиком и специалистом по земному магнетизму В.Вебером (Wilhelm Eduard Weber, 1804—1891).

Астрономические проблемы А.Н. Крылов неоднократно освещал и в своих докладах по поводу юбилеев ученых (о Галилее, Ньютоне, Эйлере, Лагранже, Чебышеве, Ляпунове и др.). Крылов был блестящим знатоком истории науки и созданные им очерки о жизни ученых-классиков физико-математических наук замечательны по глубине и яркости изложения. После исторического обзора развития науки от древнегреческих философов вплоть до конца XVIII столетия Крылов отмечает вклад русских ученых в навигационную астрономию и теорию движения Луны: «История способа лунных расстояний, которым еще постоянно пользовался в 1803—1806 гг. Крузенштерн при своем кругосветном плавании, само собой разумеется, изложенная по подлинным сочинениям того времени, высоко поучительна». Здесь Крылов прежде всего имел в виду теорию Луны по Эйлеру.

Кроме обширного очерка об Эйлере в 1933 г. по случаю 150-летия со дня смерти ученого и доклада на мемориальном заседании в Академии наук, Крылов в 1934 г. опубликовал свой перевод «Новой теории движения Луны» с латинского на русский [22]. Этот перевод он выполнил, по его словам в предисловии, не для астрономов, а для техников и инженеров: «Едва ли какой-либо техник или инженер, встретив в своем деле уравнения, подобные рассмотренным Эйлером, станет искать их решения в сочинении, изданном в 1772 г.» Как всегда при своих переводах произведений классиков науки прошлого, Крылов присоединяет к лунной теории свои обстоятельные пояснения. Соответственно, с этими прибавлениями и разъяснениями труд А.Н. Крылова как переводчика, по свидетельству Комиссии Академии наук по истории знаний, «вполне соответствует потребностям нашего великого строительства и цели научно-технической серии изданий Академии наук».

### **Список литературы:**

1. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эволюент до квазикристаллов. М.: МЦНМО, 2012. — 96 с.
2. Вавилов С.И. Исаак Ньютон. 4-е изд., доп. М.: Наука, 1989. — 271 с.
3. Гаусс К.Ф. Теоретическая астрономия (Рукописи лекций Гаусса, читанных им в Геттингене в 1820—1821 гг. и записанных Купфером) / Перевод с немецкого и предисловие А.Н. Крылова. Петроград. Типография Главного адмиралтейства. 1919. — 187 с. (или в кн.: А.Н. Крылов. Собрание трудов. М.-Л. Изд-во АН СССР. — 1936. — Т. 6. — С. 299—452).

4. Гаусс К.Ф. Избранные труды по земному магнетизму. Перевод с латинского академика А.Н. Крылова // Серия «Классики науки». М.: Изд-во АН СССР, 1952. — 279 с.
5. Идельсон Н.И. Работы А.Н. Крылова по астрономии // Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. М.-Л. Изд-во АН СССР. — 1956. — Вып. 15. — С. 24—31 (или в сб.: Памяти Алексея Николаевича Крылова. М.-Л. Изд-во АН СССР. 1958. — С. 50—59).
6. Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. М.: Наука. 1975. — 496 с.
7. Крылов А.Н. Беседы о способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений. Известия Николаевской морской академии. Вып. 1. СПб. 1911. — 161 с. (или в кн.: А.Н. Крылов. Собрание трудов. М.-Л. Изд-во АН СССР. — 1936. — Т. 6. — С. 1—149).
8. Крылов А.Н. Об изменении элементов эллиптических планетных орбит. Известия Императорской С.-Петербургской Академии наук. Т. IX. 1915. С. 999—1016 (или в кн.: А.Н. Крылов. Собрание трудов. М.-Л. Изд-во АН СССР. — 1936. — Т. 6. — С. 249—266).
9. Крылов А.Н. Леонард Эйлер. Л.: Изд-во АН СССР. 1933. 39 с. (или в книге: Леонард Эйлер // Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. Под ред. акад. А.Н. Деборина. М.-Л. 1935. — 239 с. — С. 1—27).
10. Крылов А.Н. Ньютонова теория астрономической рефракции // Архив (Труды) Института истории науки и техники. М.-Л. Изд-во АН СССР. Серия 1. 1935. Вып. 5. С. 183—250 (или в кн.: А.Н. Крылов. Собрание трудов. М.-Л. Изд-во АН СССР. Т. 6. С. 151—225; или в кн.: А.Н. Крылов. Избранные труды. Серия: «Классики науки». М. Изд-во АН СССР. 1958. С. 625—730. Комментарий к статье: Там же. — С. 786—791).
11. Крылов А.Н. Судьба одной знаменитой теоремы (Эйлера-Ламберта) // Архив (Труды) Института истории науки и техники. М.-Л. Изд-во АН СССР. 1936. Серия 1. Вып. 8. С. 281—299 (или в кн.: А.Н. Крылов. Собрание трудов. М.-Л. Изд-во АН СССР. — 1936. — Т. 6. — С. 227—248).
12. Крылов А.Н. Избранные сочинения. Библиография основных трудов. Под ред. акад. Ю.А. Шиманского, с примечаниями проф. И.Г. Хановича. Л.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 792—802 (полная библиография и хроника деятельности опубликована в «Собрании трудов академика А.Н. Крылова», — т. 12, — ч. 2. — 1956).
13. Крылов А.Н. Мои воспоминания / Ответственный редактор А.П. Капица. Л.: Изд-во «Судостроение». 8-е стереотипное изд. 1984. — 480 с.
14. Лопатухина И.Е., Поляхов Н.Н., Поляхова Е.Н., Сабанеев В.С. Основные научные достижения академика А.Н. Крылова по математике, механике и истории науки // Сборник материалов междунар. конференции «Восьмые Окуневские Чтения». 2013 г. СПб. Балтийский университет «Военмех». 2013. — С. 422—424.

15. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского с примечаниями и пояснениями А.Н.Крылова // Известия Николаевской морской академии. Петроград. Книга 1. 1915. Вып. 4. 276 с., Книга 2. 1916. Вып. 5. 344 с. (или в кн.: Собрание трудов академика А.Н. Крылова. М.-Л.: Изд-во АН СССР. Т. 7. 1936; или в серии «Классики науки»: И. Ньютон. Математические начала натуральной философии. Перевод и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука. 1989. — 687 с).
16. Поляхова Е.Н., Холшевников К.В. К 150-летию со дня рождения Софьи Ковалевской (1850—1891): ее научное наследие по классической и небесной механике // Вестник С.-Петербург. ун-та. — Сер. 1. — Вып. 2 (№ 9). — 2001. — С. 3—26.
17. Поляхова Е.Н., Холшевников К.В. Некоторые задачи прикладной математики – небесная механика, геодезия, картография — в работах академика М.В.Остроградского и его научной школы (к юбилею ученого). // Вестник С.-Петербург. ун-та. Серия 10. — 2007. — Вып. 1. — С. 112—136.
18. Поляхова Е.Н. Классическая небесная механика в работах Петербургской школы математики и механики в XIX веке. СПб. Изд-во «Нестор-История». 2012. — 140 с. (или 2-е изд. Стереотипное, 2013).
19. Смирнов В.И. Научное творчество Алексея Николаевича Крылова // В кн.: Штрайх С.Я. Алексей Николаевич Крылов. Его жизнь и деятельность. ГИТТЛ. М. 1950. (Серия: «Люди русской науки»). — С. 76—87.
20. Тюлина И.А., Чиненова В.Н. Об основах преподавания механики (к 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова) // Труды XI международные Колмогоровских чтений, Ярославль, 2013. — С. 324—330.
21. Холшевников К.В. Небесная механика. В кн.: История астрономии в России и СССР. Под ред. акад. В.В. Соболева. М. Изд-во «Янус-К». 1999. — С. 78—132.
22. Эйлер Л. Новая теория движения Луны. Перевод с латинского 1-ой части первой книги и извлечений из ее 2-ой и 3-ей частей с примечаниями и пояснениями академика А.Н.Крылова. Л.: Изд-во АН СССР. 1934. — 208 с. (или в кн.: А.Н.Крылов. Собрание трудов. М.–Л. Изд-во АН СССР. 1937. Дополнение к т. 5 и т. 6. 248 с.).
23. Krylov A.N. On a Theorem of Sir Isaac Newton. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 1924. V. 84. № 5. P. 392—395. (или «Об одной теореме Исаака Ньютона» в кн.: А.Н. Крылов. Собрание трудов. М.–Л. Изд-во АН СССР. — 1936. — Т. 6. — С. 273—277).
24. Krylov A.N. On Sir Isaac Newton's Formula for the Attraction of a Spheroid on a Point of its Axis. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 1925. V. 85. № 6. P. 571—575. (или «О формуле Ньютона для притяжения сфероидом точки, лежащей на его оси» в кн.: А.Н. Крылов. Собрание трудов. М.–Л. Изд-во АН СССР. — 1936. — Т. 6. — С. 267—271).

25. Krylov A.N. On Sir Isaac Newton's Method of Determining the Parabolic Orbit of a Comet. // *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 1925. V. 85. № 7. P. 640—656. (или «О методе Ньютона определения параболических орбиты кометы» в кн.: А.Н. Крылов. Собрание трудов. М.-Л. Изд-во АН СССР. — 1936. — Т. 6. — С. 279—298.)
26. Polyakhova E.N. To Recent 150th Anniversary of Sofia Kovalevskaya (1850—1891): Her Scientific Legacy in Celestial Mechanics of Equilibrium Figures of Fluid Mass in Axial Rotation. In: «Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems» // *Astronomical Society of Pacific (ASP) Conference Series*. S. Petersburg. G. Bird et al. Eds. — 2004. — V. 316. — P. 303—312.



## СЕКЦИЯ 4.

### БИОЛОГИЯ

#### 4.1. БОТАНИКА

#### ИЗУЧЕНИЕ АНАТОМИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ *PHLOMIS MAXIMOWICZII* REGEI И *ANGELICA VIRIDIFLORA* (TURCZ.) BENTH. EX MAXIM. ИЗ ДАЛЬНЕГО ВОСТОКА

***Ишмуратова Маргарита Юлаевна***

*канд. биол. наук, доцент кафедры фармацевтических дисциплин  
Карагандинского университета «Болашак»,  
Республика Казахстан, г. Караганды  
E-mail: [margarita.ishmur@mail.ru](mailto:margarita.ishmur@mail.ru)*

***Сүлеймен Ерлан Мэлсұлы***

*канд. хим. наук, PhD, директор института прикладной химии,  
доцент кафедры химии ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,  
Республика Казахстан, г. Астана  
E-mail: [suleimen\\_em@enu.kz](mailto:suleimen_em@enu.kz)*

***Горовой Петр Григорьевич***

*академик РАН, профессор, лаборатория хемотаксономии  
Тихоокеанского института биоорганической химии имени Г.Б.  
Елякова Дальневосточного отделения РАН,  
РФ, г. Владивосток,  
E-mail: [petrgorovoy@gmail.com](mailto:petrgorovoy@gmail.com)*

***Дудкин Роман Васильевич***

*канд. биол. наук, доцент Тихоокеанского института биоорганической  
химии им. Г.Б. Елякова Дальневосточного отделения РАН,  
Дальневосточный федеральный университет,  
Ботанический сад ДВО РАН,  
РФ, г. Владивосток  
E-mail: [r\\_doudkin@mail.ru](mailto:r_doudkin@mail.ru)*

**ANATOMICAL STUDY OF *PHLOMIS MAXIMOWICZII*  
REGEL AND *ANGELICA VIRIDIFLORA* (TURCZ.) BENTH.  
EX MAXIM. FROM THE FAR EAST**

***Ishmuratova Margarita***

*candidate of biol. Sciences, Assistant Professor  
of Pharmaceutical Sciences Karaganda University "Bolashak",  
Republic of Kazakstan, Karagandy*

***Suleimen Yerlan***

*candidate of Chem. Science, PhD, Director of the Institute of Applied  
Chemistry ENU, Associate Professor of Chemistry Department of  
L.N. Gumilev ENU,  
Republic of Kazakstan, Astana*

***Gorovoy Peter***

*academician of RAS, Professor, Laboratory Chemotaxonomy  
of G.B. Yeljakov Pacific Institute of Bioorganic Chemistry FEB RAS,  
Russia, Vladivostok*

***Doudkin Roman***

*candidate of biol. Sciences, Assistant Professor  
of G.B. Yeljakov Pacific Institute of Bioorganic Chemistry of FEB RAS,  
the Far Eastern Federal University, Botanical Garden Institute  
of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Russia, Vladivostok*

**АННОТАЦИЯ**

Проведено изучение анатомическое строение растений *Phlomis maximowiczii* Regel и *Angelica viridiflora* (Turcz.) Benth. ex Maxim. Из Дальнего Востока. Установлено, что диагностическими признаками *Ph. maximowiczii* являются форма клеток эпидермиса листа и чашелистников, форма и особенности размещения вместилищ, строение звездчатых трихом эпидермиса листа, а типичными особенностями строения *A. viridiflora* — форма клеток эпидермиса листа и плода, типы устьичного аппарата и форма секреторных канальцев.

**ABSTRACT**

The study of the anatomical structure of plant material of *Phlomis maximowiczii* Regel and *Angelica viridiflora* (Turcz.) Benth. ex Maxim. from the Far East was done. Found that diagnostic characters of *Ph. maximowiczii* are the shape of the epidermal cells of the sheet and sepal,

the shape and features of placing receptacles, structure stellate trichomes leaf epidermis, and typical structural features of *A. viridiflora* — form of the epidermal cells of leaves and fruits, types of stomatal apparatus and the shape of the secretory tubules.

**Ключевые слова:** анатомическое строение; *Phlomis maximowiczii* Regel; *Angelica viridiflora* (Turcz.) Benth. ex Maxim.

**Keywords:** anatomy; *Phlomis maximowiczii* Regel; *Angelica viridiflora* (Turcz.) Benth. ex Maxim.

*Phlomis maximowiczii* Regel (зопник Максимовича, сем. *Lamiaceae*) — многолетнее травянистое растение 80—100 см высотой. Стебли прямые, в верхней части ветвистые, четырехгранные. Листья тонкие, травянистые, прикорневые — широко-эллиптические, заостренные, остро пильчатые или зубчатые; верхние — сердцевидные или яйцевидные. Соцветие состоит из расставленных многоцветковых мутовок. Цветки сидячие, чашечка трубчатая, цветок двугубый [8].

Вид растет в лиственных и смешанных лесах, по опушкам и по берегам рек Приморья и Приамурья.

*Angelica viridiflora* (Turcz.) Benth. ex Maxim. (дудник зеленоцветковый, сем. Зонтичные — *Apiaceae*) — двулетнее или многолетнее травянистое растение до 50—100 см высотой. Стебли прямостоячие, ребристые, от середины ветвистые, в нижней части полые, в верхней части сердцевина заполнена. Листья крупные, 15—30 см длиной и 13—20 см шириной, дважды-перистые, листовая пластинки в очертании треугольная. Соцветие — сложные зонтики, центральный зонтик короче боковых. Плоды яйцевидные, 6—7 мм длиной и 4,5 мм шириной. При основании с глубокой выемкой, спинные ребра нитевидные, краевые — крылатые, ширина крыла около 1,5 мм [8].

Вид произрастает на сырых лугах, распространен в Восточной Сибири, на юге российского Дальнего Востока, в Северо-Восточном Китае.

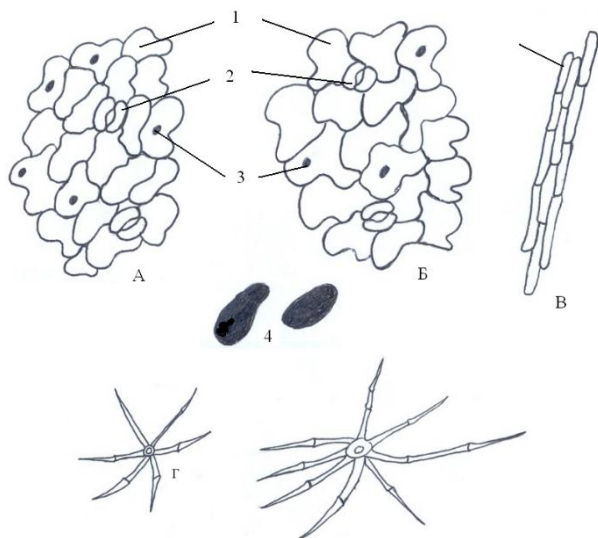
Материалы и методы. Объектом исследования являлись надземные части (листья и стебли) *Phlomis maximowiczii* Regel, собранные в фазе плодоношения; и надземные части (листья, стебли, плоды) и подземные органы (корни) *Angelica viridiflora*, собранные в фазе плодоношения в Приморском крае.

При выполнении анатомического исследования сухие образцы надземных и подземных органов размачивали в горячей воде и размягчали в смеси глицерин-спирт-вода дистиллированная в соотношении 1:1:1 [4; 6], кипятили в 5 %-ном водном растворе гидроксида калия.

Схемы анатомического строения выполняли вручную. При описании анатомического строения использовали принципы, изложенные в трудах В.Н. Вехова, Л.И. Лотовой [2; 5], Л.К. Сафиной [7] и И.О. Байтулина [1].

#### ***Анатомия Phlomis maximowiczii***

Клетки верхнего эпидермиса овальные, слабо извилисто-стенные, нижнего эпидермиса — с более извилистыми стенками (рис. 1), толстостенные, снаружи покрыты слоем кутикулы. Над жилками листа клетки эпидермиса — прозенхимной формы. Устьица аномоцитного типа (оказаны 4 и более клетками эпидермы) и встречаются на обеих сторонах листа, но преобладают на нижней. Кутикула образует складки вокруг устьичных аппаратов.



**Рисунок 1. Препарат листа *Ph. maximowiczii* с поверхности. Ув. 15x10. А — верхний эпидермис, Б — нижний эпидермис, В — эпидермис на жилке листа, Г — звездчатые трихомы; 1 — основные клетки эпидермы, 2 — устьица, 3 — капли эфирного масла, 4 — вместилища**

Листья редко опушены крупными звездчатыми трихомами, которые преимущественно размещены на нижней стороне листовой

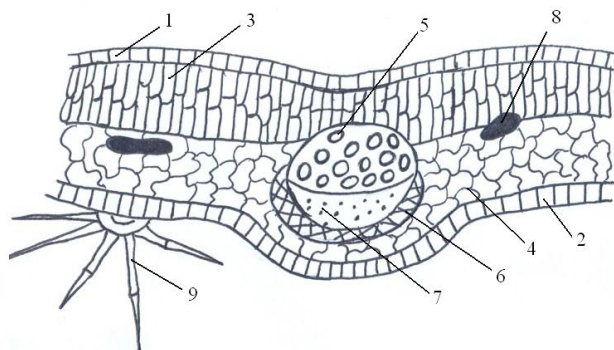
пластины. В отдельных неспециализированных клетках эпидермиса отмечены капли эфирного масла.

Вдоль жилок листа отмечены овальные или удлинённые, темно-окрашенные вместилища с эфирными маслами, схизогенного происхождения, которые просвечиваются через эпидерму.

На поперечном срезе лист уплощенный, тонкий, дорзо-вентрального строения (рис. 2). С обеих сторон лист покрыт эпидермисом, на поверхности которого хорошо просматриваются крошечные звездчатые трихомы. Мезофилл дифференцирован на столбчатую и губчатую ткани.

