



# ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

*Сборник статей по материалам  
XV международной научно-практической конференции*

№ 2 (14)  
Февраль 2014 г.

Издается с декабря 2012 года

Новосибирск  
2014

УДК 50  
ББК 20  
Е 86

Ответственный редактор: Гулин А.И.

Председатель редакционной коллегии:

**Козьминых Владислав Олегович** — д-р хим. наук, проф., зав. кафедрой химии естественнонаучного факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета.

Редакционная коллегия:

**Гукалова Ирина Владимировна** — д-р геогр. наук, доц. ведущий научный сотрудник Института географии НАН Украины, доц. кафедры экономической и социальной географии Киевского национального университета им. Т. Шевченко;

**Данилов Виктор Павлович** — канд. с.-х. наук, зам. дир. по научной работе СибНИИ кормов СО Россельхозакадемии;

**Елисеев Дмитрий Викторович** — канд. техн. наук, доцент, бизнес-консультант Академии менеджмента и рынка, ведущий консультант по стратегии и бизнес-процессам, «Консалтинговая фирма «Партнеры и Боровков»;

**Зеленская Татьяна Евгеньевна** — канд. физ.-мат. доц. кафедры высшей математики Югорского государственного университета;

**Романова Алла Александровна** — канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной физики Санкт-Петербургского государственного университета сервиса и экономики;

**Рымкевич Павел Павлович** — канд. физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры физики Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, чл.-кор. Международной академии наук экологии, безопасности человека и природы, член Экспертного совета по энергоэффективности зданий и сооружений Санкт-Петербурга;

**Сулеймен Ерлан Мэлсұлы** — канд. хим. наук, PhD, директор института прикладной химии при Евразийском национальном университете им. Л.Н. Гумилева;

**Харченко Виктория Евгеньевна** — канд. биол. наук, доц. Луганского национального аграрного университета;

**Яковичина Татьяна Федоровна** — канд. с.-хоз. наук, доц., заместитель заведующего кафедрой экологии и охраны окружающей среды Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры, член Всеукраинской экологической Лиги.

**Е 86 Естественные и математические науки в современном мире / Сб. ст. по материалам XV междунар. науч.-практ. конф. № 2 (14). Новосибирск: Изд. «СибАК», 2014. 220 с.**

Учредитель: НП «СибАК»

Сборник статей «Естественные и математические науки в современном мире» включен в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ).

При перепечатке материалов издания ссылка на сборник статей обязательна.

## **Оглавление**

<b>Секция 1. Математика</b>	<b>8</b>
<b>1.1. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление</b>	<b>8</b>
АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ Екимов Александр Валерьевич	8
ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ Моисеев Игорь Анатольевич	14
ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ Старков Владимир Николаевич Степенко Николай Анатольевич	20
<b>1.2. Математическая логика, алгебра и теория чисел</b>	<b>37</b>
КВАТЕРНИОНЫ КАК ВЕЩЕСТВЕННЫЕ МАТРИЦЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ РОЛЬ В ОПРЕДЕЛЕНИИ СКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ Свиркина Лариса Анатольевна Хитров Геннадий Михайлович	37
<b>Секция 2. Информационные технологии</b>	<b>54</b>
<b>2.1. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ</b>	<b>54</b>
АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ Галанин Александр Владимирович	54
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА Хабибулина Татьяна Васильевна Бабинер Елена Станиславовна	61

<b>Секция 3. Физика</b>	<b>75</b>
<b>3.1. Механика деформируемого твердого тела</b>	<b>75</b>
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН НАТЯГОВ И ДОПУСКАЕМОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ В СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ, СОЕДИНЕННЫХ С НАТЯГОМ Годжаев Тофик Байрам оглы Алиев Шакир Гусейнгулу оглы	75
<b>3.2. Механика жидкости, газа и плазмы</b>	<b>83</b>
ИССЛЕДОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРА В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ Киселев Николай Андреевич Рябинин Анатолий Николаевич	83
<b>3.3. Теоретическая механика</b>	<b>88</b>
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАТЕРНИОНОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ Камачкин Александр Михайлович Свиркина Лариса Анатольевна Хитров Геннадий Михайлович	88
<b>3.4. Физика полупроводников</b>	<b>115</b>
ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ДОНОРОВ НА ОБРАЗОВАНИЕ И РАЗМЕР ПОР В НАНОПОРИСТОМ КРЕМНИИ Абрамова Елена Николаевна Хорт Андрей Михайлович Яковенко Анатолий Георгиевич	115
<b>Секция 4. Биология</b>	<b>121</b>
<b>4.1. Биогеоценология</b>	<b>121</b>
ОНТОГЕНЕТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ЦЕНОПОПУЛЯЦИЙ <i>MEDICAGO FALCATA</i> В УСЛОВИЯХ ОКРЕСТНОСТЕЙ ГОРОДА ЯКУТСКА Атласова Людмила Григорьевна	121

<b>4.2. Биологические аспекты сельского хозяйства</b>	<b>129</b>
ЗНАЧЕНИЕ ПОПУЛЯЦИОННОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОЦЕНКИ СОЛЕУСТОЙЧИВОСТИ СОРТОВ ВИНОГРАДА Юсуфов Абдулмалик Гасамутдинович	129
<b>4.3. Биохимия</b>	<b>133</b>
ПОИСК И ПЕРВИЧНАЯ ОЧИСТКА БИОЛОГИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ПОЛИПЕПТИДОВ ИЗ АКТИНИИ URTICINA CF. CORIACEA Кветкина Александра Николаевна Гладких Ирина Николаевна Монастырная Маргарита Михайловна Козловская Эмма Павловна	133
СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ ГИПОТИРЕОЗА, РТУТНОЙ ИНТОКСИКАЦИИ НА ИММУНИТЕТ И ПУРИНОВЫЙ ОБМЕН Олжаева Рауза Романовна Олжаева Галия Романовна	141
<b>4.4. Ботаника</b>	<b>147</b>
МОРФОЛОГИЧЕСКОЕ И АНАТОМИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ГОДИЧНОГО ПОБЕГА CICHRIUM INTYBUS L. В УСЛОВИЯХ КАЛМЫКИИ Дорджиева Виктория Ильинична Очиров Сергей Батнасанович Мукабенова Лариса Игоревна	147
АНАЛИЗ ФЛОРИСТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ В ЛАНДШАФТАХ ТАЛГИНСКОГО УЩЕЛЬЯ АРИДНЫХ ПРЕДГОРИЙ ДАГЕСТАНА Магомедова Мадина Абдулмаликовна Гасанова Оксана Омаровна	154
АНАТОМИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ МЕЖДОУЗЛИЙ ПОСЛЕДНИХ РЯДКОВ ВЕТВЛЕНИЯ VISCUM ALBUM L. Очирова Кеemia Сергеевна Дорджиева Виктория Ильинична Идрисова Зула Владимировна	161

ОНТОГЕНЕТИЧЕСКИЕ СТРАТЕГИИ И ТАКТИКИ НЕКОТОРЫХ ДОМИНИРУЮЩИХ ВИДОВ ЗЛАКОВ ПРИБРЕЖНО-ВОДНОЙ РАСТИТЕЛЬНОСТИ ЛЕНО-ВИЛЮЙСКОГО МЕЖДУРЕЧЬЯ Федорова Александра Ивановна	169
<b>4.5. Зоология</b>	<b>178</b>
СТРУКТУРА НАСЕЛЕНИЯ НАПОЧВЕННЫХ БЕСПОЗВОНОЧНЫХ СМЕШАННЫХ ЛЕСОВ ПРИОКСКОЙ ТЕРРАСЫ Трошкова Инга Юрьевна Трошков Николай Юрьевич	178
<b>4.6. Микробиология и вирусология</b>	<b>188</b>
ПРИМЕНЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕФОРМАЦИИ РИЗОБАКТЕРИЙ Артамонова Марина Николаевна Пчелинцева Екатерина Сергеевна Костишко Борис Борисович Потатуркина-Нестерова Наталия Иосифовна	188
ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМЫ НАССР, ВНЕДРЕННОЙ В ПРОИЗВОДСТВЕ МИНЕРАЛЬНЫХ ВОД, С ПОМОЩЬЮ СТАНДАРТНЫХ САНИТАРНЫХ ОПЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕДУР Карапетян Арташес Андраникович Батикян Айкуш Гургеновна	195
<b>4.7. Экология и природопользование</b>	<b>200</b>
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СНИЖЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОЗДУШНОГО БАССЕЙНА ТОКСИЧНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ ОТРАБОТАВШИХ ГАЗОВ С СУДОВ Вострикова Марина Александровна	200
КАЧЕСТВО АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА И ДИНАМИКА ЕГО ИЗМЕНЕНИЯ НА ТЕРРИТОРИИ Г. НЕФТЕКАМСК Лыгин Сергей Александрович Пурина Елена Сергеевна	205

<b>Секция 5. Науки о Земле</b>	<b>214</b>
<b>5.1. Геоэкология</b>	<b>214</b>
ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ ГОРОДСКИХ АКВАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИОИНДИКАЦИОННЫХ МЕТОДОВ	214
Фатнева Елена Алексеевна	

## СЕКЦИЯ 1.

### МАТЕМАТИКА

#### 1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

##### АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

*Екимов Александр Валерьевич*

*канд. физ.-мат. наук, доцент,*

*Санкт-Петербургский государственный университет,*

*РФ, г. Санкт-Петербург*

*E-mail: [alex.ekimov@mail.ru](mailto:alex.ekimov@mail.ru)*

##### THE ANALYSIS OF THE ATTAINABILITY SET OF NONLINEAR CONTROLLED SYSTEMS

*Alexander Ekimov*

*candidate of physico-mathematical sciences, associate professor*

*of Saint-Petersburg State University,*

*Russia, Saint-Petersburg*

##### АННОТАЦИЯ

Рассмотрена проблема анализа множества достижимости нелинейных управляемых систем. Получены достаточные условия ограниченности интегральной воронки.