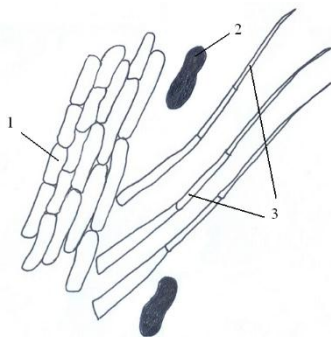
Проводящие пучки коллатерального типа (ксилема сверху, флоэма снизу), закрытые (камбий отсутствует). Пучок со стороны флоэму окружен «шапкой» из склеренхимы, выполняющей опорную функцию.

В мезофиле листа хорошо просматриваются вместилища с эфирным маслом.



**Рисунок 2. Схема поперечного среза листа *Ph. taximowiczii*. Уб. 5x10. 1 — верхний эпидермис, 2 — нижний эпидермис, 3 — столбчатый мезофилл, 4 — губчатый мезофилл, 5 — ксилема, 6 — флоэма, 7 — склеренхима, 8 — схизогенные вместилища, 9 — звездчатый трихомы**

Эпидермис чашелистников (рис. 3) состоит из прозенхимных прямостенных клеток с тонкими стенками. По поверхности многочисленные крупные простые многоклеточные трихомы. Эфирные масла сосредоточены в мезодерме чашелистников, в схизогенных вместилищах.



**Рисунок 3. Эпидермис чашелистника *Ph. taximowiczii*. Ув. 15x10.**  
**1 — основные клетки эпидермиса, 2 — вместилища с эфирным маслом, 3 — простые многоклеточные трихомы**

Стебель на поперечном срезе 4-гранный, с хорошо выраженными выступающими ребрами. Внутреннее строение характерно для представителей сем. Губоцветных.

Периферическая часть покрыта 1-слойным эпидермисом, под ним в углах находятся участки угловой колленхимы, между углами 2—3 слоя хлоренхимы. Центральный цилиндр отделен от коровой зоны слоем эндодермы. Проводящая система непучкового типа, состоит из кольца флоэмы снаружи и кольца ксилемы внутри. Внутренняя часть стебля заполнена округлыми стенками сердцевинной паренхимы.

Таким образом, диагностическими признаками сырья зопника Максимовича являются форма клеток эпидермиса листа и чашелистников, форма и особенности размещения вместилищ, строение звездчатых трихом эпидермиса листа.

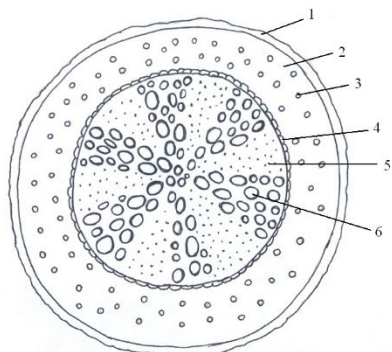
#### ***Anatomia Angelica viridiflora* (Turcz.) Benth. ex Maxim.**

##### **Анатомическое строение корня**

Корни дудника снаружи покрыты бурой, часто отслаивающейся, плотной пробковой покровной тканью (рис. 4), которая граничит с коровой паренхимой. В коровой зоне отмечены мелкие овальные вместилища схизогенного происхождения, а также слабо выраженные паренхимные лучи.

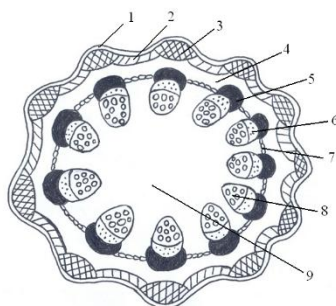
Эндодерма представляет собой сильно пористую структуру, служащую для пропускания веществ и запасания крахмала. Паренхимные клетки флоэмы и перициклы образуют замкнутый лентовидный слой камбиальных клеток, огибающий лучи ксилемы с наружной стороны, а лучи флоэмы с внутренней стороны.

Центральный цилиндр корня состоит из перицикла и сложного радиального проводящего пучка, в котором тяжи протоксилемы чередуются с тяжами протофлоэмы, образуется полиархные пучки. Имеющие от 10 до 15 компонентов.



**Рисунок 4. Анатомическое строение корня *A. viridiflora* на поперечном срезе (схема). Ув. 5x10. 1 — пробка, 2 — коровая паренхима, 3 — схизогенные вместилища, 4 — эндодерма, 5 — флоэма, 6 - ксилема**

**Анатомическое строение стебля дудника зеленоцветного.**  
Анатомическое строение стебля дудника зеленоцветного типично для класса Двудольные (рис. 5).



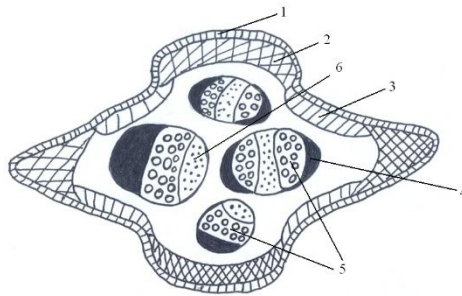
**Рисунок 5. Поперечный срез стебля *A. viridiflora* (схема). Ув. 5x10. 1 — эпидермис, 2 — хлоренхима, 3 — колленхима, 4 — коровая паренхима, 5 — склеренхима, 6 — флоэма, 7 — эндодерма, 8 — ксилема, 9 — сердцевинная паренхима**

Так, под эпидермисом расположены 2—3 слоя хлорофиллоносных клеток (хлоренхима), чередующихся с участками угловатой колленхимы, имеющей почковидную форму на поперечном срезе. Коровую зону с паренхимой от центрального цилиндра отделяет 1-слойная эндодерма.

Проводящие пучки коллатеральные, закрытые, расположены кольцом. Склеренхимные волокна образуют тяжи в виде «шапок» со стороны флоэмы пучков. Центральная часть в основании стеблей — поляя, в средней и верхней части — заполнены рыхлыми округлыми клетками сердцевинной паренхимы.

**Анатомическое строение листьев.** Листья дудника рассеченные до черешка, с хорошо развитым, крупным черешком. В нижней части черешок переходит во вздутое влагалище (рис. 6).

На поперечном срезе черешок слегка сплюснутый в дорзо-вентральном направлении, широко-ребристый, по бокам образует «крылья». По периферии размещен 1-слойный эпидермис, состоящий из округлых клеток, покрытый слоем кутикулы. Форму и структуру ребер поддерживает пластинчатая колленхима, между которой размещается 2-слойная хлоренхима. Внутренняя часть заполнена мезофилом, в котором размещены коллатеральные и биколлатеральные проводящие пучки, открытого типа.



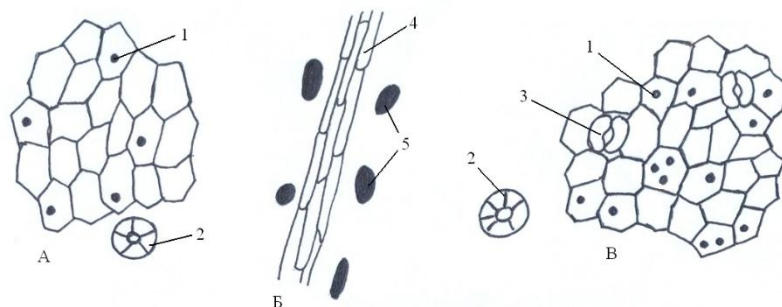
**Рисунок 6.** *Схема поперечного среза черешка листа A. viridiflora. Ув. 5x10. 1 — эпидермис, 2 — колленхима, 3 — хлоренхима, 4 — склеренхима, 5 — ксилема, 6 — флоэма*

Пластинки листьев и их конечные доли мезоморфные и мягкие, что подтверждается их анатомическим строением (рис. 7). Поверхность листа покрыта эпидермисом, состоящим из многоугольных клеток. Устьица аномоцитного типа (замыкающие клетки окружены 4 и более клетками эпидермиса), размещены преиму-



щественно на нижней стороне листовой пластинки. В отдельных клетках эпидермиса можно отметить капли эфирного масла.

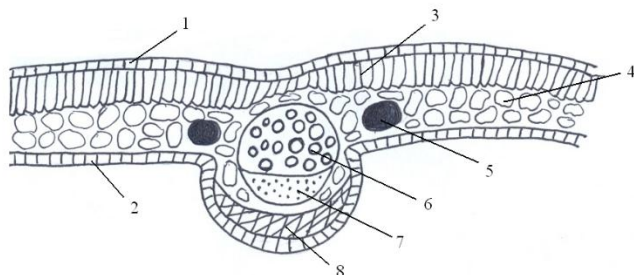
Эфирно-масличные железы округлой формы, погружены в эпидерму листа. В области жилок листа клетки эпидермиса прозенхимной формы. Вдоль главной и боковых жилок размещены темно-окрашенные вместилища схизогенного происхождения, обычно овальной, реже округлой формы.



**Рисунок 7. Препарат листа *A. viridiflora* с поверхности. Ув. 15x10.**

***A* — верхний эпидермис, *Б* — средняя жилка, *В* — нижний эпидермис; 1 — неспециализированные клетки эпидермиса с каплями эфирного масла, 2 — эфирно-масличные железы, 3 — устьица, 4 — прозенхимные эпидермальные клетки в области жилки листа, 5 — вместилища**

На поперечном срезе в области главной жилки лист дорзовентрального типа (рис. 8), то есть наблюдается развитие столбчатого мезофила под верхним эпидермисом, губчатого — под нижним эпидермисом. Столбчатые клетки расположены в 1 ряд. Клетки эпидермиса на поперечном срезе прямоугольной формы, плотно прилегают друг к другу. Поверхность клеток покрыта слоем кутикулы, выполняющей защитную и отражательную функции.



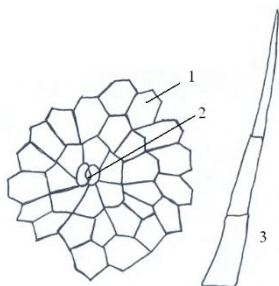
**Рисунок 8. Схема поперечного среза листа *A. viridiflora*. Ув. 15x10.**  
 1 — верхний эпидермис, 2 — нижний эпидермис, 3 — столбчатый мезофил, 4 — губчатый мезофил, 5 — вместилища, 6 — ксилема, 7 — флоэма, 8 — флоэма

В области крупных жилок наблюдается хорошее развитие губчатой ткани, с нижней стороны жилка укреплена тяжем пластинчатой колленхимы. Вдоль жилок отмечены округлые на поперечном срезе схизогенные вместилища с секретом. Проводящие пучки многочисленные, коллатерального типа (ксилема сверху, флоэма снизу), закрытые (камбий отсутствует).

**Анатомическое строение плодов дудника зеленоцветкового** приведено в монографии [3], рисунок 93.

Экзокарп состоит из тангентально удлинённых клеток, которые имеют более мелкое строение над спинными ребрами. Мезокарп состоит из 3—5 рядов частично сжатых паренхимных клеток с пигментированными оболочками. Секреторные каналы коричневые или темно-коричневые, узкие и лентовидные; в поперечном сечении каналы овальные или линзовидные, с небольшим просветом.

Экзокарп семени (рис. 9) состоит из многоугольных прямостенных клеток. Устьица энциклоцитного типа. Под экзокарпом просвечиваются членистые, темно-окрашенные секреторные каналы.



**Рисунок 9. Схема экзокарпа плода *A. viridiflora*. Ув. 10x15.  
1 — клетки экзокарпа, 2 — устьице, 3 — секреторные каналцы**

Таким образом, типичными особенностями строения дудника зеленоцветкового являются ребристый стебель, короткий центральный зонтик, форма клеток эпидермиса листа.

#### **Список литературы:**

1. Байтулин И.О. Основы ризологии. Алматы: Гьлым, 2001. — 330 с.
2. Вехов В.Н., Лотова Л.И., Филин В.Р. Практикум по анатомии и морфологии высших растений. М.: МГУ, 1980. — 560 с.
3. Горовой П.Г. Зонтичные Приморья и Приамурья. М.-Л. «Наука», 1966. — 296 с.
4. Долгова А.А., Ладыгина Е.Я. Руководство к практическим занятиям по фармакогнозии. М.: Медицина, 1977. — 255 с.
5. Лотова Л.И. Ботаника: Морфология и анатомия высших растений. М.: КомКнига, 2007. — 512 с.
6. Прозина М.Н. Ботаническая микротехника. М.: Высшая школа, 1960. — 206 с.
7. Сафина Л.К. Ферулы Средней Азии и Казахстана // Тр. Института ботаники и фитоинтродукции. Т. 18 (3). Алматы: ЛЕМ, 2012. — 244 с.
8. Флора СССР. Т. 17. Л.-М.: Изд-во АН СССР, 1951. — С. 21—22.

**ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
МЕСТООБИТАНИЙ ВИДОВ РОДА VALERIANA  
В БАШКИРСКОМ ЗАУРАЛЬЕ**

***Харрасова Гульемеш Ваисовна***

*канд. биол. наук,  
старший преподаватель Сибайского института (филиал)  
Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Сибай  
E-mail: [ygulemesh@mail.ru](mailto:ygulemesh@mail.ru)*

***Губайдуллина Миляуша Азаматовна***

*студент 4 курса Сибайского института (филиал)  
Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Сибай  
E-mail: [89279400190@mail.ru](mailto:89279400190@mail.ru)*

***Аралбаева Юлия Усмановна***

*студент 4 курса Сибайского института (филиал)  
Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Сибай  
E-mail: [aralbaeva14@mail.ru](mailto:aralbaeva14@mail.ru)*

***Билалова Фануза Равиловна***

*студент 4 курса Сибайского института (филиал)  
Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Сибай  
E-mail: [8279649097@mail.ru](mailto:8279649097@mail.ru)*

# ENVIRONMENTAL CHARACTERISTICS OF SPECIES SITES OF VALERIANA GENUS IN BASHKIR TRANS-URALS

**Gulemesh Harrasova**

*candidate of Biological Sciences, Senior Lecturer,  
Sibay Institute (Branch) of Bashkir State University,  
Russia, Sibay*

**Milyausha Gubaidullina**

*4-year student, Sibay Institute (Branch) of Bashkir State University,  
Russia, Sibay*

**Julia Aralbaeva**

*4-year student, Sibay Institute (Branch) of Bashkir State University,  
Russia, Sibay*

**Fanuza Bilalova**

*4-year student, Sibay Institute (Branch) of Bashkir State University,  
Russia, Sibay*

## АННОТАЦИЯ

Изучена экологическая характеристика местообитаний 4 ценопопуляций *Valeriana dubia*, 7 ценопопуляций *Valeriana tuberosa* в условиях Башкирского Зауралья Республики Башкортостан. Показано, что виды рода *Valeriana* произрастают на довольно богатых почвах, по фактору увлажнения являются ксеромезофитами.

## ABSTRACT

The ecological site characteristics of 4 *Valeriana dubia* cenopopulation, 7 *Valeriana tuberosa* cenopopulation in Bashkir Trans-Urals conditions of Republic of Bashkortostan are under study. It is shown that *Valeriana* genus species grow at a fairly rich soil and according to the rainfall factor they are xeromesophytes.

**Ключевые слова:** Башкирское Зауралье; *Valeriana dubia*; *Valeriana tuberosa*; экологические характеристики.

**Keywords:** Bashkir Trans-Urals; *Valeriana dubia*; *Valeriana tuberosa*; ecological characteristics.

В Башкортостане распространены четыре вида рода *Valeriana*: *V. officinalis* L., *V. wolgensis* Kazak., *V. dubia* Bunge и *V. tuberosa* L. [5, с. 256].

С 1999 года в Республике Башкортостан ведутся комплексные исследования видов рода *Valeriana*, в том числе по эколого-фитоценоотическим условиям произрастания [1, с. 28—29; 7, с. 106—107; 8, с. 91—93]. В настоящей работе представлены дальнейшие исследования экологических характеристик ценопопуляций некоторых видов рода *Valeriana*.

Объектом наших исследований явились *V. dubia* Bunge и *V. tuberosa* L.

В Республике Башкортостан *V. dubia* и *V. tuberosa* встречается в степной зоне Башкирского Предуралья и Зауралья, в горных степях Южного Урала, на каменистых склонах, склонах холмов, в горных, ковыльно-разнотравных степях, кустарниках [1, с. 28—29; 2, с. 147—156; 3, с. 12—18; 4, с. 239; 7, с. 106—107].

В Башкирском Зауралье виды произрастают в сообществах, относящихся к классу *Festuco-Brometea* Br-Bl. etTx. 1943 [1, с. 28—29; 2, с. 147—156; 7, с. 106—107; 8, с. 91—93].

Цель данной работы — исследовать экологическую приуроченность видов рода *Valeriana* на территории Башкирского Зауралья.

Исследования проводили в 2014 году на территориях Баймакского и Хайбуллинского районов Республики Башкортостан. Всего исследовано 4 ценопопуляции *V. dubia* и 7 ценопопуляций *V. tuberosa*.

Оценка экологических условий местообитания ценопопуляций *V. dubia* проведена по составу видов в сообществах с использованием шкал Л.Г. Раменского с соавт. (1956) [6, с. 530].

Анализ экологической оценки местообитаний *V. dubia* (табл.1) показал, что в Баймакском районе вид произрастает на местообитаниях с сухолуговым увлажнением. Местообитания с данным показателем увлажнения характерны для сухих и свежих лугов. *Valeriana dubia* предпочитает довольно богатые почвы. Изученные ценопопуляции *V. dubia* испытывают слабое (ЦП 4), умеренное (ЦП 1,2) и сильное (ЦП 3) стадии антропогенной нагрузки в виде выпаса скота.

Таблица 1.

**Экологические характеристики местообитаний ценопопуляций  
*Valeriana dubia* на территории Баймакского района**

Ценопопуляции, локалитет	Увлажнение почвы		Богатство и засоление почвы		Пастбищная дигрессия	
	степень	ступень	степень	ступень	степень	ступень
1	2	3	4	5	6	7
1. Баймакский р-н, п. Старый Сибай, восточный склон горы хр.Ирандык	Сухолуговое	55,5	Довольно богатые	9,5	Умеренное влияние выпаса	5,5
2. Баймакский р-н, п. Старый Сибай, восточный склон горы хр. Ирандык	Сухолуговое	61	Довольно богатые	9,5	Умеренное влияние выпаса	5,5
3. Баймакский р-н, п. Аркаим, северный склон горы хр. Ирандык	Сухолуговое	52	Довольно богатые	11,5	Сильное влияние выпаса	7
4. Баймакский р-н, п. Старый Сибай, северо- восточный склон горы хр. Ирандык	Сухолуговое	53	Довольно богатые	11,5	Слабое влияние выпаса	3

Местообитания ценопопуляций *V. tuberosa* (табл.2) на территориях Баймакского и Хайбуллинского районов характеризуются довольно богатыми почвами (10,5 — 13 ступени по шкале Раменского). По фактору увлажнения все ценопопуляции *V. tuberosa* на территории Баймакского района приурочены к почвам с сухолуговым увлажнением (57,5 — 63 ступени). В условиях Хайбуллинского района ценопопуляции *V. tuberosa* предпочитают почвы со среднестепным (45—46 ступени) и лугово-степным (52 ступень) увлажнением. Влияние пастбищной дигрессии от слабого (4 ступень) до сильного (6,5 ступень).

Таблица 2.

**Экологические характеристики местообитаний ценопопуляций *Valeriana tuberosa* на территориях Баймакского и Хайбуллинского районов**

Ценопопуляции, локалитет	Увлажнение почвы		Богатство и засоление почвы		Пастбищная дигрессия	
	степень	ступень	степень	ступень	степень	ступень
1. Баймакский р-н, п. Старый Сибай, восточный склон горы хр. Ирандык	Сухолуговое	57,5	Довольно богатые	10,5	Сильное влияние выпаса	6,5
2. Баймакский р-н, п. Старый Сибай, северо-восточный склон горы хр. Ирандык	Сухолуговое	57,5	Довольно богатые	12,5	Умеренное влияние выпаса	5
3. Баймакский р-н, п. Старый Сибай северный склон горы хр. Ирандык	Сухолуговое	58	Довольно богатые	10,5	Умеренное влияние выпаса	5
4. Баймакский р-н, п. Старый Сибай западный склон горы хр. Ирандык	Сухолуговое	63	Довольно богатые	13	Сильное влияние выпаса	6,5
5. Хайбуллинский р-н с. Самарское	Средне степное	46	Довольно богатое	11	Умеренное влияние выпаса	5
6. Хайбуллинский р-н с. Самарское	Средне степное	45	Довольно богатое	11	Сильное влияние выпаса	6
7. Хайбуллинский р-н д. Макан	Лугово-степное	52	Довольно богатое	13	Слабое влияние выпаса	4

Таким образом, в условиях Башкирского Зауралья виды характеризуются узкой экологической пластичностью, по фактору богатства и засоленности почв являются эутрофами, по фактору увлажнения — ксеромезофитами, что подтверждают литературные данные [1, с. 28—29; 2, с. 147—156; 7, с. 106—107; 8, с. 91—93].

Все изученные ценопопуляции подвержены антропогенному воздействию в виде выпаса скота.



## Список литературы:

1. Барышникова Н.И., Харрасова Г.В. Эколого-фитоценотическая характеристика ценопопуляций *Valeriana dubia* Bunge в Башкирском Зауралье // Ботанические исследования на Урале: материалы Региональной с международным участием научной конференции, посвященной памяти П.Л. Горчаковского. Пермь, 2009. — С. 28—29.
2. Ишмуратова М.М., Ишбирдин А.Р., Черосов М.М., Барышникова Н.И., Сулейманова Э.Н. О дифференциации видов рода *Valeriana* ряда *Officinales* // Ученые записки НТГСПА. Нижний Тагил, 2009. — С. 147—156.
3. Кучеров Е.В., Галева А.Х. Ресурсы основных видов дикорастущих лекарственных растений в Башкирии / БНЦ УрО АН СССР. Уфа, 1991. — 150 с.
4. Красная книга Республики Башкортостан. Т. I. Редкие и исчезающие виды высших сосудистых растений / Авт.-сост. Е.В. Кучеров, А.А. Мулдашев, А.Х. Галеева. Уфа: Китап, 2001. — 280 с.
5. Определитель высших растений Башкирской АССР / Ю.Е. Алексеев, А.Х. Галеева, И.А. Губанов. М.: Наука, 1989. — 375 с.
6. Раменский Л.Г., Цаценкин И.А., Чижиков О.Н., Антипин Н.А. Экологическая оценка кормовых угодий по растительному покрову. М., 1956. — 530 с.
7. Сулейманова Э.Н., Барышникова Н.И. Экологические и фитоценотические характеристики рода *Valeriana* в Республике Башкортостан // Экология в современном мире: взгляд научной молодежи: материалы Всерос. конф. молодых ученых. Улан-Удэ, 2007: Изд-во ГУЗ РЦМП МЗ РБ. — С. 106—107.
8. Харрасова Г.В., Губайдуллина М.А. Эколого-фитоценотические характеристики местообитаний ценопопуляций *Valeriana tuberosa* L. На территории Хайбуллинского района Республики Башкортостан // Эколого-биологические и медицинские проблемы регионов России и сопредельных территорий: материалы Всерос. научной конф. (Сибай, 9—10 октября 2014 г.) Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. — С. 91—93.

## 4.2. МЕДИЦИНСКАЯ БИОЛОГИЯ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИМОРФНЫХ МАРКЕРОВ ГЕНОВ РЕПАРАЦИИ ДНК *HOGG1*, *XRCC1* И *ERCC2* И ИХ АССОЦИИ С РИСКОМ РАЗВИТИЯ НЕМЕЛКОКЛЕТОЧНОГО РАКА ЛЕГКОГО И РАКА ВЕРХНИХ ДЫХАТЕЛЬНЫХ ПУТЕЙ

***Заварыкина Татьяна Михайловна***

*канд. биол. наук, научный сотрудник ФГБУН Института  
биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН,  
РФ, г. Москва*

*E-mail: [tpalievskaya@yandex.ru](mailto:tpalievskaya@yandex.ru)*

***Аткарская Марина Васильевна***

*научный сотрудник ФГБУНИ института биохимической физики  
им. Н.М. Эмануэля РАН,  
РФ, г. Москва*

*E-mail: [4017088@mail.ru](mailto:4017088@mail.ru)*

***Бурдённый Алексей Михайлович***

*канд. биол. наук, старший научный сотрудник  
ФГБНУ Научно-Исследовательского Института  
Общей Патологии и Патофизиологии,  
РФ, г. Москва*

*E-mail: [burdennyu@gmail.com](mailto:burdennyu@gmail.com)*

***Логинов Виталий Игоревич***

*канд. биол. наук, ведущий научный сотрудник  
ФГБНУ Научно-Исследовательского Института  
Общей Патологии и Патофизиологии,  
РФ, г. Москва*

*E-mail: [loginov7w@gmail.com](mailto:loginov7w@gmail.com)*

***Жижина Галина Павловна***

*д-р. хим. наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН  
Института биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН,  
РФ, г. Москва*

*E-mail: [zhizhina@sky.chph.ras.ru](mailto:zhizhina@sky.chph.ras.ru)*

**Бурлакова Елена Борисовна**  
*д-р биол. наук, профессор, зам. директора ФГБУН  
Института биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН,  
РФ, г. Москва*  
E-mail: [seren@sky.chph.ras.ru](mailto:seren@sky.chph.ras.ru)

**ANALYSIS OF POLYMORPHIC MARKERS OF HOGG1,  
XRCC1 AND ERCC2 GENES AND THEIR ASSOCIATIONS  
WITH NONSMALL CELL LUNG CANCER AND CANCER  
OF UPPER AIRWAY**

**Tatiana Zavarykina**  
*candidate of biological sciences, researcher  
of Emanuel Institute of Biochemical Physics RAS,  
Russia, Moscow*

**Marina Atkarskaya**  
*researcher of Emanuel Institute of Biochemical Physics RAS,  
Russia, Moscow*

**Alexey Burdenny**  
*candidate of biological sciences, senior researcher  
of FSBSI Institute of General Pathology and Pathophysiology,  
Russia, Moscow*

**Vitaly Loginov**  
*candidate of biological sciences, leading researcher  
of FSBSI Institute of General Pathology and Pathophysiology,  
Russia, Moscow*

**Galina Zhizhina**  
*doctor of chemical sciences, leading researcher  
of Emanuel Institute of Biochemical Physics RAS,  
Russia, Moscow*

**Elena Burlakova**  
*doctor of biological sciences, professor, deputy director  
of Emanuel Institute of Biochemical Physics RAS,  
Russia, Moscow*

## АННОТАЦИЯ

Изучен полиморфизм генов репарации ДНК *hOGG1Ser326Cys*, *XRCC1Arg399Gln*, *ERCC2Lys751Gln*, ассоциация с риском заболевания немелкоклеточным раком легкого (НМРЛ), его подтипов, раком верхних дыхательных путей (ВДП) и влияния курения. Генотипы определяли методом ПЦР-ПДРФ. Ассоциации маркеров *ERCC2Lys751Gln* и *XRCC1Arg399Gln* с риском развития НМРЛ и рака ВДП не обнаружено, выявлена их связь с заболеванием аденокарциномой (подтип НМРЛ). Повышенный риск развития рака ВДП при курении выявлен у носителей аллеля *Gln* маркера *XRCC1Arg399Gln* и пониженный — у носителей аллеля *Cys* маркера *hOGG1Ser326Cys*.

## ABSTRACT

In this work we investigated the polymorphism of DNA repair genes *hOGG1Ser326Cys*, *XRCC1Arg399Gln*, *ERCC2Lys751Gln*, and their association with the risk of upper airway (UAC), nonsmall cell lung cancer (NSLC) and its subtypes. Genotypes were determined by PCR-RFLP analyses. There was no association of *ERCC2 Lys751Gln* and *XRCC1 Arg399Gln* markers with NSLC risk but there were their associations with risk of adenocarcinoma (subtype of NSLC). We found the decrease of UAC risk for the *Cys* allele of *hOGG1Ser326Cys* marker. Marker *Arg399Gln* *XPCC1* gene shows harmful effect of smoking in case of UAC.

**Ключевые слова:** *hOGG1*; *XRCC1*; *ERCC2*; немелкоклеточный рак легкого; рак верхних дыхательных путей; полиморфный маркер.

**Keywords:** *hOGG1*; *XRCC1*; *ERCC2*; Lung Cancer; Upper Airway Cancer; DNA Polymorphism.

## Введение

Рак легкого является наиболее часто диагностируемым онкологическим заболеванием с высоким уровнем смертности во всем мире. Не менее важен с социальной точки зрения рак верхних дыхательных путей (ВДП), который включает в себя рак глотки, гортани, трахеи [7; 21]. Выявлено большое число различных факторов риска для данных заболеваний, среди которых лидирующее место занимает курение. Это подтверждается фактом, что около 85% больных раком легкого являются курильщиками. Однако, только у 15% курящих людей возникает данное заболевание [5]. Это подтверждает наличие индивидуальных предрасполагающих генетических особенностей у этой части курящих людей.

Известно, что предрасположенность к развитию рака складывается из особенностей жизни человека, в том числе наличия вредных привычек, и генетических факторов. Для выявления генетической предрасположенности к развитию рака легкого необходимо исследовать возможные мутации в генах различных метаболических путей клетки, которые могут быть связаны с возникновением этого вида рака. Среди них важное место занимают гены системы репарации ДНК, т.к. они принимают участие в защите целостности генома клетки, в особенности при действии канцерогенов, проканцерогенов, а также других активных веществ. Подобные активные молекулы поступают в организм при курении, т.к. табачный дым содержит более 3000 химических соединений, среди которых более десятка канцерогенов [22]. Курение вызывает в организме оксидативный стресс, который может индуцировать большое число различных повреждений ДНК, таких как разрывы цепей ДНК, окисление оснований, апуриновые сайты [4].

Большая часть этих повреждений репарируется системой BER (base excision repair) эксцизионной репарации ДНК. Она удаляет повреждения оснований ДНК, в частности наиболее распространенное оксидативное повреждение ДНК 8-оксигуанин [23]. Это модифицированное основание обладает мутагенной активностью и репарируется ферментом 8-оксигуанин-ДНК-гликозилазой (*hOGG1*), ген которой находится на хромосоме 3p26.2 [3]. Полиморфный маркер *hOGG1 Ser326Cys* располагается в 7 экзоне данного гена в 326 кодоне и 1245 позиции. Минорный вариант данного полиморфного маркера выражается в пониженной ферментативной активности кодируемого фермента [10; 12]. В ряде исследований выявлена ассоциация данного полиморфного маркера с риском развития рака легкого, однако данные литературы противоречивы [13].

В системе эксцизионной репарации ДНК ген *XRCC1* (X-ray repair cross complementing protein 1) кодирует один из важнейших ферментов, который активен в отношении поврежденных оснований и одноцепочечных разрывов ДНК, вызванных алкилирующими агентами и ионизирующей радиацией, а также играет ключевую роль во всей системе BER. Ген *XRCC1* расположен на хромосоме 19q13.2-13.3 [9], в 10 экзоне имеет полиморфный маркер *Arg399Gln*, который связан с заменой G→A в позиции 1316 (399 кодоне). Это приводит к изменению аминокислотного состава кодируемого белка в 399 позиции, заменой аргинина (*Arg*) на глутамин (*Gln*) [20]. При этом показано уменьшение активности фермента, что приводит к нарушениям в системе BER репарации ДНК [16]. Данные

о возможном вкладе данного полиморфного маркера в повышение риска развития рака легкого и рака ВДП противоречивы [2; 14; 11].

Другая составляющая системы репарации ДНК — система NER (nucleotide excision repair), которая удаляет петли ДНК. Эта репаративная система уникальна тем, что способна репарировать структурно и химически различные субстраты, включая бензпирен-гуаниновые аддукты, вызванные курением, также как и цисплатин-гуаниновые аддукты, формирующиеся в процессе химиотерапии [19]. Ген *ERCC2* (Excision repair cross-complimenting rodent repair group 2), или *XPD*, играет ключевую роль в данной системе репарации ДНК. Это ДНК-хеликаза, которая обеспечивает доступ к ДНК вокруг повреждения. Это первый шаг NER, который приводит к конформационным изменениям, необходимым для присоединения к репарируемому повреждению остальных факторов NER [8; 6]. Другая важная функция *ERCC2* — подтверждение наличия повреждений ДНК. Данный фермент проверяет область повреждения, отличая действительные повреждения от следствий наличия необычных последовательностей ДНК [18].

Ген *ERCC2* расположен на хромосоме 19q13.2-13.3 [23]. В 23 экзоне гена существует замена T→G в 2251 положении (751 кодон), которая ведет к замене лизина (*Lys*) на глутамин (*Gln*) в белковом продукте. Известно, что минорные варианты полиморфного маркера *ERCC2 Lys751Gln* ассоциированы со снижением репарационной активности и увеличением чувствительности к канцерогенам [13; 26].

Цель нашей работы — изучение полиморфных маркеров генов репарации ДНК: *Ser326Cys hOGG1*, *Arg399Gln XRCC1*, *Lys751Gln ERCC2*, их ассоциации с риском заболевания раком ВДП, НМРЛ и его подтипов.

#### **Материалы и методы.**

ДНК выделяли из лимфоцитов венозной крови лиц, проживающих в Московском регионе: 50 больных раком ВДП в возрасте  $53 \pm 1,8$  года (32 курящих и 18 некурящих) и 88 больных немелкоклеточным (НМРЛ) раком легкого в возрасте  $60 \pm 22$  года (40 курящих, 13 некурящих и 35 лиц с неизвестным статусом курения). Больные не получали до забора крови лучевую или химиотерапию. В качестве популяционного контроля использовали сопоставимую по возрасту выборку онкологически здоровых индивидов в возрасте  $48,6 \pm 0,9$  года (54 человека, из них 25 курящих и 29 некурящих) Московского региона. Диагноз и гистологическая форма рака легкого устанавливались на основании гистологического исследования в НИИ КО

РОИЦ им Блохина РАМН г. Москвы. Выборка больных раком легкого представлена 23 больными с аденокарциномой (АК) и 51 больными с плоскоклеточным раком легкого (ПРЛ).

Геномную ДНК выделяли из лейкоцитов периферической крови с помощью протеиназы К с последующей фенольно-хлороформной очисткой и осаждением этанолом. Идентификация аллелей полиморфных маркеров исследованных генов проводилась с помощью ПЦР-ПДРФ анализа. Выбор праймеров проводили с помощью программы Lasergene. Статистическая обработка данных выполняли с помощью программы «Statistica 6.0». При сравнении частот генотипов использовали стандартный критерий  $\chi^2$  Пирсона. Для всех изученных полиморфных вариантов генов распределение генотипов соответствовало ожидаемому при равновесии Харди–Вайнберга. Комплексную оценку взаимосвязей между исследуемыми генотипами и риском заболевания проводили с помощью логистической регрессии, определяя отношение шансов (OR) и 95% доверительный интервал (95% CI) для значений  $p \leq 0,05$ .

#### Результаты и обсуждение

При изучении частот распределения полиморфных маркеров генов репарации повреждений ДНК *XRCC1 Arg399Gln* и *ERCC2 Lys751Gln* в группах здоровых доноров и больных раком ВДП или НМРЛ повышенной частоты минорных аллелей изученных генов в группах больных обнаружено не было (Табл. 1). Выявлено, что данные маркеры не связаны с риском развития этих типов рака у жителей Московского региона (Табл. 2, 3).

Таблица 1.

#### Распределение частот генотипов полиморфных маркеров генов *XRCC1*, *ERCC2* и *hOGG1*

Ген	генотип	частота генотипов		
		контроль n=54	рак ВДП n=50	НМРЛ n=88
<i>hOGG1</i> <i>Ser326Cys</i>	<i>Ser/Ser</i>	0,574	0,800	0,721
	<i>Ser/Cys</i>	0,370	0,200	0,244
	<i>Cys/Cys</i>	0,056	0	0,035
<i>ERCC2</i> <i>Lys751Gln</i>	<i>Lys/Lys</i>	0,500	0,360	0,364
	<i>Lys/Gln</i>	0,370	0,500	0,466
	<i>Gln/Gln</i>	0,130	0,140	0,170
<i>XRCC1</i> <i>Arg399Gln</i>	<i>Gln/Gln</i>	0,500	0,480	0,170
	<i>Arg/Gln</i>	0,352	0,280	0,566
	<i>Arg/Arg</i>	0,148	0,240	0,264

Таблица 2.

**Отношение шансов (OR) для риска развития НМРЛ,  
а также в подгруппе курящих пациентов**

группа	ген	OR	95 % CI	$\chi^2$	p
НМРЛ	<i>hOGG1</i> <i>Ser326Cys</i>	<b>0,59</b>	0,32-1,07	3,03	<b>0,08</b>
	<i>ERCC2</i> <i>Lys751Gln</i>	1,47	0,89-2,44	2,25	0,13
	<i>XRCC1</i> <i>Arg399Gln</i>	1,20	0,71-2,02	0,46	0,50
курящие НМРЛ	<i>hOGG1</i> <i>Ser326Cys</i>	0,79	0,39-1,59	0,44	0,51
	<i>ERCC2</i> <i>Lys751Gln</i>	1,53	0,84-2,79	1,91	0,17
	<i>XRCC1</i> <i>Arg399Gln</i>	1,12	0,61-2,07	0,14	0,71

В случае маркера *hOGG1 Ser326Cys* выявлен интересный эффект, при котором минорный аллель *Cys* этого маркера уменьшал риск развития рака ВДП (OR=0,35,  $p=0,007$ ). Обнаружен также сходный тренд уменьшения вероятности возникновения НМРЛ при носительстве аллеля *Cys* (OR=0,59,  $p=0,08$ ). Данный эффект наблюдался в ряде исследований, причем он зависел от этнической принадлежности пациентов [24; 25].

Деление группы НМРЛ на гистологические подтипы выявило ассоциацию с риском заболевания АК для минорных аллелей маркеров *ERCC2 Lys751Gln* (OR=2,37,  $p=0,02$ ) и *XRCC1 Arg399Gln* (OR=2,09,  $p=0,04$ ) (Табл. 4). Таким образом, данные маркеры могут быть перспективны для выявления индивидуальной предрасположенности к развитию АК легких.



Таблица 3.