## ABSTRACT

The attainability set analysis problem for nonlinear controlled systems are considered. The sufficient conditions of boundedness of the integral vortex are obtained.

**Ключевые слова:** управление; устойчивость; множество достижимости; интегральная воронка.

**Keywords:** control; stability; attainability set; integral vortex.

**Введение.** Множество достижимости является фундаментальной характеристикой управляемой системы. Анализ множества достижимости и построение его оценок, как отмечено в [3], существенно облегчает решение целого ряда задач математической теории управления. Наиболее полный анализ множества достижимости проведен для линейных управляемых систем. При анализе нелинейных управляемых систем часто пользуются линейными аппроксимациями.

**Основные понятия.** Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x)u, \quad (1)$$

где  $A(t)$  – непрерывная и ограниченная при  $t \geq 0$  ( $n \times n$ ) – матрица, вектор-функция  $g(t, x)$  также непрерывна по своим аргументам в области  $D = \{(t, x), t \geq 0, x \in R^n\}$ . Допустимыми считаем скалярные управления  $u = u(t)$ , которые являются кусочно-непрерывными функциями при  $t \geq 0$ . Множество допустимых управлений будем обозначать  $G$ .

*Определение* [3]. Множеством достижимости  $D(t, t_0)$  системы (1) называется совокупность концов  $x(t, t_0, u)$  всех траекторий этой системы, начинающихся в момент  $t_0 \geq 0$  в точке  $x_0 = 0, t \geq t_0, u \in G$ .

*Определение* [3]. Множество  $\Delta(t_0) = \bigcup_{t \geq t_0} D(t, t_0)$  называется интегральной воронкой системы (1).

В данной работе рассматривается вопрос об ограниченности интегральной воронки  $\Delta(t_0)$  нелинейной управляемой системы (1).

*Определение.* Множество достижимости  $\Delta(t_0)$  будем считать ограниченным, если оно может быть погружено в сферу конечного радиуса.

Наряду с системой (1) рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (2)$$

*Определение* [1]. Система (2) называется экспоненциально устойчивой, если для любого ее решения  $x(t, t_0, x_0)$  справедливо неравенство

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq N \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0,$$

где:  $N, \alpha$  – положительные постоянные, не зависящие от выбора решения.

**Теоретический анализ.** В дальнейшем будем использовать следующую лемму об интегральных неравенствах.

*Лемма Гронуолла-Беллмана* [1]. Пусть функции  $u(t) \geq 0$  и  $f(t) \geq 0$  непрерывны при  $t \geq t_0$ , причем для любого  $t \geq t_0$  выполнено неравенство

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(\tau) u(\tau) d\tau,$$

где:  $c$  – положительная постоянная. В таком случае при  $t \geq t_0$  имеем

$$u(t) \leq c e^{\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau}.$$

Предположим, что множество допустимых управлений имеет вид

$$G = \{u(t), |u(t)| \leq 1\}.$$

**Теорема 1.** Для того, чтобы интегральная воронка  $\Delta(t_0)$  системы (1) была ограничена для любого  $t_0 \geq 0$ , достаточно, чтобы

1. Система (2) была экспоненциально устойчивой;
2.  $\|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| \leq \mu \|x_1 - x_2\|$ , где  $\mu$  – положительная постоянная;
3.  $\|g(t, 0)\| \leq \gamma$ , где  $\gamma$  – положительная постоянная.

*Доказательство:* Обозначим через  $Y(t)$  нормированную при  $t = t_0$  фундаментальную матрицу системы (2). Для матрицы Коши  $K(t, \tau) = Y(t)Y^{-1}(\tau)$  в силу экспоненциальной устойчивости этой системы справедлива оценка

$$\|K(t, \tau)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-\tau)}, \alpha, \beta > 0, t \geq \tau \geq t_0.$$

Интегральное уравнение, эквивалентное системе (1), в терминах матрицы Коши имеет вид

$$x(t) = K(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t K(t, \tau) u(\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Переходя к оценке по норме с учетом  $x_0 = 0$ , получим

$$\|x(t)\| \leq \alpha \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} \|g(\tau, x(\tau))\| d\tau.$$

Преобразуем полученное неравенство следующим образом:

$$\|x(t)\| \leq \alpha \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} [\|g(\tau, x(\tau)) - g(\tau, 0)\| + \|g(\tau, 0)\|] d\tau.$$

Далее воспользуемся условиями 2,3 теоремы 1.

$$\|x(t)\| \leq \alpha\mu \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} \|x(\tau)\| d\tau + \alpha\gamma \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} d\tau.$$

Поскольку  $\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \leq \frac{1}{\beta}$ , получаем неравенство

$$\|x(t)\| \leq \alpha\mu \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} \|x(\tau)\| d\tau + \frac{\alpha\gamma}{\beta}.$$

Далее воспользуемся леммой Гронуолла-Беллмана.

$$\|x(t)\| \leq \frac{\alpha\gamma}{\beta} e^{\alpha\mu \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} d\tau} \leq \frac{\alpha\gamma}{\beta} e^{\alpha\mu/\beta}.$$

Таким образом, интегральная воронка  $\Delta(t_0)$  системы (1) ограничена для любого  $t_0 \geq 0$ .

*Теорема доказана.*

Для обобщения теоремы 1 воспользуемся следующей леммой об интегральных неравенствах.

*Лемма Бихари* [1]. Пусть функции  $u(t) \geq 0$  и  $f(t) \geq 0$  непрерывны при  $t \geq t_0$ , причем для любого  $t \geq t_0$  выполнено неравенство

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(\tau) u(\tau)^m d\tau,$$

где:  $c$  – положительная постоянная,  $m > 0, m \neq 1$ . В таком случае при  $t \geq t_0$  имеем

$$u(t) \leq \left[ c^{1-m} + (1-m) \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{1-m}}, \text{ если } 0 < m < 1;$$

$$u(t) \leq \frac{c}{\left[ 1 - (m-1)c^{m-1} \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{m-1}}}, \text{ если } m > 1 \text{ и } \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau < \frac{1}{(m-1)c^{m-1}}.$$

**Теорема 2.** Для того, чтобы интегральная воронка  $\Delta(t_0)$  системы (1) была ограничена для любого  $t_0 \geq 0$ , достаточно, чтобы

1. Система (2) была экспоненциально устойчивой;
2.  $\|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| \leq \mu \|x_1 - x_2\|^m$ , где  $\mu$  – положительная постоянная,  $m > 0, m \neq 1$ ;
3.  $\|g(t, 0)\| \leq \gamma$ , где  $\gamma$  – положительная постоянная.

При  $m > 1$  ограниченность интегральной воронки имеет место при определенном соотношении параметров  $\alpha, \beta, \mu, \gamma$ .

*Доказательство:* Действуя по аналогии с доказательством теоремы 1, получим следующее неравенство для нормы решения

$$\|x(t)\| \leq \alpha \mu \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} \|x(\tau)\|^m d\tau + \alpha \gamma \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} d\tau.$$

При  $0 < m < 1$  в соответствии с леммой Бихари

$$\|x(t)\| \leq \left[ \left( \frac{\alpha \gamma}{\beta} \right)^{1-m} + (1-m) \frac{\alpha \mu}{\beta} \right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

Очевидно, что в данном случае ограниченность интегральной воронки имеет место при любом соотношении параметров  $\alpha, \beta, \mu, \gamma$ .

При  $m > 1$  оценки будут корректными лишь в случае

$$\frac{\alpha\mu}{\beta} < \frac{1}{(m-1)\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta}\right)^{m-1}} \text{ или } \frac{\alpha}{\beta} < \left[ \frac{1}{(m-1)\mu\gamma^{m-1}} \right]^{\frac{1}{m}}.$$

Таким образом, ограниченность интегральной воронки в данном случае имеет место при достаточно малых  $\alpha, \mu, \gamma$  и достаточно большом  $\beta$ . Для нормы решения получим оценку

$$\|x(t)\| \leq \frac{\alpha\gamma}{\beta \left[ 1 - (m-1)\gamma^{m-1}\mu\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m \right]^{\frac{1}{m-1}}}.$$

*Теорема доказана.*

*Замечание.* Для доказательства теорем 1,2 может быть использован второй метод Ляпунова [1,2]. В качестве функций Ляпунова можно выбрать квадратичные формы в соответствии с теоремой о необходимых и достаточных условиях экспоненциальной устойчивости системы (2), сформулированных в работе [2]. Данный подход продемонстрирован в работе автора [4].

### **Список литературы:**

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967, — 472 с.
2. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975, — 495 с.
3. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М., Наука, 1988, — 320 с.
4. Ekimov A.V. The estimate of the integral vortex of controlled systems by the Lyapunov functions method. // Preprints of the eleventh IFAC international workshop «Control applications of optimization», SPb., 2000, — p. 106—110.

**ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СИНТЕЗА  
ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ  
УПРАВЛЕНИЯ  
ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ**

*Моисеев Игорь Анатольевич*

*канд. физ.-мат. наук,  
доцент по кафедре компьютерных технологий систем,  
доцент Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [mig1256@mail.ru](mailto:mig1256@mail.ru)*

**A SPECIAL CASE OF SYNTHESIS  
OF A TIME OPTIMAL CONTROL  
FOR ONE NONLINEAR SYSTEM**

*Igor Moiseyev*

*candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor  
of the Department of Computer Technologies and Systems,  
Saint Petersburg State University,  
Russia, Saint Petersburg*

**АННОТАЦИЯ**

Рассматривается задача оптимального быстрогодействия при выводе управляемого объекта в начало координат с заданным курсовым углом. При условии постоянства значения курсового угла определяется количество точек переключения управления скоростью и находятся соответствующие траектории.

**ABSTRACT**

Time optimal problem with a controlled object moved to the origin of coordinates with a prescribed course angle is considered in the article. Under the condition of the constancy of a course angle value the number of points for speed control switching is defined and the corresponding trajectories are found.