**Отношение шансов (OR) для риска развития рака ВДП,  
а также в подгруппе курящих пациентов**

группа	ген	OR	95 % CI	$\chi^2$	p
рак ВДП	<i>hOGG1</i> <i>Ser326Cys</i>	<b>0,35</b>	0,16-0,77	7,19	<b>0,007</b>
	<i>ERCC2</i> <i>Lys751Gln</i>	1,39	0,79-2,46	1,29	0,26
	<i>XRCC1</i> <i>Arg399Gln</i>	1,82	0,67-4,90	1,58	0,45
курящие рак ВДП	<i>hOGG1</i> <i>Ser326Cys</i>	<b>0,39</b>	0,16-0,95	4,47	<b>0,03</b>
	<i>ERCC2</i> <i>Lys751Gln</i>	1,29	0,68-2,42	0,61	0,44
	<i>XRCC1</i> <i>Arg399Gln</i>	<b>3,45</b>	1,22- 9,73	3,90	<b>0,05</b>

Поскольку курение табака — это одна из важнейших причин заболевания раком ВДП и легких вследствие попадания канцерогенных продуктов курения в организм через дыхательные пути и действия их на ДНК, нами проведено сравнение полиморфизма указанных генов в группах, различающихся по статусу курения. Тенденция к повышению риска возникновения рака ВДП обнаружена у курящих носителей предрасполагающего генотипа *Lys/Lys* полиморфного маркера *ERCC2 Lys751Gln* (OR=2,33,  $p=0,08$ ) (Табл. 3), что согласуется с литературными данными. В данном случае наблюдалось усугубляющее влияние курения, т. к. в группе некурящих пациентов увеличения риска для данного маркера выявлено не было.

Аналогичная ситуация наблюдалась и для маркера *Arg399Gln* гена *XRCC1*. Показана значимость мутантного генотипа *Gln/Gln* гена *XRCC1* для риска заболевания раком ВДП при курении (OR=3,45  $p=0,05$ ) (Табл. 3). Существуют данные о связи этого генотипа *XRCC1* с повышенной частотой хроматидных обменов среди курящих и об ассоциации этого полиморфизма с развитием рака при курении [1; 15; 17].

Таблица 4.

## Отношение шансов (OR) для риска развития подтипов НМРЛ

группа	ген	OR	95% CI	$\chi^2$	p
АК n=23	<i>hOGG1</i> <i>Ser326Cys</i>	0,47	0,18-1,24	2,38	0,12
	<i>ERCC2</i> <i>Lys751Gln</i>	<b>2,37</b>	1,17-4,81	5,88	<b>0,02</b>
	<i>XRCC1</i> <i>Arg399Gln</i>	<b>2,09</b>	1,03-4,22	4,25	<b>0,04</b>
ПРЛ n=51	<i>hOGG1</i> <i>Ser326Cys</i>	0,71	0,36-1,42	0,92	0,34
	<i>ERCC2</i> <i>Lys751Gln</i>	1,28	0,71-2,29	0,66	0,42
	<i>XRCC1</i> <i>Arg399Gln</i>	1,34	0,75-2,40	0,98	0,32
другие типы РЛ n=14	<i>hOGG1</i> <i>Ser326Cys</i>	<b>0,33</b>	0,09-1,16	3,25	<b>0,07</b>
	<i>ERCC2</i> <i>Lys751Gln</i>	1,13	0,52-2,48	0,10	0,76
	<i>XRCC1</i> <i>Arg399Gln</i>	0,29	0,02-5,43	2,83	0,24

**Заключение**

Ассоциации полиморфных маркеров *ERCC2 Lys751Gln* и *XRCC1 Arg399Gln* с риском развития НМРЛ и рака ВДП не обнаружено, но выявлена их связь с заболеванием АК легкого. Показано повышение риска развития рака ВДП у курящих носителей генотипа *Gln/Gln* маркера *XRCC1 Arg399Gln*, обнаружен эффект уменьшения риска развития рака ВДП при носительстве минорного аллеля *Cys* маркера *hOGG1 Ser326Cys*.

**Список литературы:**

1. Abdel-Rahman S.Z., El-Zein R.A. The 399Gln polymorphism in the DNA repair gene XRCC1 modulates the genotoxic response induced in human lymphocytes by the tobacco-specific nitrosamine NNK. // *Cancer Lett.* — 2000. — № 159. — P. 63—71.
2. Chen W., Wang Z.Y., Xu F.L., Wu K.M., Zhang Y., Xu L., Wang Q.P. Association of XRCC1 genetic polymorphism (Arg399Gln) with laryngeal cancer: a meta-analysis based on 4,031 subjects. // *Tumour Biol.* — 2014. — № 35. — P. 1637—1640.

3. Cheng K.C., Cahill D.S., Kasai H., Nishimura S., Loeb L.A. 8-Hydroxyguanine, an abundant form of oxidative DNA damage, causes G→T and A→T substitutions. // *J. Biol. Chem.* — 1992. — № 267. — P. 166—172.
4. Demple B., Harrison L. Repair of oxidative damage to DNA: enzymology and biology. // *Annu. Rev. Biochem.* — 1994. — № 63. — P. 915—948.
5. Dubey S., Powell C.A. Update in lung cancer 2008. // *Am. J. Respir. Crit. Care Med.* — 2009. — № 179. — P. 860—868.
6. Evans E., Moggs J.G., Hwang J.R., Egly J.M., Wood R.D. Mechanism of open complex and dual incision formation by human nucleotide excision repair factors. // *EMBO J.* — 1997. — № 16. — P. 6559—6573.
7. Ferlay J., Shin H.R., Bray F., Forman D., Mathers C., Parkin D.M. Estimates of worldwide burden of cancer in 2008: GLOBOCAN 2008. // *Int. J. Cancer.* — 2010. — № 127. — P. 2893—2917.
8. Gillet L.C., Schärer O.D. Molecular mechanisms of mammalian global genome nucleotide excision repair. // *Chem. Rev.* — 2006. — № 106. — P. 253—276.
9. Hanssen-Bauer A, Solvang-Garten K, Akbari M, Otterlei M. X-ray repair cross complementing protein 1 in base excision repair. // *Int. J. Mol. Sci.* — 2012. — № 13. — P. 17210—17229.
10. Hill J.W., Evans M.K. Dimerization and opposite base-dependent catalytic impairment of polymorphic S326C OGG1 glycosylase. // *Nucleic Acids Res.* — 2006. — № 34. — P. 1620—1632.
11. Huang G., Cai S., Wang W., Zhang Q., Liu A. Association between XRCC1 and XRCC3 polymorphisms with lung cancer risk: a meta-analysis from case-control studies. // *PLoS One.* — 2013. — № 8. — c 68457.
12. Kershaw R.M., Hodges N.J. Repair of oxidative DNA damage is delayed in the Ser326Cys polymorphic variant of the base excision repair protein OGG1. // *Mutagenesis.* — 2012. — № 27. — P. 501—510.
13. Li H., Hao X., Zhang W., Wei Q., Chen K. The hOGG1 Ser326Cys polymorphism and lung cancer risk: a meta-analysis. // *Cancer Epidemiol. Biomarkers Prev.* — 2008. — № 17. — P. 1739—1745.
14. Li Q., Wang J.M., Peng Y., Zhang S.H., Ren T., Luo H., Cheng Y., Wang D. Association of DNA base-excision repair XRCC1, OGG1 and APE1 gene polymorphisms with nasopharyngeal carcinoma susceptibility in a Chinese population. // *Asian Pac. J. Cancer Prev.* — 2013. — № 14. — P. 5145—5151.
15. Metsola K., Kataja V., Sillanpää P., Siivola P., Heikinheimo L., Eskelinen M., Kosma V.M., Uusitupa M., Hirvonen A. XRCC1 and XPD genetic polymorphisms, smoking and breast cancer risk in a Finnish case-control study. // *Breast Cancer Res.* — 2005. — № 7. — P. 987—997.
16. Miao X., Lu W., Tan W., Lin D. Polymorphisms of DNA repair genes XRCC1 and XPD and their associations with risk of esophageal squamous carcinoma in a Chinese population. // *Int. J. Cancer.* — 2002. — № 100. — P 600—605.

17. Ratnasinghe D., Yao S.X., Tangrea J.A., Qiao Y.L., Andersen M.R., Barrett M.J., Giffen C.A., Erozan Y., Tockman M.S., Taylor P.R. Polymorphisms of the DNA repair gene XRCC1 and lung cancer risk. // *Cancer Epidemiol. Biomarkers Prev.* — 2001. — № 10. — P. 119—123.
18. Reardon J.T., Sancar A. Thermodynamic cooperativity and kinetic proofreading in DNA damage recognition and repair. // *Cell Cycle.* — 2004. — № 3. — P. 141—144.
19. Sancar A. Mechanisms of DNA excision repair. // *Science.* — 1994. — № 266. — P. 1954—1956.
20. Shen M.R., Jones I.M., Mohrenweiser H. Nonconservative amino acid substitution variants exist at polymorphic frequency in DNA repair genes in healthy humans. // *Cancer Res.* — 1998. — № 58. — P. 604—608.
21. Siegel R., Naishadham D., Jemal A. Cancer statistics. 2012. // *CA Cancer J. Clin.* — 2012. — № 62. — P. 10—29.
22. Tobacco: Production, Chemistry and Technology, D. Davis, M.T. Nielsen, Eds., USA: Wiley-Blackwell, 1999.
23. Wood R.D., Mitchell M., Sgouros J., Lindahl T. Human DNA repair genes. // *Science.* — 2001. — № 291. — P. 1284—1289.
24. Xu Z., Yu L., Zhang X. Association between the hOGG1 Ser326Cys polymorphism and lung cancer susceptibility: a meta-analysis based on 22,475 subjects. // *Diagn. Pathol.* — 2013. — № 23. — P. 144.
25. Zhong D., Li G., Long J., Wu J., Hu Y. The hOGG1Ser326Cys polymorphism and increased lung cancer susceptibility in Caucasians: an updated meta-analysis. // *Sci. Rep.* — 2012. — № 2. — P. 548.
26. Zhou W., Liu G., Miller D.P., Thurston S.W., Xu L.L., Wain J.C., Lynch T.J., Su L., Christiani D.C. Polymorphisms in the DNA repair genes XRCC1 and ERCC2, smoking, and lung cancer risk. // *Cancer Epidemiol. Biomarkers Prev.* — 2003 b. — № 12. — P. 359—365.

### 4.3. ЭКОЛОГИЯ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЕ

#### СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ПО ФАУНЕ ХИРОНОМИД ПРУДА ШКОЛЬНОГО ГОРОДА КАЛИНИНГРАДА

**Гапаненок Евгения Анатольевна**

*аспирант Балтийского федерального университета им. И. Канта,  
РФ, г. Калининград  
E-mail: [jane\\_1302@mail.ru](mailto:jane_1302@mail.ru)*

**Винокурова Наталья Владимировна**

*канд. биол. наук, доцент  
Балтийского федерального университета им. И. Канта,  
РФ, г. Калининград  
E-mail: [NVinokurova@kantiana.ru](mailto:NVinokurova@kantiana.ru)*

#### COMPARATIVE DATA ON THE FAUNA OF CHIRONOMID OF THE POND SHKOLNY OF KALININGRAD

**Gapanenok Evgeniya**

*postgraduate student of Immanuel Kant Baltic Federal University,  
Russia, Kaliningrad*

**Vinokurova Natalya**

*candidate of biological sciences, associate professor  
of Immanuel Kant Baltic Federal University,  
Russia, Kaliningrad*

#### АННОТАЦИЯ

Произведена оценка фауны хирономид пруда Школьного г. Калининграда. Определены: видовой состав сообщества хирономид, показатели численности и биомассы, индексы видового богатства и разнообразия, частоты встречаемости, доминирования, характерные для данного сообщества хирономид. В данном водоёме определено 10 видов хирономид. Выявлены доминантный вид *Glyptotendipes glaucus* и два субдоминанта *Camptochironomus tentans* и *Glyptotendipes*

*paripes*. Полученные данные указывают на средний уровень видового разнообразия сообщества хирономид пруда Школьного.

#### ABSTRACT

The fauna of chironomid of the pond Shkolny of Kaliningrad are evaluated. Species composition of the community of chironomids, indices of abundance and biomass, indices of species richness and diversity, indices of frequency of occurrence and domination characteristic of the community of chironomids are identified. 10 species of chironomid are defined in this pond. Dominant species *Glyptotendipes glaucus* and two subdominant *Camptochironomus tentans* and *Glyptotendipes paripes* are identified. The obtained data indicate the average level of a specific variety of community of the pond Shkolny.

**Ключевые слова:** хирономиды; пруд Школьный; видовое разнообразие; численность; биомасса.

**Keywords:** chironomidae; Pond Shkolny; species diversity; abundance; biomass.

#### Введение

Антропогенный фактор — один из важнейших источников экологических проблем. Калининградская область, как и многие области нашей страны, подвержены влиянию данного фактора. Водоемы города Калининграда страдают от засорения мусором и несанкционированных стоков бытовых отходов, которые влияют на устойчивость водных экосистем. Под угрозой вымирания находятся, в первую очередь, беспозвоночные, высокочувствительные к любым видам загрязнения. При любом типе антропогенного воздействия на водоемы универсальной ответной реакцией сообществ гидробионтов является глубокое изменение видового разнообразия [6].

В настоящее время становится актуальной оценка степени загрязнения природной среды по средствам изучения видового разнообразия микрозообентоса.

Личинки хирономид семейства водных двукрылых насекомых широко распространены в природе. Они являются важнейшим звеном во многих трофических цепях. Служат объектом питания бентосоядных промысловых рыб и их молоди. Личинки хирономид являются универсальной моделью для проведения биоиндикационных исследований степени загрязнения рек и трофности озер, так как постоянно присутствуют в природе. Благодаря наличию гигантских политенных хромосом в слюнных железах, личинки семейства *Chironomidae* служат как модель для биоиндикационных исследований. Политенные

хромосомы позволяют проводить цитогенетический анализ и выявлять различные хромосомные перестройки, происходящие под воздействием токсических веществ [8].

### **Материал и методы**

Материалом для данной работы послужили сборы личинок хирономид в пруду Школьном города Калининграда в апреле 2011 г. и июне 2012 г. Количественный сбор проводился на 7 точках помощью скребка с длиной режущей кромки 17,5 см и гидробиологической рамки размером 40х40 по стандартной методике [4; 5] в прибрежной зоне пруда Школьного. Затем на торсионных весах ВТ-500 личинки были взвешены и посчитаны, а после зафиксированы по стандартной методике (Кикнадзе и др., 1991) в смеси 96 %-го этилового спирта и ледяной уксусной кислоты в соотношении 3:1. Фиксатор в ёмкости с личинками меняли до тех пор, пока не станет прозрачным. Временные цитологические препараты политенных хромосом слюнных желез личинок были приготовлены по стандартной ацето-орсеиновой методике [3; 7]. Для изучения видового разнообразия хирономид пруда Школьного было исследовано 253 личинки.

Для характеристики состояния биоценоза хирономид и степени загрязнения водоемов использовались следующие показатели: численность ( $N, \text{экз./м}^2$ ), биомасса ( $B, \text{г/м}^2$ ) [10], индекс видового богатства Маргалефа ( $d$ ), индекс доминирования Паляя, Ковнацки ( $D$ ), частота встречаемости видов ( $P, \%$ ), видовое разнообразие Шеннона по численности ( $H, \text{бит/экз.}$ ), индекс Е.В. Балушкиной ( $K$ ) [9].

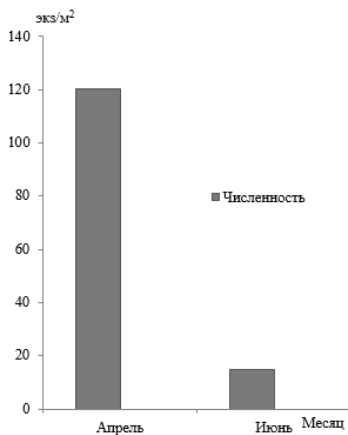
### **Результаты и обсуждение**

Пруд Школьный находится в конце улицы Красной около школы № 20 в городе Калининграде. Водоём эвтрофный, глубиной 2—3 м, длиной — 350 м, шириной — 80—100 м. Площадь водной поверхности составляет 0,056 км<sup>2</sup>. Водоём создавался для обеспечения Кенигсберга питьевой водой. В пруд впадает канал из озера Дивного на севере, на юге вытекает канал Питьевой [2]. Цвет ила варьирует от серого до черного. Ил густой с растительными остатками и слабым запахом. Дно глинистое или каменистое. Из растений на пруду можно обнаружить рогоз и тростник. Также здесь присутствуют личинки стрекоз, нематоды, плавунцы, личинки-гусениц, двукрылые бокоплавы, пиявки и улитки.

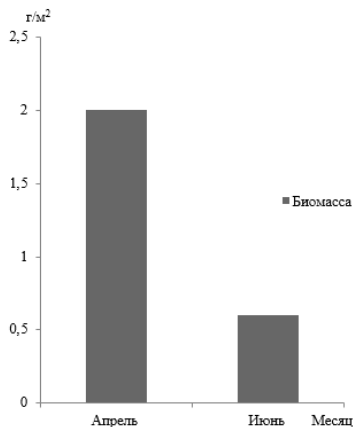
Озеро постоянно подвергается антропогенным бытовым загрязнениям из стоков близлежащих домов. С 2005 года ведется активное строительство вокруг озера [2].

Средние показатели численности в июне 2012 г. составили 15 экз./м<sup>2</sup>, а биомассы — 0,6 г/м<sup>2</sup>, в апреле 2011 г. 120,5 экз./м<sup>2</sup> и 2 г/

м<sup>2</sup> соответственно. По рисункам 1 и 2 заметно, что численность и биомасса в июне 2012 г. заметно меньше, чем в апреле 2011 г. Это связано с тем, что вылет комаров первой генерации большинства видов приходится на начало лета.



**Рисунок 1. Средние показатели численности (экз/м<sup>2</sup>) в апреле 2011 г. и июне 2012 г.**



**Рисунок 2. Средние показатели биомассы (г/м<sup>2</sup>) в апреле 2011 г. и июне 2012 г.**



В период исследований водоема было идентифицировано 10 видов хирономид, принадлежащих к двум подсемействам (*Chironominae* и *Ortocladiinae*) (см. табл. 1).

**Таблица 1.**

**Встречаемость отдельных видов хирономид пруда Школьного**

Идентифицированные виды	Месяц	
	Апрель 2011г.	Июнь 2012г.
<b>1. n/сем. <i>Chironominae</i></b>		
<b><i>Труба Chironomini</i></b>		
1. <i>Camptochironomus tentans</i>	+	+
2. <i>Chironomus agilis</i> *	+	-
3. <i>Chironomus plumosus</i>	-	+
4. <i>Chironomus</i> sp.	-	+
5. <i>Endochironomus albipennis</i>	+	+
6. <i>Glyptotendipes paripes</i>	+	+
7. <i>Glyptotendipes glaucus</i>	+	+
8. <i>Parachironomus kuzini</i>	-	+
9. <i>Parachironomus Pararostratus</i> *	-	+
<b>2. n/сем. <i>Ortocladiinae</i></b>		
10. <i>Cricotopus sylvestris</i>	+	-
Всего видов	6	8

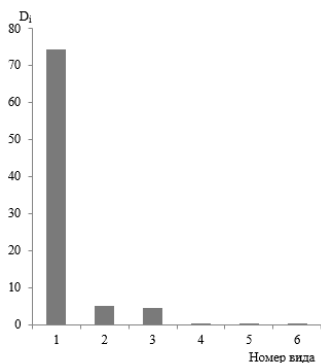
Примечание: «+» — вид присутствует, «-» — вид отсутствует,  
\* — виды, впервые отмеченные для Калининградской области

Встречаемость обнаруженных видов была неоднородна в апреле 2011 г. Такая же тенденция сохранилась в июне 2012 г. Наибольшая встречаемость наблюдается у  $\beta$ -мезосапробного вида — *Glyptotendipes glaucus* и составляет: апрель 2011 г. — 100 %, а июнь 2012 г. — 80 %.

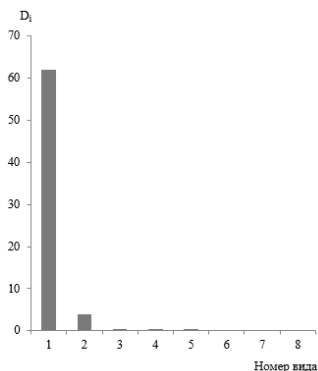
По индексу доминирования Папия-Ковнацки в исследуемом пруду в апреле 2011 г. был выявлен один доминирующий вид — *Glyptotendipes glaucus* — 74,44; два субдоминанта: *Camptochironomus tentans* и *Glyptotendipes paripes* и субдоминанты 1 и 2 порядков (см.рис. 3). Значение индекса Маргалефа составило 1,02, что говорит о среднем уровне видового богатства популяции. Соотношение уровней индексов Шеннона и Симпсона говорит о наличии преобладающего вида в формировании общей численности.

В июне 2012 г. в сообществе был обнаружен ярко выраженный доминант — *Glyptotendipes glaucus* — 62; один субдоминант *Chironomus plumosus* и субдоминанты 1 и 2 порядков (см.рис. 4). Значение индекса Маргалефа являлось средним — 1,46. Значение индекса

видового разнообразия Шеннона было низким — 1,2 бит/экз., а индекса Симпсона высоким — 0,62, что можно объяснить сравнительно небольшим количеством видов. Данное соотношение индексов Шеннона и Симпсона подтверждает наличие преобладающего вида в формировании общей численности в пруду Школьном.



**Рисунок 3. Распределение видов по значению индекса доминирования Паляя-Ковнацки  $D_i$  в пр.Школьном (апрель 2011 г.) Названия видов: 1 — *G.glaucus*, 2 — *C.tentans*, 3 — *G.paripes*, 4 — *E.albipennis*, 5 — *Cr. sylvestris*, 6 — *Ch. agilis***



**Рисунок 4. Распределение видов по значению индекса доминирования Паляя-Ковнацки  $D_i$  в пр.Школьном (июнь 2012 г.) Названия видов: 1 — *G.glaucus*, 2 — *Ch.plumosus*, 3 — *Chironomus sp.*, 4 — *G.paripes*, 5 — *P.kuzini*, 6 — *E.albipennis*, 7 — *P.pararostatus*, 8 — *C.tentans***

Индекс Балушкиной в апреле 2011 г. был равен 6,45, это свидетельствует о том, что водоём характеризуется умеренной загрязнённостью. В июне 2012 г. состояние водоема ухудшилось, так как показатель индекса Балушкиной увеличился и стал равен 6,5, что характеризует водоем как загрязненный. Согласно индексу Шеннона, как и в апреле 2011 г. так и в июне 2012 г. водоём является загрязнённым (3-класс качества вод).

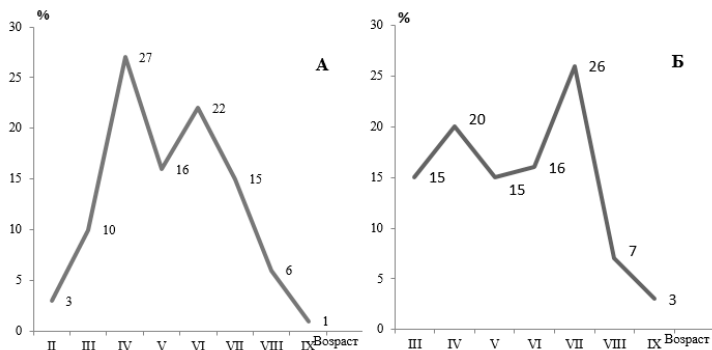
Таким образом, за два года исследований пруда Школьного уровень видового разнообразия остался на среднем уровне, доминанта не изменилась, но риск загрязнения водоема увеличился.

В исследуемом водоеме не отмечается резких сезонных изменений в возрастной структуре популяции хирономид. Весенние и летние популяции хирономид представлены более зрелыми личинками (IV-VII фазы развития). Это связано с тем, что к этому времени (середина апреля и середина июня), популяция готовится к вылету следующей генерации комаров.

**Таблица 2.**

**Количественные характеристики сообществ хирономид по индексам**

№	Показатель	Значение	
		Апрель 2011 г.	Июнь 2012 г.
1	Количество видов (n)	6	8
2	Биомасса (г/ м <sup>2</sup> )	2	0,6
3	Численность (экз./м <sup>2</sup> )	120,3	15
4	Индекс видового богатства Маргалефа (d)	1,02	1,46
5	Индекс видового разнообразия Шеннона (H (бит/экз.))	1,3	1,2
6	Индекс Симпсона (C)	0,58	0,62
7	Индекс Балушкиной (K)	6,45	6,5



**Рисунок 5. Сезонная динамика возрастной структуры личинок хирономид пр. Школьного. А — Апрель 2011 г. Б — Июнь 2012 г.**

### Заключение

Изучение сообщества хирономид пруда Школьного подтверждает использование личинок как биоиндикационных объектов. В период изучения данного водоема было идентифицировано 10 видов личинок хирономид. Полученные данные по количеству видов и семейств в водоёме за два года исследований по индексу Маргалефа указывают на средний уровень видового разнообразия. Это может быть обусловлено небольшой площадью пруда и замедленными процессами самоочищения в нем, а также поступления сюда в большом количестве загрязненных сточных вод вместе с водами канала.

Важно отметить, что комплексное использование индексов позволяет в полной мере оценить как видовое разнообразие хирономид, так и скорость происходящих в природе изменений. Так, соотношение уровней индексов Шеннона и Симпсона говорит о наличии преобладающего вида в формировании общей численности как в апреле 2011 г. так и в июне 2012 г. Увеличение индекса Балушкиной в 2012 году характеризует водоем как загрязненный. Индекс Шеннона также указывает на этот факт.

Так как основной задачей биоиндикации является разработка методов и критериев, которые могли бы адекватно отражать уровень антропогенных воздействий с учетом комплексного характера загрязнения и диагностировать ранние нарушения в наиболее чувствительных компонентах биотических сообществ [1], мониторинг состояния водоемов Калининградской области посредством изучения личинок хирономид дает возможность изучить диапазон естественной и антропогенной изменчивости биоценозов.

### Список литературы:

1. Биоиндикация: теория, методы, приложения // под ред. Г.С. Розенберга. Тольятти: Интер-Волга, 1994. — 266 с.
2. Данилова М.В. Значение кариотипов хирономид (*Chironomus plumosus* L. и *Camptochironomus tentans* F.) для оценки состояния водной среды: дис...кандидата биологических наук. Калининград: Балтийский федеральный университет им. И. Канта, 2011 — 121 с.
3. Кикнадзе И.И., Гольгина В.В., Андреева Е.Н., Гундерина Л.И., Истомина А.Г., Айманова К.Г., Батлер М.Дж., Мартин Дж., Вюлкер В.Г. Кариофонды, хромосомный полиморфизм, и видообразование у голарктических видов хирономид // Отчетная сессия Института цитологии и генетики Сибирского отделения Российской академии наук. Сб. научн. тр. Новосибирск. Институт цитологии и генетики СО РАН, 200. — С. 140—147.
4. Методические рекомендации по сбору и обработки материалов при гидробиологических исследованиях на пресноводных водоёмах. Зообентос и его продукция/ Под ред. Г.Г. Винберга и Г.М. Лаврентьева. Л.: ГосНИОРХ, 1984. — 52 с.
5. Методическое пособие по изучению хирономид./ Под ред. Ахроров Ф. Душанбе: Дониш, 1982. — 84 с.
6. Скальская И.А. Зооперифитон водоемов Верхней Волги. Рыбинск, 2002.
7. Чубарева Л.А., Петрова Н.А. Методика приготовления цитологических препаратов для кариологического изучения двукрылых насекомых // Новые данные по кариосистематике двукрылых насекомых. Ленинград: Из-во Зоол. инст., 1980. — 87 с.
8. Шевчук Т.А., Винокурова Н.В. Видовой состав и экологические характеристики хирономид (Diptera: Chironomidae) водоемов Калининграда // Вестн. Рос. гос. ун-та им. И. Канта. Серия Естественные науки Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, — 2010 — № 7. — С. 71—77.
9. Шитиков В.К., Розенберг Г.С., Зинченко Т.Д. Количественная гидроэкология: методы системной идентификации. Тольятти: ИЭВБ РАН, 2003. — 463 с.
10. Kreckler F.H. A comparative study of the animal population of certain submerged aquatic plants. Ecology, — 1939, — № 20, — p. 553—562.

#### 4.4. ВЕТЕРИНАРИЯ

### ИЗУЧЕНИЕ КУЛЬТУРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ УСОВЕРШЕНСТВОВАННОЙ ПЛОТНОЙ ПИТАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ МИКОБАКТЕРИЙ

***Жабина Виктория Юрьевна***

*ассистент кафедры инфекционной и инвазионной патологии  
ФГБОУ ВО «Белгородский государственный  
аграрный университет им. В.Я. Горина»,  
РФ, г. Белгород  
E-mail: [vika\\_zhabina@mail.ru](mailto:vika_zhabina@mail.ru)*

***Коваленко Анатолий Михайлович***

*д-р ветер. наук, профессор  
кафедры инфекционной и инвазионной патологии ФГБОУ ВО  
«Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина»,  
РФ, г. Белгород  
E-mail: [mycobacteria@rambler.ru](mailto:mycobacteria@rambler.ru)*

### THE STUDY OF CULTURAL PROPERTIES OF IMPROVED SOLID MEDIUM FOR MYCOBACTERIA DISCHARGING

***Victoria Zhabina***

*assistant of Infectious and Invasive Pathology Chair, Federal State  
Budgetary Educational Institution of Higher Professional Education  
“Belgorod State Agrarian University named after V.Ya. Gorin”,  
Russia, Belgorod*

***Anatoliy Kovalenko***

*doctor of Veterinary Sciences, Professor of Infectious and Invasive  
Pathology Chair, Federal State Budgetary Educational Institution  
of Higher Professional Education “Belgorod State Agrarian University  
named after V.Ya. Gorin”,  
Russia, Belgorod*

## АННОТАЦИЯ

Разработана усовершенствованная плотная питательная среда, которая позволяет ускорить процесс получения первичных культур микобактерий на  $3 \pm 0,2$  суток, что существенно сокращает сроки выявляемости микобактерий и дает возможность усовершенствовать культуральные исследования в общей схеме бактериологических исследований при туберкулезе крупного рогатого скота.

## ABSTRACT

The advanced solid medium which allows to speed up the process of obtaining primary cultures of mycobacteria for  $3 \pm 0,2$  days is developed that significantly reduces the time of mycobacteria detection and provides an opportunity to improve cultural research in the general scheme of bacteriological studies of tuberculosis of cattle.

**Ключевые слова:** микобактерии туберкулеза; питательная среда выделения микобактерий; рост культур; крупный рогатый скот; патологоанатомические изменения.

**Keywords:** tuberculosis mycobacteria; solid medium of mycobacteria discharging; cultural growth; cattle; pathologic anatomic changes.

Культуральные исследования базируются на способности микобактерий расти на различных питательных средах. Метод позволяет получать изоляты микобактерий для дальнейшей их идентификации и изучения их фенотипических и молекулярно-генетическом особенностей. Патогенные микобактерии в большинстве своем содержат мало ферментов и веществ, стимулирующих их рост, и требуют обогащения питательных сред [5; 6].

Поскольку в микобактериях обменные процессы протекают очень медленно, что сопровождается их медленным ростом на питательных средах, то существуют определенные сложности при использовании культурального метода. По данным В.И. Голышевской [2], критерием чувствительности данного метода является присутствие в 1 мл от 20 до 100 микобактерий. Ранее А.П. Аликаевой [1] и А.И. Кузиным [4] было предложено для обработки биоматериала перед его посевом использовать 2—4 % или 8—10 % растворы серной кислоты. Но позднее А.М. Кадочкиным [3] было предложено эффективное использование серной, соляной и щавелевой кислот.

Таким образом, существует необходимость совершенствования, как предпосевной обработки, так и существующих питательных сред для первичного выделения микобактерий.

**Цель исследований** — разработка и апробация плотной питательной среды для выявления микобактерий на основе агар-агара.

**Материалы и методы.** Подбор питательной плотной синтетической среды для выделения микобактерий проводили, основываясь на данных по химическому составу микобактерий. В лабораторной практике и на предприятиях биологической промышленности применяют различные питательные среды. Недостатком питательной среды Левенштейна-Йенсена является постоянный, но незначительный рост микобактерий, который проявляется лишь при наличии в 1 см<sup>3</sup> взвеси микобактерий не менее 100-200 микробных клеток. Разработанная нами питательная среда для быстрого выявления микобактерий содержит большинство компонентов, необходимых для их роста. В состав питательной среды входит лимоннокислый аммоний, как источник соли органической кислоты и отличается от аналогов тем, что аспарагин заменен на гликокол. Для оптимального роста первичных культур микобактерий были предложены три варианта среды, куда входили ингредиенты по массе в % от общей:

1. Аммоний лимоннокислый — 1,5; калий фосфорнокислый 2-х замещенный — 2,0; магний сернокислый семиводный — 0,2; железо сернокислое — 0,1; сернокислый цинк — 0,1; гликокол — 2,0; фумаровая кислота — 2,0; натрий фосфорнокислый 2-х замещенный — 0,5; хлористый натрий — 0,3; глицерин — 20,0; агар-агар — 23,0; глицин 1,5; остальное вода.

2. Аммоний лимоннокислый — 1,7; калий фосфорнокислый 2-х замещенный — 2,4; магний сернокислый семиводный — 0,3; железо сернокислое — 0,15; сернокислый цинк — 0,15; гликокол — 2,5; фумаровая кислота — 2,5; натрий фосфорнокислый 2-х замещенный — 1; хлористый натрий — 0,4; глицерин — 22,0; агар-агар — 25,0; глицин 1,8; остальное вода.

3. Аммоний лимоннокислый — 1,3; калий фосфорнокислый 2-х замещенный — 1,8; магний сернокислый семиводный — 0,1; железо сернокислое — 0,05; сернокислый цинк — 0,05; гликокол — 1; фумаровая кислота — 1,5; натрий фосфорнокислый 2-х замещенный — 0,3; хлористый натрий — 0,15; глицерин — 18,0; агар-агар — 21,0; глицин 1,0; остальное вода.

Во всех трех вариантах кислотность была в пределах  $7,2 \pm 0,2$ . Все три варианта усовершенствованной плотной питательной среды готовили по следующей схеме. Навески лимоннокислого аммиачного железа растворяли в горячей дистиллированной воде, подогревая ее на электрической плитке, другие соли добавляли в теплую дистил-



лированную воду в указанной выше последовательности, добавляя глицерин, а затем после полного растворения добавляли агар-агар. рН среды доводили до нужных параметров с использованием щелочи, подвергая раствор после этого автоклавированию при температуре 120° С в течение 30 минут. Изучение ростовых свойств усовершенствованных питательных сред проводили путем посева взвеси микобактерий туберкулеза *M. bovis* до 0,5 мл с содержанием до 0,00001 мг/мл микробных клеток. Посевы на опытных и контрольной среде (Левенштейна-Йенсена) помещали в термостат при температуре 37±0,5° С. Вели учет роста культур каждые 1—2 суток в течение 10—30 суток.

Результаты исследований. Результаты изучения элективных свойств усовершенствованных плотных питательных сред представлены в таблице 1. Данные свидетельствуют о том, что на первой среде рост культуры *M. bovis* в виде мелких с маковое зерно, бугорчатых белого цвета колоний (1—2 образования) проявился на 15± 0,3 сутки. На второй — на 17±0,3, на третьей на 19±0,3 сутки. На контрольной среде (Левенштейна-Йенсена) рост микобактерий в виде единичных с маковое и просяное зерно бугорчатых образований, обнаруживался на 18± 0,2 сутки.

**Таблица 1.**

**Результаты сравнительного изучения усовершенствованных плотных питательных сред для выделения микобактерий**

Учет роста, сутки	Усовершенствованная плотная питательная среда			Среда Левенштейна-Йенсена (контроль)
	вариант 1	вариант 2	вариант 3	
15 ± 0,3	+	-	-	-
17 ± 0,3	-	+	-	-
18 ± 0,2	-	-	-	+
19 ± 0,3	-	-	+	-

Таким образом, усовершенствованные плотные питательные среды ускоряют процесс получения первичных культур микобактерий из взвеси, полученных со стандартной яичной питательной среды на 3 ± 0,1 суток, что позволяет существенно усовершенствовать культуральные исследования в общей схеме бактериологических исследований при туберкулезе крупного рогатого скота.

Исследованиями, проведенными с 75 пробами патологоанатомического материала, полученного от больных туберкулезом

животных, имеющих классические туберкулезные изменения (9 проб), незначительные увеличения лимфатических узлов (13 проб), а так же без патологоанатомических изменений (53 пробы), с использованием предпосевной обработке по Аликаевой А.П. [1] и посева на элективные питательные среды Левенштейна-Йенсена и усовершенствованные плотные питательные среды, установлено, что классические микобактериальные культуры в R и S формах в виде единичных колоний получены на  $31 \pm 0,9$  сутки после посева (табл. 2).

Необходимо заметить, что на усовершенствованных средах наблюдалось более интенсивное образование количества колоний. Культуры на питательных средах со временем уплотнились и к  $37 \pm 0,8$  суткам обнаруживались на 1/4 поверхности. Результаты роста были подтверждены микроскопическими исследованиями после окрашивания по методу Циль-Нильсена. В поле зрения обнаруживали кислотоустойчивые палочки красного цвета. На основании биохимических исследований изолированные культуры были отнесены к *M. bovis*. Необходимо отметить, что среди проб, отобранных с явными туберкулезными поражениями, в 100% случаев выделены культуры микобактерий на средах Левенштейна-Йенсена и усовершенствованных.

**Таблица 2.**

**Результаты сравнительного изучения усовершенствованных питательных сред для выделения микобактерий из патологоанатомического материала**

Вариант	Инвентарный номер	Исследуемый материал	Среда Левенштейна-Йенсена (контроль)	Усовершенствованная плотная питательная среда
1.	5629	Патологоанатомический материал с классическими туберкулёзными изменениями в бронхиальных и средостенных лимфатических узлах	+	+
2.	4093		+	+
3.	5547		+	+
4.	3900		+	+
5.	31196		+	+
6.	3929		+	+
7.	5617		+	+
8.	5905		+	+
9.	5861		+	+

На посевах, полученных из проб 4275, 5914, 3649, 3885, 4245, 6033, 5840, 043, 4032, 7199, 5227, 5894, 5217 (с увеличенных средостенных, бронхиальных и заглочных лимфатических узлов

с кровоизлияниями), первичный рост на среде Левенштейна-Йенсена в виде S-форм на  $32 \pm 0,9$  сутки проявился в 2 пробах, что составило 15,4 % от общего числа исследованных проб. На усовершенствованной среде первичный рост проявился на  $33 \pm 0,8$  сутки в виде сплошных R и S колоний в 6 пробах, что составило 46,1 % соответственно.