**Ключевые слова:** принцип максимума; гамильтониан; сопряженная система; оптимальное быстродействие; курсовой угол.

**Keywords:** maximum principle; Hamiltonian; conjugate system; time optimal action; course angle.

Рассматриваемая ниже нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка может описывать движение самолета при наличии бокового ветра или же движение корабля. К таким системам обычно сводятся и задачи преследования [8]. При этом движение управляемого объекта (преследователя) рассматривается в относительной системе координат [5, 6, 8], к которой приходят путем стандартных преобразований исходной системы. Итак, исходная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \sin \varphi + W_x, & \dot{y} &= V \cos \varphi - W_y, \\ \dot{\varphi} &= u_1(t)\omega, & \dot{V} &= u_2(t)a, \end{aligned} \quad (1)$$

где:  $x, y$  — геометрические координаты управляемого объекта,

$\varphi$  — курсовой угол, отсчитываемый по часовой стрелке от положительного направления оси  $OY$ , до вектора скорости  $(V_x(t), V_y(t))^*$ , удовлетворяющий ограничению  $|\Delta\varphi| \leq 2\pi$ .

Управляющая вектор-функция  $(u_1(t), u_2(t))^*$  выбирается из класса кусочно-непрерывных функций и удовлетворяет ограничениям  $|u_1(t)| \leq 1, |u_2(t)| \leq 1$ . Модуль скорости объекта  $|V| \in [V_0, V_{\max}]$ ,

где  $V_{\max} = V_0 + a \frac{2\pi}{\omega}$ . Данное ограничение соответствует

ограничению, наложенному на изменение курсового угла и означает, что управляемый объект может совершить полный разворот, если его текущая скорость равна начальной, например, при начале движения. Величины  $\omega, a, W_x, W_y$  — положительные постоянные,

причем возмущения  $W_x, W_y$  не равны нулю одновременно. Требуется из заданного начального положения  $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$  перевести объект

в область  $(0, 0, \cos \varphi(T) = 1, V(T) = V_0)$ , где  $T$  — конечный момент времени за минимальное время, т. е. решить задачу оптимального быстрогодействия. Рассматриваемая математическая

модель описывает физическую задачу захода самолета на посадку при наличии бокового ветра на авиаматку или на взлетно-посадочную полосу, или же задачу стыковки (перехвата). В несколько иной постановке существование оптимального по быстрдействию движения для подобной системы рассматривалось неоднократно. Например, в работах [2, 3] была решена задача вывода объекта в начало координат с произвольным курсовым углом, нулевыми возмущениями и неограниченной скоростью управляемого объекта. В работе [5] для системы с нулевыми возмущениями решается задача разработки алгоритма построения информационного множества. Игровая постановка задачи (игра «шофер-убийца») была предложена и описана Р. Айзексом [1, 9]. Система, наиболее близкая к рассматриваемой в данной работе, решалась в [11]. Другие варианты игры ее модификации, различные численные методы и алгоритмы ее решения рассматриваются в работах [6, 10]. Отличие рассматриваемой постановки заключается в ограничении конечного значения курсового угла и в ограничении скорости объекта.

В работе [4] был рассмотрен случай, когда решение поставленной задачи возможно без переключения управления курсовым углом при  $u_1(t) = \pm 1$ . Ниже рассмотрим ситуацию, когда существуют искомые траектории, что для движения без переключения управления  $u_1(t)$  с постоянным курсовым углом равным нулю, т.е.  $u_1^0 = 0$  и  $\varphi_0 = \varphi(T) = 0$ . Гамильтониан системы (1) имеет вид [7]:

$$H(x, y, \varphi, V, u_1, u_2) = \psi_1(V \sin \varphi + W_x) + \psi_2(V \cos \varphi - W_y) + u_1 \omega \psi_3 + u_2 a \psi_4, \quad (2)$$

а система, сопряженная (1)

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, & \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ \dot{\psi}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -(\psi_1 V \cos \varphi - \psi_2 V \sin \varphi), \\ \dot{\psi}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial V} = -(\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$



Из системы (3) следует, что  $\varphi_1 = C_1, \varphi_2 = C_2$ . Предположим, что для вывода объекта в начало координат требуется более одного переключения управления скоростью. Так как гамильтониан постоянен по времени на удовлетворяющей принципу максимума траектории [7], то

$$H(t_1) = H(t_2) = \dots = H(t_n), \quad (4)$$

где:  $t_1 = t_2 = \dots = t_n$  — моменты переключения управления  $u_2(t)$ . Из условия (4) с учетом (2) и условий  $\varphi(t) = 0, \psi_4(t_1) = \psi_4(t_2) = \dots = \psi_4(t_n) = 0$ , получим, что

$$C_1 W_x + C_2 (V_1 - W_y) = C_1 W_x + C_2 (V_2 - W_y) = \dots = C_1 W_x + C_2 (V_n - W_y).$$

Рассматривая каждую пару равенств и проводя соответствующие упрощения, получим, что  $V_1 = V_2 = \dots = V_n$ , т. е. значения скорости объекта в точках переключения управления  $u_2(t)$  равны. Отсюда несложно сделать вывод, что искомые траектории имеют не более двух точек переключения управления скоростью, т. е. имеют место следующие наборы управления  $u_2(t)$ : (1,-1), (1,0,-1). Наборы (-1,1) и (-1,0,1) не подходит, т. к. скорость объекта не может быть меньше чем  $V_0$ , (0,1,-1) и (1,-1,0) не подходят в силу доказанного выше равенства скоростей в точках переключения управления, а тривиальный случай, когда отсутствует переключение управления  $u_2(t)$  мы не рассматриваем. Далее найдем начальные данные, при которых имеет место траектория с набором управлений (1,-1). Для упрощения вычислений будем считать, что время начала движения  $t_0 = 0$ . Движение объекта в этом случае удовлетворяет системе уравнений

$$x_1 = x_0 + W_x t_1, \quad 0 = x_1 + W_x (T - t_1),$$

$$y_1 = y_0 + \frac{V_1^2}{2a} - \frac{V_0^2}{2a} - W_y t_1, \quad 0 = y_1 - \frac{V_0^2}{2a} + \frac{V_1^2}{2a} - W_y (T - t_1). \quad (5)$$

Выражая неизвестные величины через  $x_0, y_0, V_0$ , после проведения необходимых преобразований получим условия существования искомой траектории:

$$4y_0W_x^2 - 4V_0x_0W_x + ax_0^2 + 4W_xW_yx_0 = 0,$$

$$-\frac{V_0x_0}{W_x} + \frac{ax_0^2}{4W_x^2} + y_0 > 0, \quad -\frac{x_0}{W_x} > 0.$$

Движение с двумя точками переключения управления  $u_2(t)$  описывается системой

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + W_x t_1, \quad x_2 = x_1 + W_x (t_2 - t_1), \quad 0 = x_2 + W_x (T - t_2), \\ y_1 &= y_0 + \frac{V_1^2}{2a} - \frac{V_0^2}{2a} - W_y t_1, \quad y_2 = y_1 + (V - W_y)(t_2 - t_1), \\ 0 &= y_2 - \frac{V_0^2}{2a} + \frac{V_1^2}{2a} - W_y (T - t_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Поступая так же, как и в предыдущем случае, получим, что рассматриваемые траектории существуют, если значение скорости объекта в первый момент переключения  $V_1$  является решением уравнения

$$(-2W_x(V_1 - V_0) - ax_0)(V_1 - W_y) = W_x(2W_y(V_1 - V_0) - V_1^2 + V_0^2 - ay_0)$$

в интервале  $\left( V_0, V_0 + \frac{2\pi}{\omega} a \right)$ . Следует заметить, что в данном

случае речь идет о всех траекториях, удовлетворяющих принципу максимума.

### Список литературы:

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. — 384 с.
2. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикладная математика и механика. — 1975. — Т. 39, — Вып. 6. — С. 985—994.
3. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального по быстродействию управления движением материальной точки в среде с сопротивлением. Автореферат кандидатской диссертации, Свердловск 1978 (УНЦ АН СССР). — 18 с.
4. Золотых М.С., Моисеев И.А. Частный случай синтеза оптимального управления для нелинейной системы четвертого порядка. Процессы управления и устойчивость. Труды 40-й международной научной конференции аспирантов и студентов /под ред. Н.В. Смирнова, Г.Ш. Тамасяна СПб.: Издат. Дом СПб. гос. ун-та, 2009. — С. 27—30.
5. Пацко В.С., Пятко С.Г., Кумков С.И., Федотов А.А.. Оценивание движения воздушного судна на основе информационных множеств при неполных замерах координат.: Научные доклады. Академия ГА. С.-Петербург, 1999; ИММ УрО РАН, Екатеринбург. 1999. — 70 с.
6. Пацко В.С., Турова В.Л.. Игра "шофер-убийца" и ее модификации.: Вестник Удмуртского университета. Вып. 2. Ижевск 2008. — С. 105—110.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, — 384 с.
8. Розов Н.Х. Постановка задачи оптимального управления. Математика на службе инженера (Основы теории оптимального управления). Сборник. М.: Знание, 1973. — С. 6—27.
9. Isaacs R. Games of pursuit. Scientific report of the RAND Corporation. Santa Monica. 1951.
10. Patsko V.S., Turova V.L. Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics// Game Theory and Applications. Vol. N.Y.: Nova Science Publishers. 2007. — P. 123—152.
11. Reeds J.A., Shepp L.A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards// Pacific J. Math. — 1990. — Vol. 145, — № 2. — P. 367—393.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ  
МАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ  
С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

***Старков Владимир Николаевич***

*канд. физ.-мат. наук, доцент  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [vlad.stark@yandex.ru](mailto:vlad.stark@yandex.ru)*

***Степенко Николай Анатольевич***

*канд. физ.-мат. наук, доцент  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [nick\\_st@mail.ru](mailto:nick_st@mail.ru)*

**STUDY OF DYNAMICS OF PENDULUM SYSTEMS  
WITH VARIABLE PARAMETERS**

***Vladimir Starkov***

*candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
associate professor of Saint State University,  
Russia, Saint Petersburg*

***Nikolay Stepenko***

*candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
associate professor of Saint State University,  
Russia, Saint Petersburg*

**АННОТАЦИЯ**

Исследуется динамика маятниковых систем с переменными параметрами: перемещение точки подвеса, изменения длины маятника или массы грузика. Рассмотрены также колебания маятника при одновременно изменении массы грузика и перемещении точки подвеса. Учитывалось как увеличение, так и уменьшение массы грузика. Использовались численные методы решения и фазовые представления динамических систем. Все расчеты были проведены в среде Maple.