Анализируя полученные данные при исследовании патологоанатомического материала, следует сделать вывод о том, что стабильные бактериальные формы культур микобактерий обнаруживались на средах Левенштейна-Йенсена и усовершенствованных плотных питательных средах в 9 пробах, т. е. в 100 % случаев с классическими туберкулезными изменениями (бронхиальные и средостенные лимфатические узлы с казеозными туберкулезными поражениями).

Таким образом, усовершенствованные плотные питательные среды ускоряют процесс получения первичных культур микобактерий на  $3 \pm 0,1$  суток, что позволяет существенно усовершенствовать культуральные исследования в общей схеме бактериологических исследований при туберкулезе крупного рогатого скота.

#### **Список литературы:**

1. Аликаева А.П. Упрощенный метод выделения и выращивания чистых культур туберкулезных бацилл из патологического материала / А.П. Аликаева // Сов. ветеринария. — 1940 — № 11. — С. 12.
2. Гольшевская В.И. Бактериологические методы исследования при заболеваниях органов дыхания / В.И. Гольшевская // Пробл. туб. — 1997 — № 5. — С. 51—53.
3. Кадочкин А.М. Дифференциация и идентификация микобактерий // Ветеринария — 1987. — № 9. — С. 62—63, 128.
4. Кузин А.И. Латентная туберкулезная инфекция и ее значение в эпизоотологии туберкулеза крупного рогатого скота. // Автореф. докт. ветер. наук. М. 1977.
5. Ощепков В.Г. Ускоренная диагностика туберкулеза крупного животных / В.Г. Ощепков, Л.А. Таллер, Е.Ю. Секин и др. // Ветеринарная медицина — 2010. — № 94. — С. 136—137.
6. Тупота Н.Л. Диагностическая значимость различных методов выявления микобактерий / Н.Л. Тупота, С.В. Ионина, Н.А. Донченко и др. // Ветеринария. — 2010. — № 3. — С. 56—58.

**ВЛИЯНИЕ СОМАТИЧЕСКОГО ЭКСТРАКТА *FASCIOLA  
HEPATICA* НА СОСТОЯНИЕ СЕМЕННИКОВ  
ЛАБОРАТОРНЫХ ЖИВОТНЫХ**

***Красникова Евгения Владимировна***  
аспирант ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА,  
РФ, г. Пермь  
E-mail: [viki-eva1002@rambler.ru](mailto:viki-eva1002@rambler.ru)

***Сивкова Татьяна Николаевна***  
д-р биол. наук, профессор ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА,  
РФ, г. Пермь  
E-mail: [tatiana-sivkova@yandex.ru](mailto:tatiana-sivkova@yandex.ru)

**IMPACT OF *FASCIOLA HEPATICA* SOMATIC EXTRACT  
INOCULATION TO CONDITION OF LABORATORY  
ANIMALS TESTES**

***Eugenia Krasnikova***  
postgraduate student of Perm State Agricultural Academy,  
Russia, Perm

***Tatyana Sivkova***  
doctor of Biological Science, professor  
of Perm State Agricultural Academy,  
Russia, Perm

**АННОТАЦИЯ**

Кариопатическими и гистологическими методами доказано повреждающее действие соматического экстракта фасциолы на сперматогенный эпителий лабораторных мышей после однократного внутрибрюшинного введения. Под воздействием экстракта нарушается аппарат микротрубочек веретена деления, что приводит к формированию патологических половых продуктов.

**ABSTRACT**

Negative effect after single intraperitoneal injection of *Fasciola hepatica* somatic extract to spermatogenic epithelium of laboratory mice is proven by karyopatical and histological investigations. Division of cells

proceeded with damage of microtubules apparatus and pathological sperm cells formed.

**Ключевые слова:** фасциола; экстракт; мыши; семенники.

**Keywords:** *Fasciola*; extract; mice; testes.

В настоящее время, как экспериментальными исследованиями, так и клиническими наблюдениями установлено кариопатическое воздействие продуктов метаболизма трематод на органы размножения животных [1—3]. В то же время, сведений, касающихся патологий органов размножения у сельскохозяйственных животных при фасциолезе практически нет. Известна только возможность абортос у коров при данной инвазии. В связи с недостаточной изученностью проблемы воздействия продуктов метаболизма трематод целью нашей работы было установить характер и степень патологических изменений сперматогенного эпителия белых мышей под их влиянием.

**Материалы и методы.** Половозрелые формы *F. hepatica* получали от спонтанно зараженных овец, обрабатывали раствором антибиотиков, гомогенизировали, растирали в ступке с кварцевым песком и экстрагировали фосфатно-солевым буферным раствором. Очищенный экстракт проверяли на стерильность, определяли содержание белка на полуавтоматическом биохимическом анализаторе StatFax с применением стандартных реактивов «Витал» и «Ольвекс».

Затем экстракт однократно внутрибрюшинно вводили нелинейным белым мышам — самцам массой 18—20 г в дозе 100 мкг белка на голову. Контрольная группа животных оставалась интактной. Убой мышей проводили через 4; 12; 24; 48; 72 часа методом цервикальной дислокации.

Из семенников готовили мазки-отпечатки, которые фиксировали метиленовым синим по Май-Грюнвальду и затем окрашивали по Романовскому и просматривали под микроскопом при увеличении окуляра 10 объектива 40—100. Определяли митотический индекс в процентном соотношении делящихся клеток к общему числу и подсчитывали количество патологических фигур деления. Отдельно отмечали различные патологии мейоза и определяли их процентное соотношение к общему количеству клеток.

Семенники немедленно помещали в стеклянные контейнеры и заливали 10 %-ным раствором нейтрального формалина, после чего проводили стандартное гистологическое исследование на гистопроцессоре Leica TP 1020 и на заливочном аппарате Thermo Scientific Histostar. С полученных парафиновых блоков изготавливали срезы

толщиной 2—3 микрона на микротоме-полуавтомате фирмы Leica. Полученные срезы окрашивали гематоксилином и эозином (обзорная методика окраски) и по методу Ван Гизон. Срезы исследовали на световом микроскопе фирмы Leica с окуляром 10, при увеличении объектива 5, 40, 100.

Статистическую обработку фактического материала проводили методом вариационной статистики с использованием t-критерия Стьюдента.

**Результаты.** Из половозрелых форм фасциол был получен стерильный экстракт с содержанием белка 0,11 г/л, который был использован для последующего внутрибрюшинного введения мышам-самцам. Общее состояние контрольных и опытных животных оставалось удовлетворительным на протяжении всего периода эксперимента. Обнаруженные карипатические изменения представлены в таблице.

*Таблица 1.*

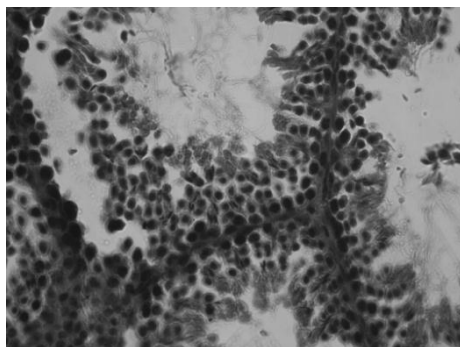
**Частота карипатических последствий в семенниках мышей после введения экстракта *F.hepatica***

Показатель	контроль	4 ч	12 ч	24 ч	48 ч	72 ч
Митотический индекс (%)	28,38 ± 0,18	38,95 ± 3,25	23,10 ± 1,53	27,87 ± 1,37	34,25 ± 3,55	28,84 ± 0,30
Патологии митоза (%)	0,30 ± 0,01	0,55 ± 0,15	0,40 ± 0,04	1,09 ± 0,07	0,75 ± 0,04	1,34 ± 0,07
Трехполюсная анафаза	0,01	—	—	0,26	—	0,24
Преждевременное расхождение хромосом в метафазе	0,01	0,02	0,01	0,53	0,30	0,58
Отставание хромосом в метафазе	0,01	—	0,03	—	—	0,2
Неравнополюсная анафаза	—	—	0,01	—	—	0,02
Преждевременное расхождение хромосом в анафаза	—	—	0,20	—	0,05	0,02
Анафаза с отставанием хромосом	—	—	—	—	0,05	0,02
Многоядерные клетки (%)	—	—	—	—	—	0,04

Наши наблюдения позволили установить, что под влиянием соматических продуктов *F.hepatica* нарушается деления сперматогенного эпителия с повышением митотического индекса через 4 и 48 часов, в остальные периоды наблюдения данный показатель незначительно отличался от контроля.

Значительное количество патологических фигур деления регистрировали через 24 часа (в 3,3 раза), через 48 часов (в 2 раза) и через 72 часа (в 4,5 раза). Среди патологий деления наиболее часто встречались преждевременное расхождение хромосом в метафазе и трехполюсная анафаза. Количество остальных видов патологий было небольшим.

В результате наблюдаемых изменений аппарата деления происходит формирование патологических спермиев. Гистологические исследования показали, что в семенниках лабораторных мышей происходит отек стромы органа, значительно снижается сперматогенез, в результате чего часть канальцев запустевает. В сохранивших активность канальцах спермии фрагментированы и находятся в состоянии агглютинации. Обнаруженные нами изменения свидетельствуют о значительном снижении репродуктивной функции экспериментальных животных.



**Рисунок 1. Семенник мыши. Отек стромы, неравномерный сперматогенез. Фрагментация сперматозоидов. Окраска гематоксилином-эозином Увел.Х400**

Полученные в ходе нашего эксперимента данные подтверждают отрицательное влияние продуктов метаболизма гельминтов на половые клетки хозяина, в значительной степени снижающее репродуктивную функцию инвазированных животных.

### **Выводы**

Соматический экстракт *F. hepatica* при однократном внутрибрюшинном введении самцам белых мышей вызывает нарушение сперматогенеза, которое наиболее выражено спустя

24—48 часов в виде патологии движения хромосом в метафазе и анафазе, что приводит к формированию патологических половых продуктов и, следовательно, к угнетению репродуктивной функции.

### **Список литературы:**

1. Ильинских И.Н., Новицкий В.В., Ильинских Е.Н., Ильинских Н.Н., Ткаченко С.Б. Инфекционная кариопатология. Под ред. Н.Н. Ильинских. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. — 168 с.: ил.
2. Hamada F.M., Abdel-Aziz A., Badr F., Moustafa A., Rashad A. The mutagenic effect of praziquantel in *S.mansoni* — infected mice. Arab. J. Lab. — 1992. — vol. 18. — P. 301—311.
3. Motorna O.O., Martyn N., Gentile G.J., Gentile J.M. Analysis of lacI mutation in Big Blue transgenic mice subjected to parasite-induced inflammation. Mutat. Res. fund. And Mol. Mech. of Mutagen. — 2001. — Vol. 484. — P. 69—76.

## **ПАТОЛОГИИ МЕЙОЗА КЛЕТОК СЕМЕННИКОВ БЕЛЫХ МЫШЕЙ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СОМАТИЧЕСКОГО АНТИГЕНА *DIROFILARIA IMMITIS***

***Согрина Анастасия Викторовна***

*аспирант ФГБНУ ВНИИП им. К.И. Скрябина,*

*РФ, г. Москва*

*E-mail: [sograv@yandex.ru](mailto:sograv@yandex.ru)*

***Бережко Вера Кузьминична***

*д-р биол. наук, профессор, зав. лабораторией иммунодиагностики*

*и клеточной технологии ФГБНУ ВНИИП им. К.И. Скрябина,*

*РФ, г. Москва*

*E-mail: [vog@vniigis.ru](mailto:vog@vniigis.ru)*

***Сивкова Татьяна Николаевна***

*д-р биол. наук, профессор ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА,*

*РФ, г. Пермь*

*E-mail: [tatiana-sivkova@yandex.ru](mailto:tatiana-sivkova@yandex.ru)*

***Написанова Людмила Александровна***

*канд. биол. наук,*

*старший научный сотрудник ФГБНУ ВНИИП им. К.И. Скрябина,*

*РФ, г. Москва*



# MEIOTIC DIVISION PATHOLOGY IN LABORATORY MICE TESTES AFTER DIROFILARIA IMMITIS SOMATIC ANTIGEN INJECTION

*Anastasia Sogrina*

*postgraduate student, All Russian Institute of parasitology,  
Russia, Moscow*

*Vera Beregko*

*doctor of Biological Science, professor, All Russian Institute  
of parasitology,  
Russia, Moscow*

*Tatyana Sivkova*

*doctor of Biological Science, professor, Perm State Agricultural Academy,  
Russia, Perm*

*Lyudmila Napisanova*

*candidate of Biological Science, All Russian Institute of parasitology,  
Russia, Moscow*

## АННОТАЦИЯ

Проведена работа по изучению кариопатического воздействия соматического экстракта половозрелых диروفиларий на сперматогенный эпителий нелинейных белых мышей после однократного внутрибрюшинного введения. Установлено, что антиген оказывает на клетки выраженное кариопатическое и цитотоксическое действие, а также угнетает активность деления сперматоцитов.

## ABSTRACT

Investigation of karyopatic effect of *Dirofilaria immitis* extract after single intraperitoneal injection to laboratory mice was carried. Distinct pathologic effect to nuclei and cells was observed. Somatic extract reduces meiotic division activity.

**Ключевые слова:** семенники; диروفилария; кариопатология.

**Keywords:** testes; *Dirofilaria*; karyopatology.

## Введение

Влияние гельминтов на организм хозяина остается актуальным вопросом современной паразитологии. Установлено, что гельминты

вызывают патологические изменения ядерных структур клеток человека и животных [3]. Патологии митоза и мейоза зачастую приводят к возникновению клеток с несбалансированными кариотипами, анеуплоидии. Также в результате развития отдельных форм патологий наблюдаются хромосомные aberrации.

Незавершенные митозы, прекращающиеся по причине дезорганизации или разрушения митотического аппарата, приводят к образованию полиплоидных клеток. Полиплодия и формирование дву- и многоядерных клеток возникают в случае нарушений механизмов цитокинеза. При значительных последствиях патологии митоза возможна гибель клетки [1], [4]. Известно, что практически любые патологические агенты биологической природы — вирусы, бактерии, простейшие и гельминты — способны вызывать поражения цитогенетических структур клеток человека и животных. Цитогенетические нарушения, в большинстве случаев, напоминают изменения, индуцируемые хорошо известными мутагенами — радиацией и химическими веществами [3]. По данным ученых соматические и метаболические продукты многих гельминтов являются митотическими ядами, оказывающими влияние на клетки красного костного мозга и сперматогенез [2].

В связи с широким распространением во всем мире опасного зооноза, вызванного нематодой *Dirofilaria immitis* (Leidy, 1856) Railliet et Henry, 1911, а также недостаточной изученностью вопроса патогенеза данного заболевания целью нашей работы стало проведение оценки степени кариопатических и цитотоксических эффектов белкового экстракта половозрелых диروفиларий на процесс деления клеток семенников белых мышей.

#### **Материалы и методы**

Материалом для проведения исследования послужили нелинейные белые мыши — самцы массой 18—22 г, которым проводили однократное внутрибрюшинное введение соматического экстракта *D. immitis* в дозе 100 мкг.

Контрольная группа оставалась интактной. Каждая группа состояла из 6 мышей. Убой животных проводили через 4;12;24;48; и 72 часа после введения антигена. После вскрытия выделяли семенники и готовили мазки — отпечатки, которые фиксировали по Май-Грюнвальду и окрашивали азур — эозином по Романовскому. Затем микроскопировали и осуществляли подсчет количества делящихся клеток, учитывали форму, размеры и окраску ядер. Анализ частоты встречаемости клеток с кариопатическими нарушениями и цитотоксическими эффектами проводили на отдельно лежащих и расплас-

танных клетках с подсчетом не менее 1000 клеток на каждом препарате. Для исследования митотической активности клеток использовали митотический индекс (МИ,%) — отношение числа делящихся клеток к общему числу клеток, которые мы видим в препарате на данный момент. Микроядра идентифицировали как хроматиновые округлые тела с гладким непрерывным краем, размером не более 1/3 ядра, которые располагались отдельно от основного ядра, не преломляли свет, с интенсивностью окрашивания и рисунком хроматина, как у основного ядра, и находились в одной плоскости с ядром [5]. Кроме того, учитывали двуядерные клетки, фрагментацию и вакуолизацию ядра, раннее (преждевременное) разделение хроматид в профазе, патологии митоза, связанных с повреждением митотического аппарата и нарушением цитотомии. Для статистической обработки результатов использовали пакет программ STATISTICA 6.

### Результаты и обсуждение

Данные анализа частоты встречаемости клеток с кариопатическими изменениями у мышей, подвергнутых воздействию белкового антигена *D. immitis* и в контрольной группе, приведены в таблице.

**Таблица 1.**

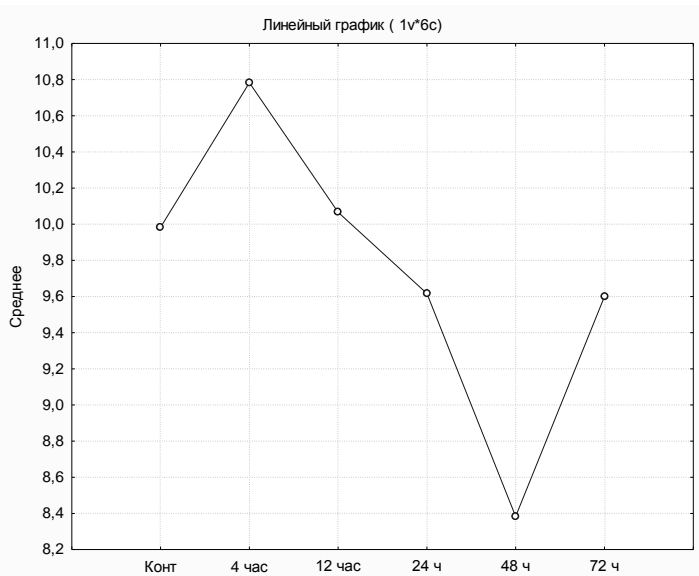
#### Частота кариопатических последствий в семенниках белых мышей, подвергшихся воздействию соматического антигена *D. immitis*

показатель	контроль	4 часа	12 часов	24 часа	48 часов	72 часа
Митотический индекс (%)	9,98 ±2,37	10,78 ±2,49	10,06 ±4,00	9,61 ±2,51	8,38 ±2,35	9,6 ±1,36
Патологии мейоза (%) от общего количества клеток	0,41 ±0,13	0,93 ±0,23	2,08 ±1,27	0,86 ±0,33	1,42 ±0,43	0,86 ±0,46
Патологии мейоза (%) от количества делящихся клеток	3,64 ±2,0	10,46 ±2,13	17,71 ±8,25	9,03 ±3,16	17,51 ±7,55	9,68 ±3,23
ПМ/АТ	11,23 ±5,37	8,39 ±3,37	5,9 ±2,41	7,00 ±1,58	6,66 ±3,09	9,30 ±3,06

патологии мейоза						
преждевременное расхождение группы хромосом в метафазе	0,06	0,11	—	0,01	0,11	—
трехполосная метафаза	—	0,10	0,10	0,10	0,01	—
метафаза с ядрышком	0,01	0,01	—	—	0,15	0,01
отставание хромосом в метафазе	0,18	0,11	0,96	0,20	0,45	2,65
отставание группы хромосом в метафазе	—	—	0,05	—	—	—
отставание хромосом в ана-телофазе	—	0,10	0,13	0,03	0,05	0,05
отставание группы хромосом в ана-телофазе	—	—	0,01	—	—	—
ана- телофаза с мостами	0,08	0,35	0,48	0,38	0,25	0,16
неравнополосная ана- телофаза	0,01	0,18	0,18	0,06	0,06	0,03
ана- телофаза с ядрышком	—	—	0,01	0,01	—	—
преждевременное расхождение хроматид в профазе	—	0,06	0,08	0,01	0,01	0,03
агглютинация хромосом	0,01	—	0,01	—	0,21	0,16
метафаза с тенью	—	—	0,01	—	0,01	
несинхронное деление ядра	—	—	0,01	—	—	

Активность деления клеток семенников по отношению к контролю незначительно возрастает через 4 часа после начала эксперимента, а затем показатель МИ снижается и через 48 часов достигает наименьших значений. Таким образом, мы наблюдаем угнетение пролиферативной активности клеток семенников, что наглядно отображено на линейном графике (рис. 1). При этом процент патологий от общего числа клеток по сравнению с контролем аномально возрастает к 12 часам от начала эксперимента. При сравнении соотношения фигур деления во всех случаях экспериментальных групп профазы и метафазы значительно преобладали над анафазами и телофазами при общем снижении митотической активности и увеличении числа патологий, связанных с повреждением хромосом и митотического аппарата. Таким образом, можно предполагать элиминирование посредством апоптоза патологических клеток, что и вызвало дисбаланс соотношения фигур

деления в экспериментальных группах. Число клеток с нормальным ядром в контрольной группе (фото 1) в несколько раз больше, чем в группах экспериментальных животных. При этом из наблюдаемых патологий деления ядра в контроле лидирующее место занимает метафаза с отставанием хромосомы и анафаза — телофаза с мостом.