## ABSTRACT

Dynamics of pendulum systems with variable parameters is under examination in the article: displacement of a suspension point, change of a pendulum length or of a weight mass. There are also considered pendulum oscillations while simultaneous change of a weight mass and displacement of a suspension point. An increase as well as a decrease of a weight mass has been taken into account. Numerical computations and phase representations of dynamic systems have been used. All the computations have been performed in Maple environment.

**Ключевые слова:** динамика маятника; качественный анализ; параметрические колебания.

**Keywords:** pendulum dynamics; qualitative analysis; parametric oscillations.

Колебательные процессы вообще и маятниковые системы, в частности, широко распространены в природе и технике [1, 2].

Известно уравнение колебаний маятника с постоянными параметрами ( $m$  — масса грузика,  $l$  — длина маятника):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \text{ где } \varphi \text{ — угол отклонения маятника}$$

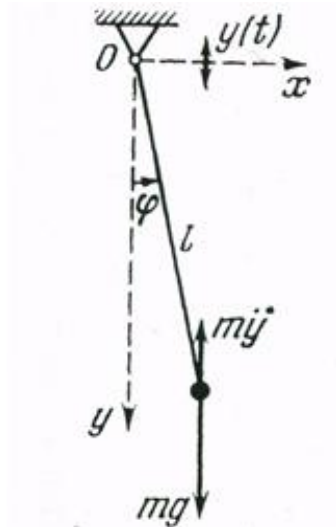
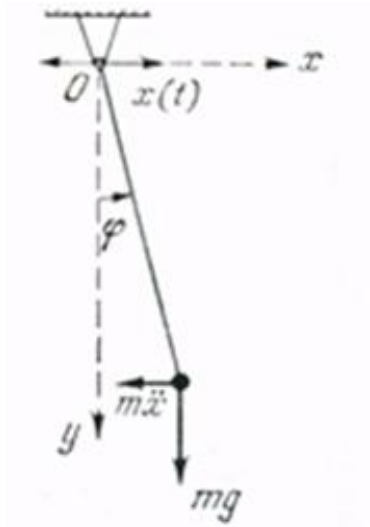
от вертикали,  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Для численного расчета задаются начальные условия: при  $t = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ .

Иногда в колебательной системе параметры меняются по какому-то закону, что можно трактовать как внешнее воздействие на нее. Возникновение колебательного процесса из-за изменения параметров называется параметрическим возбуждением колебаний [3].

Будем исследовать влияние на динамику колебаний маятника изменений длины маятника, массы грузика, точки подвеса и их комбинаций [4, 5].

Рассмотрим сначала влияние горизонтальных колебаний точки подвеса  $O$  на динамику маятника (рис. 1, слева).

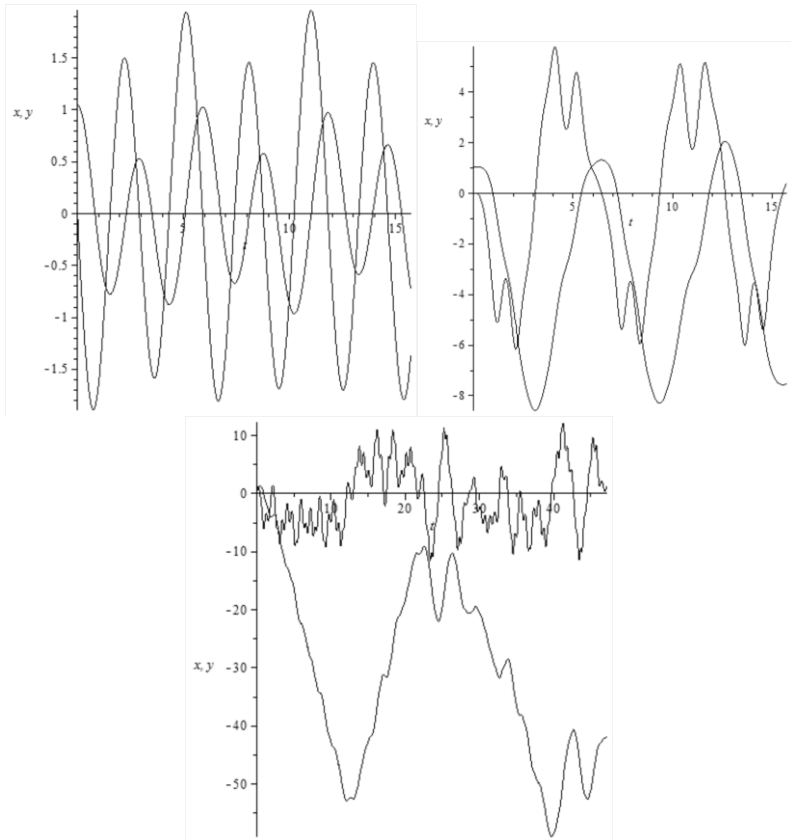


**Рисунок 1. Колебания точки подвеса по горизонтали по закону  $x = x(t)$  (слева) и по вертикали по закону  $y = y(t)$  (справа)**

Если  $x = a \cos qt$ , где  $a$  — амплитуда колебаний точки подвеса,  $q$  — частота колебаний, то для угла  $\varphi$  уравнение примет

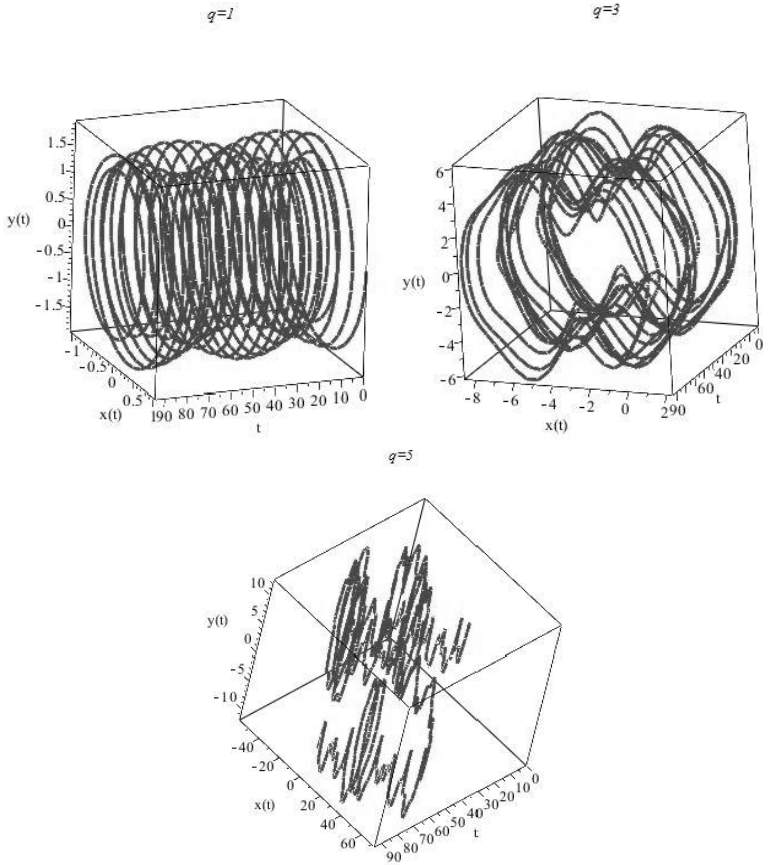
вид: 
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \frac{aq^2}{l} \cos qt \cdot \cos \varphi.$$

Рассчитаем динамику процесса и построим фазовые портреты. Рассмотрим три случая:  $q < \omega$ ,  $q = \omega$ ,  $q > \omega$ .



**Рисунок 2. Амплитуда и скорость колебаний как функции времени для различных частот  $Q$**

Теперь построим соответствующие фазовые портреты.



**Рисунок 3. Рост частоты колебаний точки подвеса хаотизирует движение**

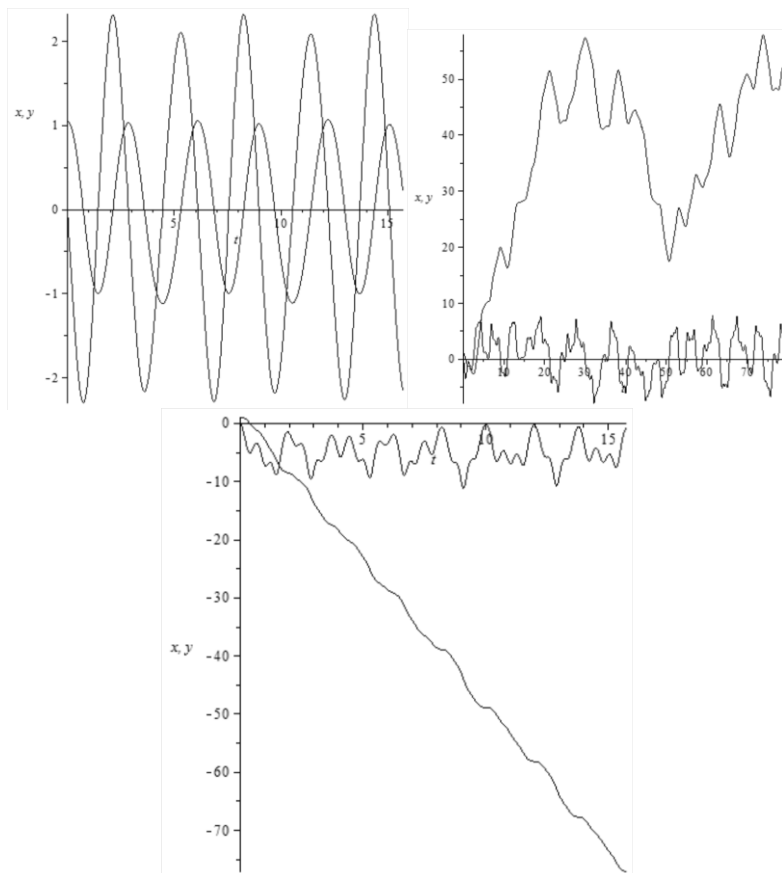
Рассмотрим теперь влияние вертикальных перемещений точки подвеса на динамику маятника (рис. 1, справа).