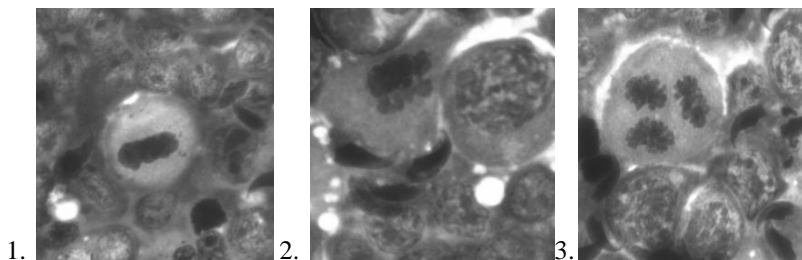
**Рисунок 1. Линейный график активности деления клеток семенников под воздействием соматического антигена *D. immitis*. МИ, (%).**

Известно, что патологические митозы в нормальных тканях встречаются в 2—3 % клеток и менее [1]. В экспериментальных группах 12 и 48 часов выявлено наибольшее количество патологий делящихся клеток, среди которых преобладает отставание хромосом в метафазе. Данная патология возникает при повреждении хромосом в области кинетохора. Поврежденные хромосомы пассивно «дрейфуют» в цитоплазме и в итоге либо разрушаются и элиминируются из клетки, либо случайным образом попадают в одно из дочерних ядер, либо образуют микроядро [1], что мы и выявляли в ходе эксперимента.

В сравнении с интактной группой появляются такие патологии как преждевременное расхождение хроматид в профазе, многополю-

сний митоз (фото 3), мосты в ана- телофазе. Выявленные патологии напрямую связаны с повреждением хромосом и, как правило, приводят к генотипической разнородности дочерних клеток, а также нарушают течение завершающих стадий деления и задерживают цитокинез [2]. Значительно возрастает количество клеток с агглютинацией хромосом. Такая патология часто встречается в опухолевых клетках и при воздействии митотических ядов. Набухая, хромосомы утрачивают правильные очертания и, склеиваясь поверхностями, образуют неправильные комковатые массы. Расхождения хромосом не происходит, и клетки часто гибнут [1].

При микроскопировании окрашенных мазков-отпечатков нам неоднократно встречалась патология деления ядра, которую мы идеентифицировали, как полное нерасхождение сестринских хроматид и поскольку данная патология не описана в литературе, назвали ее «Метафаза с тенью» (фото 2). По аналогии с классификацией патологий митоза по Алову И.А. (1965) [1] предполагаем, что, также как и нерасхождение хромосом, этот кариопатический эффект связан с нарушением кинетохорной области, либо с частичной дезорганизацией хромосомных нитей веретена. В незначительном количестве за период исследования встречались формы патологии, связанные с нарушением цитотомии.



**Фото. 1. — Метафаза без патологии 2. — Метафаза с тенью 3. — Многополюсное деление клетки. Окраска азур-эозином. Увеличение 10X100**

### **Выводы**

В ходе анализа полученных результатов можно сделать вывод, что соматический антиген *D. immitis* оказывает на клетки семенников белых нелинейных мышей выраженное кариопатическое и цитотоксическое действие, а также угнетает активность деления сперматоцитов. Основные патологии связаны с повреждением хромосом

и аппарата деления. Пик патогенетической активности данного антигена приходится на 12 часов от начала эксперимента, а через 48 часов мы наблюдали значительное торможение процесса деления клеток семенников. Такой временной интервал можно объяснить активацией контроля цитогенетического постоянства и сложной белковой структурой соматического экстракта гельминта.

### Список литературы:

1. Алов И.А. Цитофизиология и патология митоза М.: «Медицина», 1972. — 264 с. — 3700 экз.
2. Кариопатическое и патоморфологическое действие продуктов метаболизма паразитов и влияние на репродуктивную функцию домашних плотоядных. Диссертация и автореферат по ВАК 03.02.11, д.б.н Сивкова Т.Н. Научная библиотека диссертаций и авторефератов disserCat. [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.dissercat.com/content/kariopaticheskie-i-patomorfologicheskie-izmeneniya-pod-deistviem-produktov-metabolizma-paraz#ixzz3Lue7lD4b>.
3. Цитогенетический анализ последствий инфекционного мутагенеза в связи с состоянием иммунореактивности организма. Диссертация по ВАК 03.00.15, д.б.н, Ильинских Н.Н. Научная библиотека диссертаций и авторефератов disserCat. [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.dissercat.com/content/tsitogeneticheskii-analiz-posledstviiv-infektsionnogo-mutageneza-v-svyazi-s-sostoyaniem-immun#ixzz3LuKfOx7K>.
4. Morgan D. O. The cell: principles of control. New science press, 2007. — 297 p. — ISBN 978-0-9539181-2-6.
5. Tolbert P.E. Micronuclei and other nuclear anomalies in buccal smears: methods development / P.E. Tolbert, C.M. Shy, J.W. Allen // Mut. Res. 1992. 271. — P. 69—77.

## СЕКЦИЯ 5.

### ХИМИЯ

#### 5.1. ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

##### ДИФФУЗИОННЫЙ ТРАНСПОРТ В ЦИЛИНДРЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

***Жицерман Владимир Юрьевич***

*канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Объединенного  
института высоких температур Российской Академии наук,  
РФ, г. Москва  
E-mail: [vz1941@mail.ru](mailto:vz1941@mail.ru)*

***Махновский Юрий Абрамович***

*канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник  
Института нефтехимического синтеза им. А.В. Топчиева Российской  
Академии наук,  
РФ, г. Москва  
E-mail: [yuat@jps.ac.ru](mailto:yuat@jps.ac.ru)*

***Антипов Анатолий Евгеньевич***

*научный сотрудник факультета фундаментальной физико-  
химической инженерии Московского государственного университета,  
РФ, г. Москва  
E-mail: [89636941963antipov@gmail.com](mailto:89636941963antipov@gmail.com)*



# DIFFUSIONAL TRANSPORT IN A TUBE WITH VARIABLE CROSS-SECTION

**Zitserman Vladimir**

*leading scientist, Candidate of Science,  
Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences,  
Russia, Moscow*

**Makhnovskii Yurii**

*leading scientist, Candidate of Science, Topchiev Institute  
of Petrochemical Synthesis, Russian Academy of Sciences,  
Russia, Moscow*

**Antipov Anatoly**

*postgraduate student, Moscow State University,  
Faculty of Fundamental Physics and Chemical Engineering,  
Russia, Moscow*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ — проект № 14-03-00343. В.Ю.З. благодарит за поддержку в рамках программы ПРАН № 43 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (координатор — акад. Бетелин В.Б.).*

## АННОТАЦИЯ

Рассмотрена задача о дрейфе и диффузии частицы в трубке, состоящей из периодически распределенных сегментов малого и большого радиусов, под действием силы, направленной вдоль оси трубки. Предложен приближенный подход, позволяющий аналитически рассчитать эффективные транспортные коэффициенты в условиях сильного сноса. Полученные формулы для эффективной подвижности и эффективного коэффициента диффузии хорошо согласуются с данными компьютерного моделирования, выполненного методом броуновской динамики.

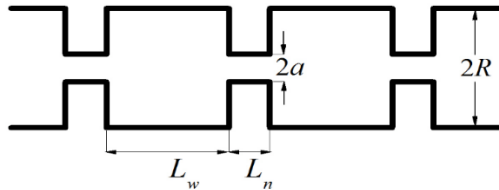
## ABSTRACT

We consider the problem of drift and diffusion of a particle in a tube, consisting of periodically distributed segments of small and large radius, under the action of force directed along the tube axis. An approximate approach is proposed which provides analytical treatment of effective transport coefficients under strong bias conditions. Equations derived for the effective mobility and effective diffusivity are in good agreement with computer simulation data obtained by the Brownian dynamics method.

**Ключевые слова:** диффузия; дрейф; подвижность; броуновская динамика.

**Keywords:** diffusion; drift; mobility; brownian dynamics.

В связи с исследованиями транспорта в микронеоднородных природных и биологических объектах, в последние годы возник повышенный интерес к задаче о дрейфе и диффузии в квазиодномерных периодических структурах переменного сечения под действием внешней силы. Традиционно используется приближение Фика-Джекобса [3], которое позволяет при слабой вариации сечения свести задачу к одномерной (1D) за счет введения энтропийного потенциала. Этот подход не применим, когда имеют место резкие скачки сечения. Вместе с тем, одномерное описание в терминах эффективных диффузии и сноса остается оправданным на масштабах, превосходящих период структуры. В данной работе показано как найти эффективные транспортные коэффициенты, подвижность  $\mu_{eff}$  и коэффициент диффузии  $D_{eff}$ , частицы, движущейся под действием силы  $F \rightarrow \infty$  в структуре, показанной на рис. 1.



**Рисунок 1.** *Схема модели: частица движется в трубке, состоящей из чередующихся широких и узких участков, радиусы и длины которых равны  $R$  и  $L_w$ , и  $a$  и  $L_n$ , соответственно*

Предлагаемый подход основан на том факте, что частица, движущаяся в этих условиях, может находиться только в двух состояниях: (1) подвижном, когда она, пребывая в цилиндре радиуса  $a$ , движется свободно со скоростью  $v_0 = \mu_0 F$  ( $\mu_0$  подвижность в свободном пространстве) и (2) неподвижном, когда она, попадая в широкий участок, оказывается за пределами этого цилиндра и, будучи прижатой к стенке, не участвует в продольном движении. Таким образом, вычисление  $\mu_{eff}$  сводится к нахождению вероятности  $P_m$  обнаружить частицу в подвижном состоянии.

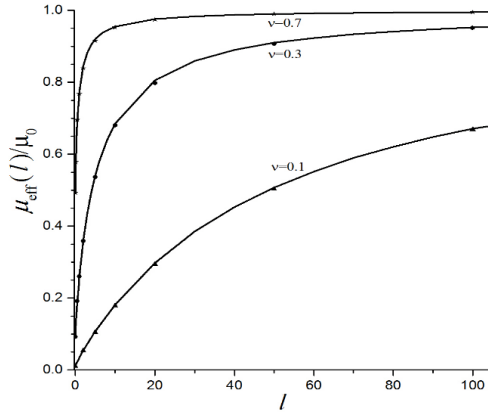
Для решения этой задачи введем вероятности  $p_1, p_2, p_3$  обнаружения частицы: в цилиндре радиуса  $a$  в широком участке; вне этого цилиндра в широком участке; в узком цилиндре. Наряду с условием нормировки, эти вероятности удовлетворяют еще двум соотношениям. Одно из них связывает  $p_1$  и  $p_3$ , отражая тот факт, что они пропорциональны длинам соответствующих участков. Соотношение между  $p_1$  и  $p_2$  определяется распределением частиц в сечении радиуса  $R$  широкого участка. Ранее было показано [2; 4], что в отсутствие узкого участка,  $L_n = 0$ , когда в трубке периодически расставлены тонкие перегородки с отверстием радиуса  $a$ ,  $p_1 / p_2$  равно отношению площадей  $v^2 / (1 - v^2)$ , где  $v = a/R$ , поскольку распределение частиц в сечении в этом случае равномерно. Наличие узкого участка к обеднению вероятности нахождения частиц на стенке, что учитывается введением фактора  $\varphi(l) = p_2(l, v) / p_1(l, v) (v^2 / (1 - v^2)) \leq 1$ , где  $l = L_n / L_w$ , причем этот фактор равен 1 только при  $l = 0$ . Как показано в [6],  $\varphi(z) \simeq 0.5(e^{-2\sqrt{l}} + 1)$ . С учетом приведенных соображений находится искомая вероятность пребывания частицы в подвижном состоянии и в результате эффективная подвижность может быть записана в виде

$$\mu_{eff} = \frac{Kv^2}{1 + (K-1)v^2} \mu_0, \quad K = (1+l)/\varphi(l). \quad (1)$$

Рисунок 2 показывает хорошее согласие предсказаний (1) с данными моделирования.

Переходя к вычислению  $D_{eff}$  заметим, что вклад в продольную диффузию связан с двумя факторами: средним временем, проводимым частицей в подвижном состоянии,  $t_m$ , и дисперсией этого времени  $\sigma_m^2(t)$ , где  $t$  — время наблюдения. Соответственно, при  $t \rightarrow \infty$   $D_{eff}$  может быть записан в виде [6] ( $D_0$  — коэффициент свободной диффузии)

$$D_{eff} = \frac{v_0^2 \sigma_m^2(t)}{2t} + D_0 \frac{\langle t_m \rangle}{t}. \quad (2)$$



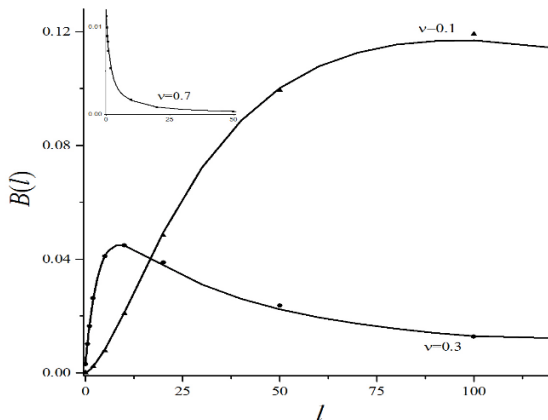
**Рисунок 2.** Отношение подвижностей  $\mu_{\text{eff}}(l)/\mu_0$  как функция  $l$  при значениях  $\nu = 0.1, 0.3, \text{ и } 0.7$ . Символами представлены результаты для  $\mu_{\text{eff}}(l)/\mu_0$ , полученные на основании данных компьютерного моделирования с  $\beta FR = 10^5$ . Сплошные кривые получены из формулы (1)

Отношение  $t_m/t \rightarrow P_m$  при  $t \rightarrow \infty$ . Для вычисления дисперсии  $\sigma_m^2(t)$  удобно воспользоваться методом, предложенным в [1] для нахождения дисперсии времени пребывания в круге радиуса  $a$  частицы, блуждающей в круге радиуса  $R > a$ . Повышение вероятности пребывания частицы в малом круге (за счет наличия узкого участка трубки) мы учитываем, вводя в него потенциальную яму, глубина которой  $\Delta U = k_B T \ln K$  зависит как от длины узкого сегмента,

так и от фактора  $\varphi(l)$ . Обобщая таким образом результат [1], получим из (2) следующее выражение

$$D_{\text{eff}} = \left[ B(l, \nu) (\beta FR)^2 + P_m \right] D_0,$$

$$B(l, \nu) = \frac{K^2 \nu^4}{\left[ 1 + (K-1)\nu^2 \right]^3} \times \left[ 2 \ln \frac{1}{\nu} + \nu^2 - 1 - \frac{(1-\nu^2)^2}{2} (1-K^{-1}) \right]. \quad (3)$$



**Рисунок 3. Параметр  $B(l, \nu)$ , характеризующий  $D_{eff}$ , как функция  $l$  при значениях  $\nu = 0.1, 0.3$  и  $0.7$ . Символами представлены результаты, полученные на основании данных моделирования, при  $\beta FR = 10^5$ . Сплошные кривые отвечают формуле (3)**

Рисунок 3 показывает хорошее согласие предсказаний (1) с данными моделирования. Перескоки между состояниями приводят к квадратичному по силе слагаемому. Поскольку наш подход оправдан при  $\beta FR \geq 10^3$ , это слагаемое, как правило, доминирует, то есть  $D_{eff} \propto F^2$ . Только при  $l \gg 1$  или  $\nu \rightarrow 1$ , когда вариация сечения мало значима, доминирует второе слагаемое в (3) и  $D_{eff} \approx D_0 P_m \rightarrow D_0$ . Пока  $\nu \leq 0.68$  зависимость  $D_{eff}(l)$ , проходит через максимум. При  $\nu \geq 0.68$  коэффициент диффузии с ростом  $l$  монотонно снижается вплоть до  $D_0$ .

Таким образом, для сложной модели удалось найти транспортные коэффициенты частицы, характеризующие ее дрейф и диффузию в условиях сильного сноса. Предложенный подход основан на замене стационарного неравновесного состояния 3D задачи, равновесным состоянием 2D задачи. Его оправданность доказана сопоставлением предсказаний теории с данными численного моделирования, выполненного методом 3D броуновской динамики. Хотя полученные результаты справедливы лишь при  $\beta FR \gg 1$ , наличие оценок

и при  $\beta FR \rightarrow 0$  [5] позволяет надеяться на возможность построения интерполяций, применимых при любой силе поля.

### Список литературы:

1. Berezhkovskii A.M. Variance of residence time spent by diffusing particle in a sub-domain: Path integral based approach. // Chem.Phys. — 2010. — V. 370. — № 1—3. — P. 253—257.
2. Berezhkovskii A.M., Dagdug L., Makhnovskii Yu.A., Zitserman V.Yu. Drift and diffusion in a tube of periodically varying diameter. Driving force induced intermittency // J. Chem. Phys. — 2010. — V. 132. — № 22. — Ar# 221104.
3. Jacobs M.H. Diffusion Processes. Springer-Verlag New York Inc., 1967. — 160 p.
4. Makhnovskii Yu.A., Berezhkovskii A.M., Bogachev L.V., Zitserman V.Yu. Driven diffusion in a periodically compartmentalized tube: Homogeneity versus intermittency of particle motion. J. Phys. Chem. B. — 2011. — V. 115. — № 14. — P. 3992—4002.
5. Makhnovskii Yu.A., Berezhkovskii A.M., Zitserman V.Yu. Diffusion in a tube of alternating diameter. // Chem. Phys. — 2010. — V. 367. — № 2/3. — P. 110—114.
6. Zitserman V.Yu., Berezhkovskii A.M., Antipov A.E., Makhnovskii Y.A. Biased diffusion in tubes of alternating diameter: Analytical treatment in the case of strong bias. // J. Chem. Phys. — 2014. — V. 141. — № 21. Ar# 214103.