Если  $y = b \sin qt$ , то уравнения движения маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{bq^2}{l} \sin \varphi \cdot \sin qt.$$

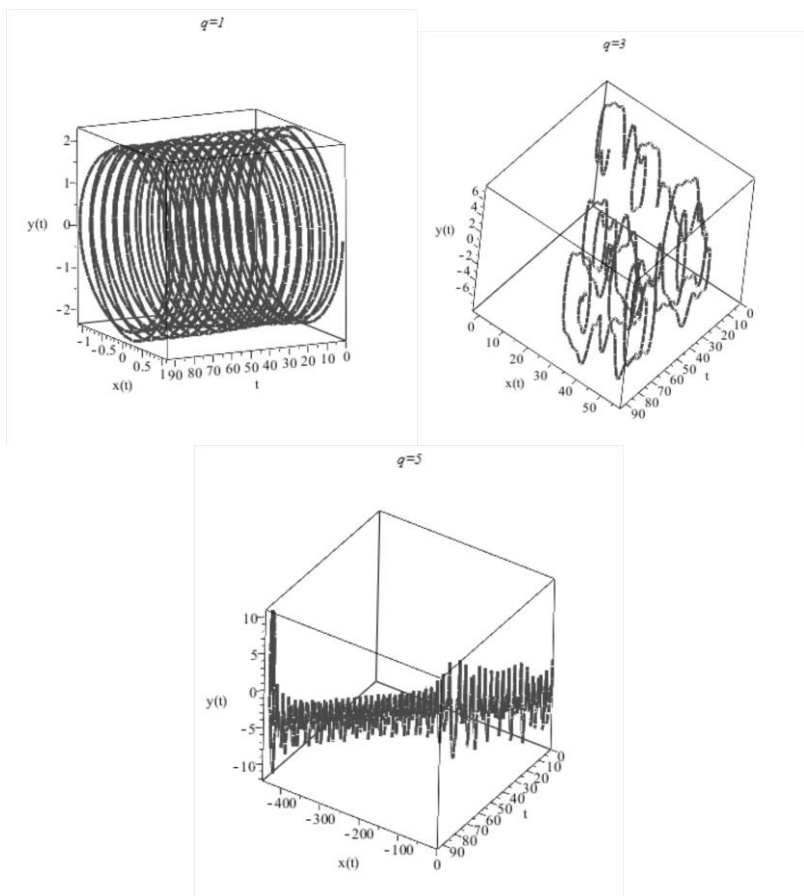


Рассчитаем динамику процесса и построим фазовые портреты.  
Рассмотрим три случая:  $q < \omega$ ,  $q = \omega$ ,  $q > \omega$ .



**Рисунок 4. Динамика для различных частот колебаний точки подвеса**

Теперь рассмотрим соответствующие фазовые портреты.

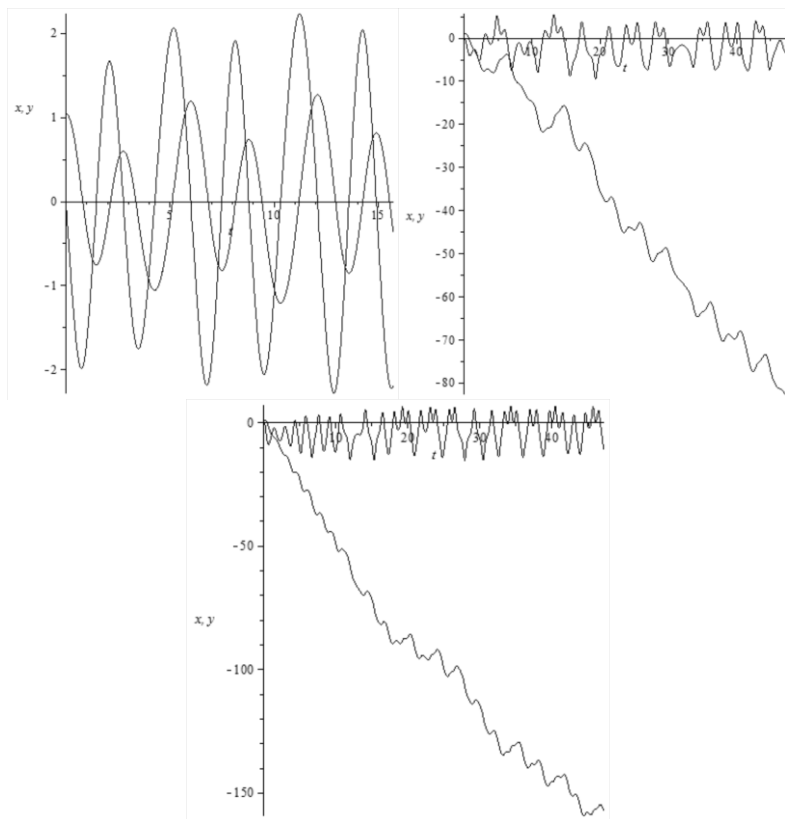


**Рисунок 5. Рост частоты колебаний точки подвеса хаотизирует движение**

Уравнение для вертикально-горизонтальных колебаний точки подвеса

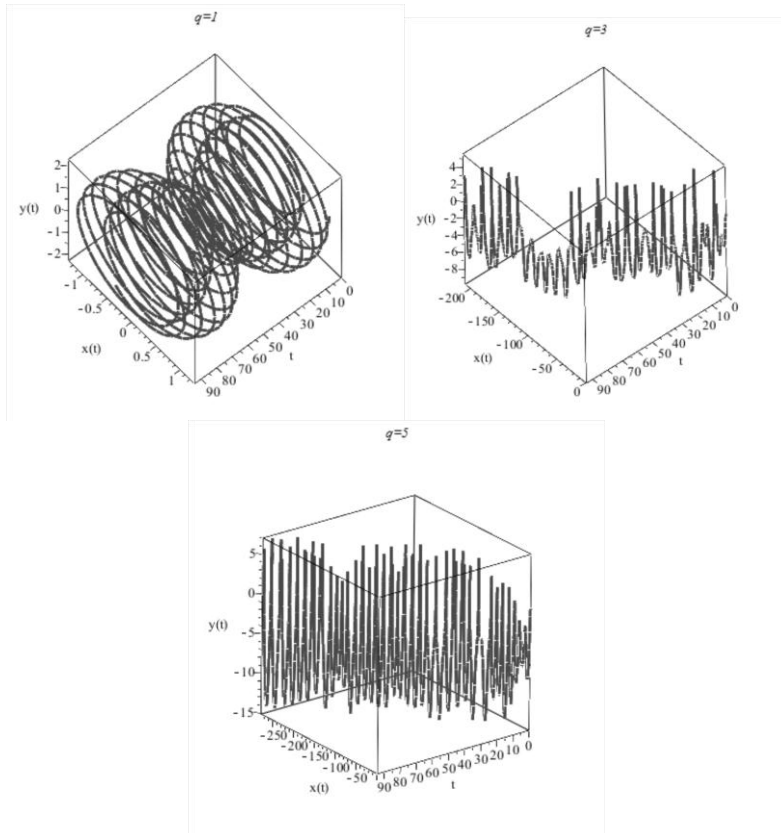
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \frac{aq^2}{l} \cos qt \cdot \cos \varphi - \frac{bq^2}{l} \sin \varphi \cdot \sin qt.$$

Рассчитаем динамику процесса и построим фазовые портреты.  
Рассмотрим три случая:  $q < \omega$ ,  $q = \omega$ ,  $q > \omega$ .



**Рисунок 6. Динамика для различных частот колебаний точки подвеса**

Были рассчитаны соответствующие фазовые портреты



**Рисунок 7. Рост частоты колебаний точки подвеса хаотизирует движение**

Далее проведем исследование маятниковых систем при изменяющейся длине маятника. Допустим, что по какой-то внешней причине (от случайного толчка) маятник совершает собственные колебания с частотой, соответствующей примерно  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$ ,

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $l_0$  — первоначальная длина маятника. В это же время изменяется и длина маятника [6].

В этом случае уравнение движения маятника с переменной длиной можно записать так:  $\frac{d}{dt}(ml^2 \dot{\varphi}) = -mgl \sin \varphi$

или  $ml^2 \ddot{\varphi} + 2ml \dot{\varphi} \frac{dl}{dt} + mgl \sin \varphi = 0$ .

В [6] была рассмотрена задача о колебаниях маятника при следующих предположениях: амплитуды колебаний маятника малы, т. е.  $\sin \varphi \approx \varphi$  и закон изменения длины

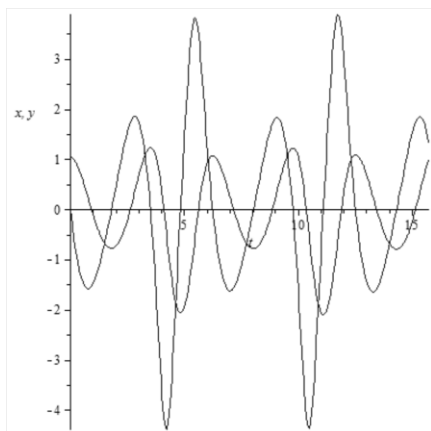
$$l = l_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{l_0} \cos qt \right), \text{ где } q \text{ — частота и } \alpha \text{ — амплитуда.}$$

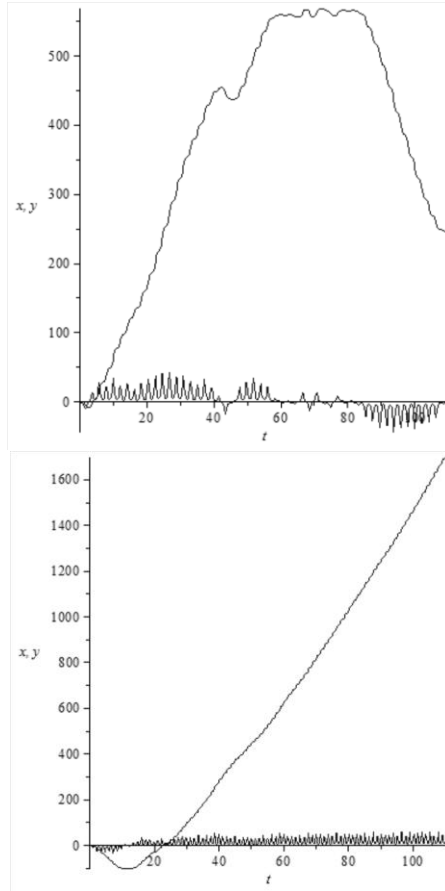
В нашей задаче рассмотрен случай  $l = l_0(1 + \alpha \sin qt)$ ,

когда при  $t = 0$  длина  $l = l_0$ . Тогда имеем уравнение в общем виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\alpha q \cos qt}{1 + \alpha \sin qt} \dot{\varphi} + \frac{g}{l_0(1 + \alpha \sin qt)} \sin \varphi = 0.$$

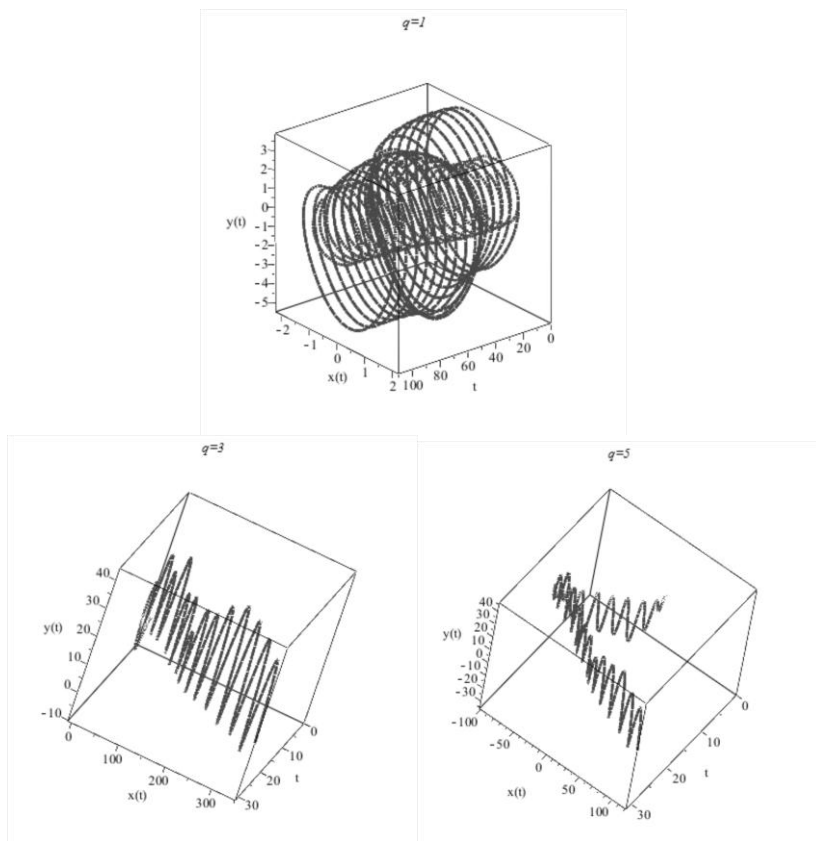
Рассмотрим три случая:  $q < \omega$ ,  $q = \omega$ ,  $q > \omega$ .





***Рисунок 8. Динамика маятника для различных частот колебаний длины***

Теперь рассмотрим соответствующие фазовые портреты.



**Рисунок 9. Фазовые портреты для различных частот**

Далее исследуем колебания маятника при изменении массы грузика. Висящая на нити однородная материальная точка, являющаяся в начальный момент времени шариком радиуса  $r_0$ , имеющим массу  $m_0$ , качается без трения и постепенно обмерзает или испаряется (как в [7]).

В этом случае уравнение движения маятника переменной массы имеет вид [7]:

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi - l^2 \frac{dm}{dt} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1)$$

Учитывая, что массы шарика в разные моменты времени относятся как кубы радиусов, имеем:  $\frac{m}{m_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^3$ , т. е.  $m = m_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^3$  и

$$\frac{dm}{dt} = 3m_0 \frac{r^2}{r_0^3} \frac{dr}{dt}. \quad (2)$$

Тогда (1) примет вид:

$$m_0 l^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^3 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^3 gl \sin \varphi - 3m_0 l^2 \frac{r^2}{r_0^3} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}.$$

По условию приращения массы, отнесенное ко времени, т. е. производная  $\frac{dm}{dt}$ , пропорциональна площади поверхности шарика в данный момент:

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 \alpha, \quad (3)$$

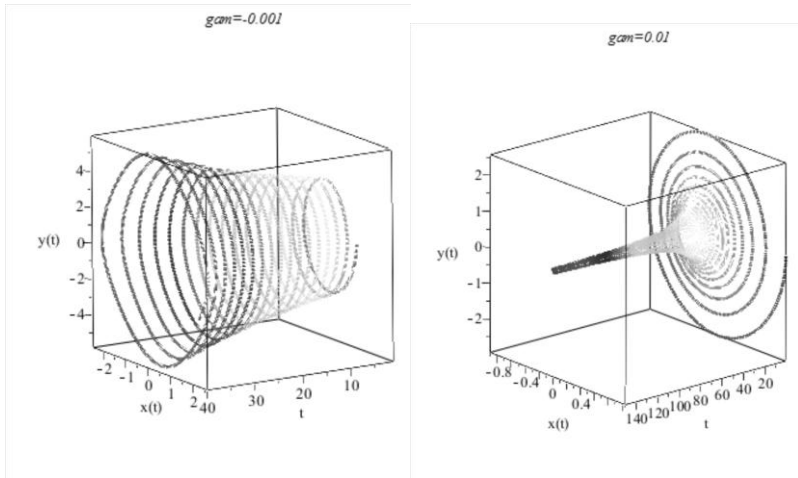
здесь  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности.

Сравнивая (2) и (3), получаем:  $\frac{dr}{dt} = \frac{4\pi r_0^3}{3m_0} \alpha = \gamma$ , где  $\gamma$  — новая постоянная.

После интегрирования имеем  $r = r_0 + \gamma t$ . Окончательно уравнение движения принимает вид  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{3\gamma}{r_0 + \gamma t} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ .



Для него построим фазовые портреты.



**Рисунок 10. Влияние уменьшения массы груза (слева) и увеличения массы груза (справа) на колебания маятника**

Видим, что увеличение массы груза стабилизирует колебания маятника.

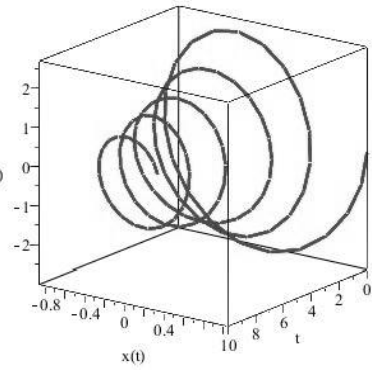
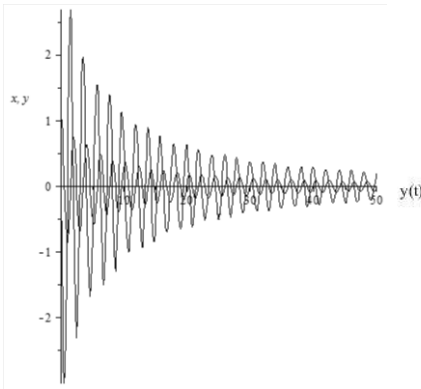
Теперь изучим влияние перемещения точки подвеса на колебания маятника в условиях изменения массы груза. Учтем, как и ранее, влияние вертикальных колебаний точки подвеса (см. рис. 1, справа).

Используя для изменения массы шарика формулы, приведенные ранее, получим уравнение движения в виде:

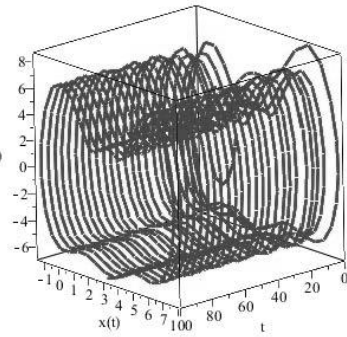
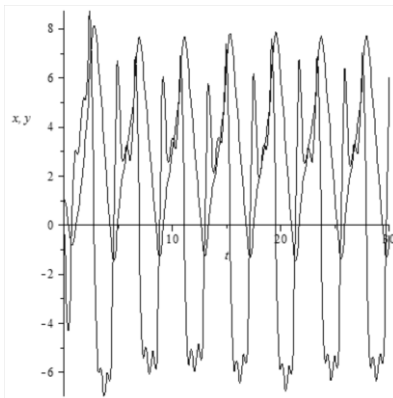
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{3\gamma}{r_0 + \gamma t} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{b}{l} q^2 \sin \varphi \sin qt = 0.$$

Динамика системы и фазовые портреты приведены на рисунках 11 и 12.