## СЕКЦИЯ 6.

### НАУКИ О ЗЕМЛЕ

#### 6.1. ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОГРАФИЯ И ЛАНДШАФТОВЕДЕНИЕ

##### ДИНАМИКА ПРОДУКТИВНОСТИ ОСНОВНЫХ АССОЦИАЦИЙ КАРГАЛИНСКОЙ СУБГЕОСИСТЕМЫ И ВЛИЯНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ НА ЕЕ ЗАПАС

***Берденов Жарас Галимжанович***

*Phd докторант*

*Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева,*

*Республика Казахстан, г. Астана*

*E-mail: [berdenov.87@mail.ru](mailto:berdenov.87@mail.ru)*

***Мендыбаев Ерболат Хамзинович***

*канд. биол. наук,*

*доцент Актюбинского регионального государственного*

*университета им. К. Жубанова,*

*Республика Казахстан, г. Актюбе*

***Мазбаев Орденбек Близбекович***

*д-р геогр. наук, профессор*

*Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева,*

*Республика Казахстан, г. Астана*

# DYNAMICS OF PRODUCTIVITY MAIN ASSOCIATIONS KARGALINSKY SUBGEOSISTEMY AND INFLUENCE OF ENVIRONMENTAL CONDITIONS ON ITS STOCK

*Beardenov Zharas*

*Phd Doctoral Eurasian National University. L.N. Gumilev,  
Republic of Kazakhstan, Astana*

*Mendybayev Erbolat*

*Ph.D., associate professor  
of Aktobe Regional State University im.K. Zhubanova,  
Republic of Kazakhstan, Aktobe*

*Mazbaev Ordenbek*

*doctor of Geographical Sciences, Professor  
of the Eurasian National University. L.N. Gumilev,  
Republic of Kazakhstan, Astana*

## АННОТАЦИЯ

Почвообразовательный процесс неразрывно связано с продуктивностью растительных сообществ, а антропогенный прессинг с каждым годом возрастает. Именно этот факт способствовал тому, что мы решили заняться исследованиями растительного и почвенного покровов, а также изучением продуктивности растительных ассоциаций. Нами были исследованы степи Актыубинской области, выявлены основные ассоциации и показана неразрывная связь продукционного и почвообразовательного процессов.

## ABSTRACT

The soil educational process inseparably linked with efficiency of vegetative communities, and anthropogenous pressure increases every year. This fact promoted that we have decided to be engaged in researches of vegetative and soil covers, and also studying of efficiency vegetative associations. We had been investigated steppes of the Aktyubinsk area, the basic associations are revealed and indissoluble communication of efficiency and soil educational processes is shown.

**Ключевые слова:** геосистема; почва; растительная ассоциация; продуктивность; динамика продуктивности.

**Keywords:** geosystem; soil; plant association; productivity; dynamics of productivity.



В связи с увеличением антропогенной нагрузки, вопрос охраны и сохранения растительности с каждым годом становится все более актуальным. Именно этот факт способствовал тому, что мы решили заняться исследованиями растительного и почвенного покровов, а также изучением продуктивности растительной ассоциации Прикаспийской впадины.

Растительный покров характеризуется большой комплексностью и меняется по мере изменения условий почвообразования. Встречаются в основном: пырей ползучий, ковыль волосатик, ковыль Лессинга, типчак, одуванчик лекарственный, пижма обыкновенная, полынь белая, полынь горькая и т. д. [3].

Среди экологических функций почв важнейшее значение имеет аккумуляция почвами биофильных химических элементов, т. е. элементов особенно необходимых для жизни растений и животных. Способность тех или иных химических элементов накапливаться (концентрироваться) в составе организмов, по сравнению с их содержанием в литосфере, А.И. Перельман (1979) предложил называть биофильностью, степень биофильности измеряется коэффициентом биологического поглощения (КПБ), показывающим во сколько раз содержание элемента "X" в золе растений или животных больше чем в почве (литосфере).

Процессы почвообразования изменяют отдельные свойства почв, почвенные горизонты и почвенный профиль, а на молекулярном уровне определяют процесс гумификации, обменные реакции, изоморфные замещения в минералах, окисление и восстановление соединений в почве. А эти процессы, в свою очередь, изменяют такие свойства почвы, как плотность, водопроницаемость, влагоёмкость, способность фиксировать органическое вещество и т. п. [2]

Поэтому, мы и придаем большее значение изучению морфологических признаков и химических свойств почвенных профилей разных подтипов и разновидностей почвенного покрова исследуемой территории. По изученности морфологических признаков и химических свойств почвенных профилей можно делать выводы об оценке опустынивания местности, об изменении климата.

Почва предстает перед нами в качестве главной среды обитания всего органического мира на Земле. Исследования многих ученых (В.И. Вернадский, 1960; Добровольский, Никитин, 1990) и наши данные позволяют отличить реальную близость химического состава почвы и живого вещества (по многим элементам). О том, какой грандиозный биохимический процесс представляет годичная аккумуляция биофильных элементов в почвах можно судить по тому,

что он примерно равен суммарному годовому химическому стоку рек на земном шаре или даже превышает его [3]. Это и есть пример значения почвы, как глобального механизма саморегуляции и поддержания устойчивости функционирования биосферы.

По классификации геосистем бассейновых территорий, исследуемая нами территория относится к Илекской макрогеосистеме, которая, в свою очередь, подразделяется на геосистемы более мелкого порядка — субгеосистемы [8]. В географическом плане территория Илекской макрогеосистемы представляет собой территорию Актюбинской области, которая расположена на стыке трех крупных геологических структур: Русской платформы, Туранской плиты и Уральской горноскладчатой области и имеет сложное тектоническое и геологические строение [7].

Наши исследование проводилось на двух стационарных участках Карагалинской субгеосистемы: в степной зоне на левобережье реки Урал, юго-западнее села Большевик (90 км Северо-Восточней города Актобе); и в степной зоне, в 140 км восточнее города Актобе (вблизи села Мамыт), в течение вегетационного периода (май-октябрь) 2012 г.

Исследуемые территории расположены в зоне распространения южного чернозёма и темно-каштановых почв. Почвенный покров разнообразный, что обусловлено разнообразием общих природных условий.

Приведем описание морфологического профиля изучаемой нами почвы. Разрез № 1 расположен западнее на 7 км села Большевик, бывшее село Шевченко, Каргалинского района Актюбинской области.

Растительный покров представлен разнотравно-пырейной ассоциацией на луговой почве в западинах. Основу травостоя пырейных сообществ образует пырей ползучий (*Elytrigia repens*), который является эдификатором.

Мы предполагаем, что рассматриваемая нами почва является южным черноземом.

Южные черноземы по своему составу и строению находится в переходной зоне от чернозёмов к темно-каштановым почвам.

Сверху они имеют мощную подстилку (2—4 см), под которой залегает гумусовый горизонт (А).

Растительный покров представлен разнотравно-пырейной ассоциацией. Проективное и истинное покрытие соответственно 100—50 %, высота травостоя 35—50 см. Почва от соляной кислоты бурно вскипает с поверхности. Гумус по профилю распределен равномерно.

А<sub>0</sub> — 0—4 см. — Слаборазложившаяся подстилка, степной войлок.

А 4—30 см. — Черный, комковато-ореховатая, уплотнена, сырая, тяжелый суглинок, корней много, переход в следующий горизонт постепенный.

В 30—63 см. — Черный с серым оттенком, ореховато-пылеватая, сырая, уплотнена, тяжелый суглинок, корней много, темные пятна – подтеки, переход постепенный.

ВС 63—105—150 см. — Темно-каштановый с серым оттенком, комковатая, сырая, тяжелый суглинок, корней мало, переход в следующий горизонт плавный.

С 150 см. — Материнская порода, светло-коричневый, крупнопластинчатый, глинистый, плотный, изредка кристаллы гипса.

Нами были взяты образцы почв для химического анализа с каждого горизонта.

Гумус в почве определялся по Тюрину в модификации ЦИНАО Гост 26213-84, рН — водной вытяжки — по Михаэлису [5; 6].

Катионно-анионный состав водной вытяжки определялся по Госту 26423-85 и Госту 26428-85, нитраты ионометрическим методом Гост 26951-86. Подвижные формы тяжелых металлов свинец, кадмий, цинк, медь определялись современным методом (Грановский, Неменко, (1990)) [4].

Наши данные мы сопоставляли с данными за 1968 и 1976 год, которые брались из агропочвенных очерков Каргалинского района Актюбинской области [1].

*Таблица 1.*

**Состав водной вытяжки на почвах первого участка за 2012 г.**

№	Генетический горизонт	Анионы мг.-экв./ %				Катионы мг.-экв./ %			Тип засолен.	Степ. засолен
		CO <sub>2</sub>	HCO <sup>3-</sup>	Cl <sup>-</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	Ca <sup>2+</sup>	Mg <sup>2+</sup>	Na <sup>+</sup>		
1	А (0—30 см)	-	0,64 0,039	0,03 0,001	1,26 0,08	0,31 0,003	0,04 0,001	1,58 0,0036	Хлоридно-сульфатное	Незасолен.
2	В (30—63 см)	-	0,65 0,04	0,18 0,009	1,44 0,121	0,37 0,007	0,06 0,001	2,27 0,052	Сульфатное	Слабая
3	ВС 63—150 см	Следы	1,03 0,063	0,19 0,009	1,52 0,125	0,58 0,012	0,16 0,002	2,01 0,046	Сульфатное	Слабая

Таблица 2.

## Состав водной вытяжки почв Большевикского с/х 1968 г.

№	Генетический горизонт	рН	Анионы миллэкв на 100г./ %				Катионы миллэкв на 100г./ %			Тип засолен.
			CO <sub>2</sub>	HCO <sup>3-</sup>	Cl <sup>-</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	Ca <sup>2+</sup>	Mg <sup>2+</sup>	Na <sup>+</sup>	
1	А (0—30 см)	7,8	0,9	0,88	0,09	0,36	0,47	0,12	0,03	Остаточно-карбонат.
				0,059	0,003	0,006	0,45			
2	В (30—63 см)	7,7	7,1	0,96	0,09	0,12	0,41	0,43	0,05	Остаточно-карбонат.
				0,051	0,003	0,024	0,34		0,0052	
3	ВС (63—150 см)	7,8	Не определ.	0,84	0,09	0,5	0,44	0,37	0,03	
				0,057	0,003	0,009	0,09	0,003		

Содержание в %; мг-экв в 100 г. почвы

Рассматривая данные таблицы 1, отражающие физико-химические свойства разреза № 1, следует отметить, что они являются характерными для всего рода солонцеватых черноземов. Следует сказать, что по запасам черноземов они заметно уступают нормальным и карбонатным черноземам. А также иную картину представляет состав поглощенных оснований. Уменьшена роль поглощенного кальция и магния, но увеличивается количество поглощенного натрия.

Из табл. 1 видно, что в солевом составе преобладают сульфаты, а карбонаты вообще не обнаружены, что тоже характерно для черноземов южных солонцеватых.

Солевой профиль солонцеватых черноземов имеет максимум легкорастворимых солей в нижней части солонцового горизонта. Отчетливо прослеживается нарастание общей щелочности в иллювиальном горизонте. Реакция почвы слабощелочная.

Таблица 3.

## Данные по содержанию гумуса на почвах первого участка

Горизонт и глубина в см.	Гумус по Тюрину в % 1968 г.	Гумус по Тюрину в % 1976 г.	Гумус по Тюрину в % 2012 г.
А 0—30	9,8	7,55	4,84
В 30—63	6,2	3,17	3,96
ВС 63—150	3,54	1,8	1,97

Сравнивая с анализами 1968 годов (табл. 1, 2), мы видим, что на территории села Большевик Каргалинского района были остаточнокarbonатные или меловые южные черноземы. Результаты химического анализа показывают, что содержание гумуса в меловых черноземах колеблется в широких пределах (табл. 3). Таким образом, к 2011—2012 году содержание гумуса в исследуемой почве меньше вдвое. Очевидно, это связано с тем, что до начала 90-х годов прошлого века там выращивались: картофель, капуста, свёкла, и другие культуры, а также на некоторых участках сеялись зерновые культуры [1]. Таким образом, гумусный слой истощался, восстановительные работы не проводились, почву не обогащали удобрениями. С распадом СССР данные земли остались зарезервированными, соответственно не использовались по назначению, и таким образом, мы предполагаем, что идет накопление истощенного слоя гумуса естественным путем, что мы наблюдаем из химических анализов в горизонте В.

Исследования загрязнения почв комплекса тяжелыми металлами. показали, что кадмий, свинец, цинк и медь не превышает ПДК (табл. 4).

**Таблица 4.**

**Содержание тяжелых металлов (мг/дм<sup>3</sup>)**

Глубина, см	Cd	Zn	Cu	Pb
А (0-30)	0,00007	0,0767	0,097	Не обнаружено
В (30-63)	0,00001	0,1267	0,104	Не обнаружено
ВС (63-150)	0,00002	0,0218	0,112	Не обнаружено
<b>ПДК</b>	<b>0,001</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>0,03</b>

Приведем описание морфологического профиля 2 разреза. Он был сделан на стационарном участке в степной зоне, в 140 км восточнее города Актобе (вблизи села Мамыт), Каргалинского района Актюбинской области. Месность гористая. Распологается в районе Мугоджарского мелкосопочника, приурочиваясь к вершинам и крутым склонам, иногда к межсopочным понижениям. Почвы частично защебнены.

Растительный покров представлен ковыльно-белополынной ассоциацией *Stipa capillata*+*Artemisia lerchiana*. Основу травяных сообществ образует ковыль *Stipa capillata* который является эдификатором, также обильно распространены: *Kochia prostrata*, *Koeleria cristata*.

Мы предполагаем, что рассматриваемая нами почва является темно-каштановой почвой. Проектное покрытие 70 %, а истинное покрытие соответственно 35 %, высота травостоя 10-15 см.

От действия 10 % соляной кислоты не вскипает.

А 0—25 см. — Буровато-темно-серый, сухой, легкосуглинистый, с мелкой галькой, пылевато-комковатый, корней много, уплотнен, не вскипает, переход постепенный.

В 25—45 см. — Коричнево серый с буроватым оттенком, свежий, комковато-ореховатый, плотный корней мало, не вскипает, переход в следующий горизонт ясный.

BC 45—65 см. — Серовато-буроватый, сухой, плотный, трещиноватый, глинистый, глыбистый, вскипает в нижней части.

С 65—85 см. — Желто-бурый свежий, глыбистый, опесчаненный тяжелый суглинок, переходящий в щебень.

С<sub>1</sub> 85—..... — Такой же, но менее опесчанен и более щебнистый.

Из разреза наблюдаем близкое подстиление коренными плотными породами, отсутствие ясных выделений карбонатов, преимущественно суглинистый механический состав и защебенность почвенного профиля.

Гумусность горизонта небольшая. Содержание гумуса 2,71 % (таб. 5).

**Таблица 5.**

**Содержание гумуса на темно-каштановых почвах**

Горизонт и глубина	Гумус по Тюрину в % 1968 г.	Гумус по Тюрину в % 1976 г.	Гумус по Тюрину в % 2012 г.
А 0—25	3,5	3,0	2,81
В 25—45	2,5	2,3	2,0
BC 45—65	2,4	2,0	1,98
С 65—85	-	-	-

Сопоставляя данные органического вещества полученные нами с данными за 1968 г., и 1976 годы, можно сказать, что гумусный слой остался практически не измененным [1]. (таб. 5).

Таблица 6.

Состав водной вытяжки темно-каштановых почв 2012 г.

№	Генетический горизонт	рН	Анионы моль в 100 г почвы				Катионы моль в 100 г почвы		
			CO <sub>2</sub>	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	Cl <sup>-</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	Ca <sup>2+</sup>	Mg <sup>2+</sup>	Na <sup>+</sup>
1	A 0-25	7,4	Не обн.	0,51 0,003 %	1,4 0,05 %	0,053 0,003 %	0,25 0,005 %	0,08 0,001 %	—
2	B 25-45	7,3	Не обн.	0,525 0,032 %	1,2 0,04 %	0,17 0,008 %	0,13 0,0025	2,25 0,027 %	—
3	BC 45-65	7,54	след	0,54 0,033 %	1,8 0,06 %	0,027 0,0013 %	0,75 0,015 %	1,75 0,002 %	—
4	C 65-85	-	-	-	-	-	-	—	—

Как видно из таблицы 6, эти почвы промыты от карбонатов, реакция водной суспензии (рН) близкая к нейтральной, и с глубиной она увеличивается. Сумма поглощенных оснований невысокая, с глубиной она равномерно уменьшается, общая щелочность находится в пределах нормы.

Анализируя растительный покров нашего участка, физико-химические свойства (табл. 5,6), можно сделать вывод, что данная почва является неполноразвитой темнокаштановой почвой. Эти почвы часто обнаруживают засоление водорастворимыми солями на границе перехода к материнской породе. По своим агропроизводственным свойствам они относятся к категории пастбищных земель.

**Вывод**

1. Исследуемая нами в степной зоне на левобережье реки Урал почва является южным черноземом солонцеватым. Содержание гумуса — 4,84 %.

2. Почва данного участка переживает стадию засоления, о чем свидетельствует преобладание ионов натрия над ионами кальция и магния. Что указывает на преобладание луговых видов растительности (*Elytrigia repens*, *Stipa capillata*, *S. Lessingiana*, *Medicago romanica*, *Phlomis tuberosa Ph.pungens*).

3. На втором гидроучастке в степной зоне, вблизи села Мамыт, мы наблюдаем постепенное, не ярко выраженное, снижение органического вещества (гумуса). Мы предполагаем что это связано

с неправильным использованием пастбищных земель, что со временем может привести к опустыниванию исследуемого участка.

### **Список литературы:**

1. Агрочувствительный очерк по Каргалинскому району Актюбинской области. Актюбинский филиал института «Казгипрозем», 1980 год. Директор: Р.Гадильшин; нач. почвенного отдела: А. Иванов.
2. Аринушкина Е.В. Руководство по химическому анализу почв. М., Изд-во МГУ, 1970. — 487 с.
3. Ковда В.А. Почвы Прикаспийской низменности (северо-западной части). (Научный отчет о результатах исследований проведенных в 1932—1938 гг.). М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950, — с. 112—113.
4. Методические указания по атомно-абсорбционному определению микроэлементов в вытяжках из почв и в растворах золы кормов и растений. М.: ЦИНАО, 1937 г. — стр. 34.
5. «Метод определения иона хлорида в водной вытяжке» ГОСТ 26425-85, «Метод определения ионов карбоната и бикарбоната в водной вытяжке» ГОСТ 26423-85, «Метод определения кальция и магния в водной вытяжке» ГОСТ 26428-85.
6. «Методы определения органического вещества» по Тюрину в модификации ЦИНАО основанный на окислении органического вещества, ГОСТ 26213-91.
7. Национальный Атлас Республики Казахстан. Том 1: «Природные условия». Институт географии. Алматы, 2010.
8. Физическая география Республики Казахстан. Учебное пособие. Астана: ЕНУ им. Л.Н. Гумилёва, «Аркас», 2010. — 592 стр.



*ДЛЯ ЗАМЕТОК*

**Научное издание**

**«ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ»**

Сборник статей по материалам  
XXVII международной научно-практической конференции

№ 2 (26)  
Февраль 2015 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 11.02.15. Формат бумаги 60x84/16.  
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 12,625. Тираж 550 экз.

Издательство «СибАК»  
630099, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 16, офис 807  
E-mail: mail@sibac.info

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного  
оригинал-макета в типографии «Allprint»  
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3