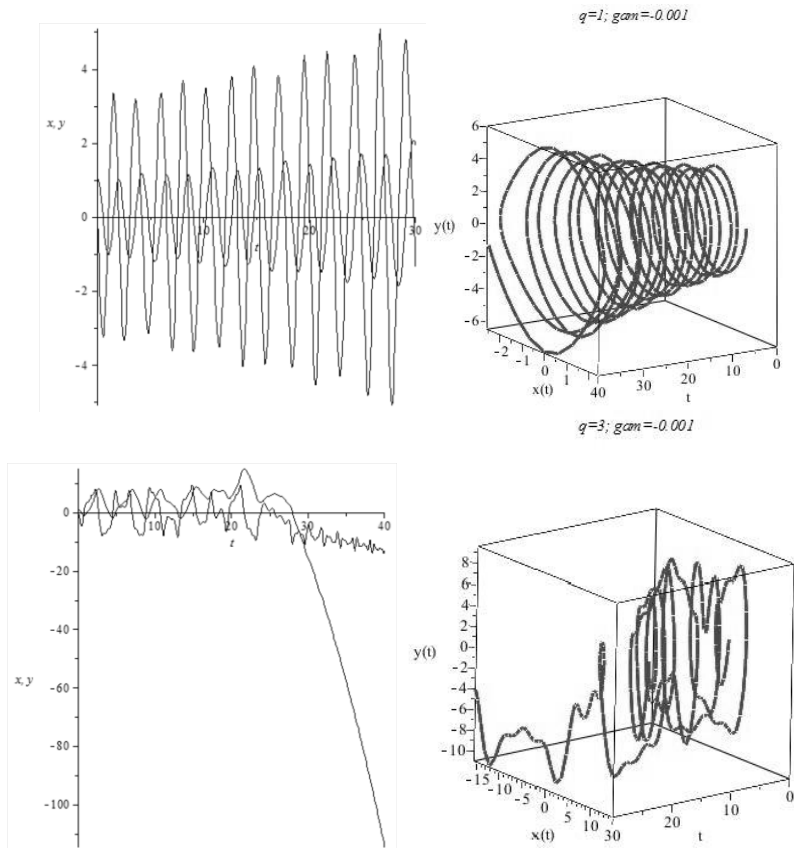
$$q=1; g_{\text{cm}}=0.01$$



$$q=3; g_{\text{cm}}=0.01$$



**Рисунок 11. Динамика маятника при растущей массе груза для малой (слева) и большой (справа) частот колебаний точки подвеса**



**Рисунок 12. Динамика маятника при убывающей массе груза для малой (слева) и большой (справа) частот колебаний точки подвеса**

Видим, что динамика маятника при убывающей массе груза и для малой и для большой частоте колебаний точки подвеса подвержена большей хаотизации, чем при увеличивающейся массе груза.

Видим, что рост частоты колебаний точки подвеса также хаотизирует движение маятника.

### **Список литературы:**

1. Бутенин Н.В. Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1963. — 187 с.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. — 432 с.
3. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. Учебное пособие. Красноярск: изд-во Краснояр. ун-та, 1995. — 429 с.].
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. — 304 с.
5. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ, — 1951, — т. 21, — вып. 5.
6. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — 344 с.
7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика. М.: Физматлит, 1961. — 616 с.

**1.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА,  
АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

**КВАТЕРНИОНЫ КАК ВЕЩЕСТВЕННЫЕ МАТРИЦЫ  
СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ РОЛЬ  
В ОПРЕДЕЛЕНИИ СКАЛЯРНОГО  
И ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ**

***Свиркина Лариса Анатольевна***

*канд. физ.-мат. наук, доцент  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [lara\\_a@mail.ru](mailto:lara_a@mail.ru)*

***Хитров Геннадий Михайлович***

*доцент, канд. физ.-мат. наук, доцент  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [chitrow@gmail.com](mailto:chitrow@gmail.com)*

**QUATERNIONS AS REAL MATRICES  
OF THE SPECIAL KIND AND THEIR ROLE  
IN DEFINITION OF SCALAR  
AND VECTOR PRODUCT OF VECTORS**

***Larisa Svirkina***

*candidate of physical and mathematical sciences, associate professor  
of St. Petersburg State University,  
Russia, St. Petersburg*

***Gennady Khitrov***

*associate professor, candidate of physical and mathematical sciences,  
associate professor of St. Petersburg State University,  
Russia, St. Petersburg*

## АННОТАЦИЯ

Дано современное компактное изложение алгебры кватернионов. Доказаны основные свойства этой алгебраической структуры. Приведена геометрическая интерпретация векторной части кватерниона, благодаря которой кватернионы нашли широкое применение, как в описании управляемых движений космических аппаратов, так и в компьютерных играх.

## ABSTRACT

The modern compact treatment of quaternion algebra is presented. The main properties of this algebraic structure are proved. Because of the geometrical interpretation of their imaginary part, quaternions are widely used both in the description of controlled motion of spacecrafts and computer games.

**Ключевые слова:** матрицы; алгебраические структуры; кватернионы.

**Keywords:** matrices; algebraic structures; quaternions.

**Введение.** Широкое использование кватернионов в различных областях науки [1, 2, 4, 6] и компьютерных технологиях [5, 7] все настоятельнее требует изучения кватернионов в начальном курсе алгебры. В статье показывается, что матричный подход к введению комплексных чисел может быть использован и для введения кватернионов. При этом большая часть свойств кватернионов вытекает из соответствующих свойств квадратных вещественных матриц. Поскольку некоторые курсы алгебры начинаются с изучения линейных систем и матриц, то кватернионы могут изучаться уже в первом семестре первого курса. По сути, матричному подходу к введению кватернионов и строгому доказательству некоторых основных свойств кватернионов и посвящена данная работа. Более того, статья объясняет, как из кватернионов появились скалярное и векторное произведения векторов трехмерного пространства.

Из соображений разумной экономии в статье не рассматривается история появления и изучения кватернионов, поскольку сегодня ответы на эти вопросы легко найти в Интернете. Отметим только, что существует несколько подходов к объяснению появления и обоснования кватернионов. Например, кватернионы иногда рассматривают как обобщение комплексных чисел, точнее как числа с тремя «мнимыми единицами», с заданными законами перекрестных произведений мнимых единиц и умножений этих единиц самих на себя. Поэтому кватернионы относят к категории так называемых

«гиперкомплексных чисел» [3]. При таком подходе к определению кватернионов возникают определенные технические трудности, особенно при доказательстве свойств умножения кватернионов. Гораздо проще определить кватернионы как вещественные квадратные матрицы четвертого порядка специального вида. Так как множество вещественных квадратных матриц относительно операций сложения, умножения и умножения матриц на вещественные числа образуют алгебраическую структуру, называемую алгеброй (кольцо со структурой векторного пространства) над полем вещественных чисел, то, определяя кватернионы как матрицы, мы знаем, что они обладают целым набором свойств, характеризующих алгебру квадратных матриц. Поэтому остается рассмотреть только специфику кватернионов, вытекающую из специфики определяющих их матриц. Мы предполагаем, что читатель знаком с основами линейной алгебры и знает основные свойства сложения и умножения матриц, поэтому чтение данной статьи не вызовет больших затруднений.

Чтобы показать, что и при «матричном» введении кватернионов, кватернионы остаются обобщением комплексных чисел, сделаем замечание о «матричном» введении комплексных чисел.

Если рассмотреть множество квадратных матриц второго порядка

вида  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , где  $a$  и  $b$  произвольные вещественные числа,

то несложно показать, что это множество относительно операций сложения и умножения образует поле, изоморфное известному полю комплексных чисел. Причем, с учетом свойств умножения матриц на вещественные числа, мы должны отметить, что в этом случае имеем дело с алгеброй над полем вещественных чисел.

Делается это следующим образом. Указанная матрица представляется в виде:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aE + bI, \text{ где } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{а } I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $EI = IE = I$ ,  $EE = E^2 = E$  и  $II = I^2 = -E$ , то перемножение  $E$  и  $I$  коммутативно, т. е.

$(aE + bi)(cE + di) = (cE + di)(aE + bi)$ . Следовательно,

умножение матриц вида  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  коммутативно. Далее, если  $a$  и  $b$

одновременно не равны нулю, то её определитель отличен от нуля, и, следовательно, для любой ненулевой матрицы указанного вида существует обратная. Теперь уже несложно видеть, что множество матриц указанного вида относительно операции сложения образует коммутативную группу. Без нулевой матрицы упомянутое множество образует коммутативную группу относительно умножения. Операции сложения и умножения матриц связаны законом дистрибутивности и, следовательно, множество матриц с вещественными элементами вида

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  образует поле. Это поле изоморфно полю комплексных

чисел  $C$  вида  $a + bi$ , где  $i^2 = -1$ . Изоморфизм устанавливается естественным взаимно однозначным отображением  $aE + bi$  в  $a + bi$ , сохраняющим операции. Поскольку множество матриц указанного вида является алгеброй над полем вещественных чисел, то очевидно, что и поле комплексных чисел  $C$  является алгеброй над полем вещественных чисел.

**Алгебра кватернионов.** Рассмотрим множество вещественных матриц четвертого порядка вида:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $a, b, c$  и  $d$  вещественные числа. Введя обозначения



$$\begin{aligned}
 E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 J &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 K &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}
 \end{aligned}$$

мы можем записать произвольную матрицу (1) в виде линейной комбинации матриц:  $E, I, J$  и  $K$ . То есть

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix} = aE + bI + cJ + dK \tag{3}$$

Очевидно, что матрицы  $E, I, J$  и  $K$  линейно независимы, поскольку их ненулевые элементы расположены на разных местах квадратной матрицы четвертого порядка. Поскольку линейные комбинации линейных комбинаций этих матриц будут снова линейными комбинациями этих же матриц, то указанное множество линейных комбинаций, *которое в дальнейшем будем обозначать через  $H$* , образует четырехмерное подпространство в 16-мерном пространстве вещественных квадратных матриц 4-го порядка.

Покажем, что множество  $H$  замкнуто относительно операции матричного умножения элементов. Чтобы облегчить себе работу по проверке этого утверждения, рассмотрим блочное разбиение матриц  $E, I, J$  и  $K$  на четыре равных по размеру блока. При этом мы используем введенные ранее обозначения базисных векторов  $E$  и  $\dot{I}$  алгебры  $C$ . Выпишем блочный вид матриц  $E, I, J$  и  $K$ :

$$E = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} \dot{I} & 0 \\ 0 & -\dot{I} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & \dot{I} \\ \dot{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Сделаем замечание относительно обозначений: здесь через  $E$  обозначается как матрица 4-го, так и матрица 2-го порядка. Поскольку порядок матрицы  $E$  определяется её местом в матричном выражении, то надеемся, что это не приведет к недоразумениям.

Так как умножение линейных комбинаций сводится к умножению и сложению коэффициентов (чисел) и умножению образующих этих линейных комбинаций между собой, то сосредоточимся вначале на этих действиях. Поскольку умножение и сложение вещественных чисел — известные операции, то уделим основное внимание умножению образующих между собой. В силу свойств единичной матрицы имеем:  $EE = E$ ,  $EI = IE = I$ ,  $EJ = JE = J$ ,  $EK = KE = K$ . При вычислении попарных произведений  $IJ, JI, IK, KI, JK, KJ, II, JJ, KK$  удобно воспользоваться блочным представлением матриц  $I, J, K$ . Опуская несложные вычисления, выпишем полученные результаты:

$$IJ = -JI = K, JK = -KJ = I, KI = -IK = J, I^2 = J^2 = K^2 = -E.$$

С учетом этих равенств теперь несложно выписать произведение двух произвольных линейных комбинаций из  $H$ . Ориентируясь на дальнейшее, выпишем произвольные линейные комбинации в виде:  $A = \lambda_0 E + \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K$  и  $B = \mu_0 E + \mu_1 I + \mu_2 J + \mu_3 K$ . Перемножая эти линейные комбинации, получим:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (\lambda_0 E + \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K)(\mu_0 E + \mu_1 I + \mu_2 J + \mu_3 K) = \\ &= (\lambda_0 \mu_0 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3)E + (\lambda_0 \mu_1 + \lambda_1 \mu_0 + \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2)I + \\ &+ (\lambda_0 \mu_2 + \lambda_2 \mu_0 - \lambda_1 \mu_3 + \lambda_3 \mu_1)J + (\lambda_0 \mu_3 + \lambda_3 \mu_0 + \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)K \end{aligned} \quad (5)$$

Итак, показано, что результат операция умножения элементов из  $H$ , является элементом из  $H$ . То есть операция умножения в  $H$  замкнута. Поскольку проверка свойств дистрибутивности не представляет труда и доказано, что эти свойства выполняются, то можно утверждать, что  $H$  является кольцом. Из свойств умножения матриц следует, что это кольцо ассоциативное и с единицей. Из свойств попарных произведений  $IJ, JI, IK, KI, JK, KJ$ , следует, что это кольцо некоммутативное. Рассмотрим еще одно свойство умножения элементов из  $H$ . Именно, найдем произведение

$$\begin{aligned} AA^T &= (\lambda_0 E + \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K)(\lambda_0 E + \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K)^T = \\ &= (\lambda_0 E + \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K)(\lambda_0 E - \lambda_1 I - \lambda_2 J - \lambda_3 K) = \\ &= (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)E \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует, что для ненулевого элемента из  $H$  (очевидно, что элемент из  $H$  равен 0 тогда и только тогда, когда  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ) существует обратный элемент. Так для ненулевого элемента  $A = \lambda_0 E + \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K$  обратным будет элемент

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (\lambda_0 E + \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} (\lambda_0 E - \lambda_1 I - \lambda_2 J - \lambda_3 K). \end{aligned}$$

То есть,

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} A^T \quad (7)$$

Из (6) следует, что

$$|AA^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2 = (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^4. \text{ Откуда}$$

$$|A| = (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 \quad (8)$$

Сравнивая теперь (7) с формулой для обратной матрицы к матрице  $A$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bar{A},$$

где:  $\bar{A}$  — присоединенная (союзная) матрица к матрице  $A$ , получим, что

$$\bar{A} = (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) A^T \quad (9)$$

Назовем величину  $\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$ , равную арифметическому значению корня, *модулем* элемента (матрицы)  $A$  из  $H$ . Будем обозначать модуль элемента (матрицы)  $A$  как  $\|A\|$ , т. е. положим  $\|A\| = \sqrt[4]{|A|}$ . Используя обозначение модуля, мы можем переписать формулу (6) в виде:  $AA^T = \|A\|^2 \cdot E$ . Из (5) и (6) теперь следует, что

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 \cdot E &= (AB)(AB)^T = (AB)(B^T A^T) = \\ &= A(BB^T)A^T = AA^T \|B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 \cdot E \end{aligned}$$

Откуда следует, что  $\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|$ , т. е. модуль произведения двух элементов из  $H$  равен произведению модулей этих элементов. Соотношение для квадратов модулей, записанное в развернутом виде и в обратном порядке, носит название *тождества Эйлера*. То есть,

$$\begin{aligned} &(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) = \\ &= (\lambda_0\mu_0 - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 - \lambda_3\mu_3)^2 + \\ &+ (\lambda_0\mu_1 + \lambda_1\mu_0 + \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)^2 + (\lambda_0\mu_2 + \lambda_2\mu_0 - \lambda_1\mu_3 + \lambda_3\mu_1)^2 + \\ &\quad + (\lambda_0\mu_3 + \lambda_3\mu_0 + \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

тождество Эйлера.

**Определение.** Ассоциативное кольцо с единицей, у которого для каждого ненулевого элемента существует обратный, называется *телом*.

Из определений тела и поля следует, что каждое поле является телом. Однако пример тела  $H$  показывает, что не каждое тело является полем.

Выше нами показано, что  $H$  является алгеброй, в которой кольцо имеет структуру тела. Как и в случае с алгеброй  $C$  для алгебры  $H$  в практике нашло применение не матричное выражение элементов этой алгебры, а изоморфное отображение этой алгебры в «числа вида»  $\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$ , которые называются *кватернионами*. То есть каждому элементу  $A = \lambda_0 E + \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K$  алгебры  $H$  мы сопоставляем кватернион  $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$ . Единицы  $i, j, k$  — называются (по аналогии с комплексными числами) мнимыми единицами. Часть кватерниона — число  $\lambda_0$ , по аналогии с комплексными числами, можно было бы называть *вещественной частью кватерниона*, а упорядоченную тройку  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  — *мнимой частью кватерниона*. Однако это неудобно, поскольку приходится отрывать уже три коэффициента от мнимых единиц. При делении кватерниона на части, за частями закрепились совсем другие названия, оправданные дальнейшей интерпретацией. Так число  $\lambda_0$  называется *скалярной частью кватерниона*, а часть кватерниона  $\lambda = \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$  называется *векторной частью кватерниона*.

На множестве кватернионов определены равенство (два кватерниона равны, когда равны их скалярные и векторные части), сложение, умножение на вещественные числа и умножение кватернионов. Перемножение кватернионов выражается в перемножении и сложении коэффициентов (вещественных чисел  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) и перемножении мнимых единиц, подчиненных правилам:  

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Причем перемножение осуществляется так, как учили в школе перемножать скобку на скобку, но с учетом свойств перемножения мнимых единиц. При этом подразумевается, что вещественные числа коммутируют (перестановочны) как между собой, так и с мнимыми единицами. Очевидно, с учетом сказанного о сложении и произведении кватернионов, что отображение  $A = \lambda_0 E + \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K$

в  $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$  не только взаимнооднозначно, но и сохраняет операции. Следовательно, это отображение является изоморфизмом.

Очевидно, что для кватернионов имеем полный аналог формулы (5):

$$\begin{aligned} \Lambda \cdot M &= (\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k)(\mu_0 + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k) = \\ &= (\lambda_0 \mu_0 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3) + (\lambda_0 \mu_1 + \lambda_1 \mu_0 + \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) i + \\ &+ (\lambda_0 \mu_2 + \lambda_2 \mu_0 - \lambda_1 \mu_3 + \lambda_3 \mu_1) j + (\lambda_0 \mu_3 + \lambda_3 \mu_0 + \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) k \end{aligned} \quad (11)$$

Как и для комплексных чисел, для кватернионов вводится понятие сопряженного кватерниона. Кватернион  $\overline{\Lambda} = \lambda_0 - \lambda_1 i - \lambda_2 j - \lambda_3 k = \lambda_0 - \lambda$  будем называть *сопряженным* кватерниону  $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$ . Очевидно, что сопряженным сумме кватернионов  $\Lambda$  и  $M$  будет сумма сопряженных, т. е.  $\overline{\Lambda + M} = \overline{\Lambda} + \overline{M}$ . Сопряженным произведению — будет произведение сопряженных, взятых в обратном порядке, т. е.  $\overline{\Lambda \cdot M} = \overline{M} \cdot \overline{\Lambda}$  (напоминаем связь сопряжения с транспонированием матриц).

Для кватерниона, как и для комплексного числа, вводится понятие модуля. Именно, величина  $\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$  называется модулем кватерниона  $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$ . Модуль кватерниона  $\Lambda$  будем обозначать, как  $|\Lambda|$ . Несложно непосредственно посчитать (или сослаться на соответствующую связь с матрицами), что

$$\begin{aligned} \Lambda \cdot \overline{\Lambda} &= (\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k)(\lambda_0 - \lambda_1 i - \lambda_2 j - \lambda_3 k) = \\ &= \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = |\Lambda|^2 \end{aligned}$$

Теперь, как и для соответствующих матриц, доказывается тождество Эйлера (10), и утверждение, что модуль произведения кватернионов равен произведению их модулей, т. е.  $|\Lambda \cdot M| = |\Lambda| \cdot |M|$ .

Обратным для кватерниона  $\Lambda \neq 0$  будет кватернион  $\Lambda^{-1} = \frac{1}{\Lambda \cdot \bar{\Lambda}} \bar{\Lambda}$ .

В дальнейшем, через  $H$  мы будем обозначать уже не четырехмерное подпространство вещественных квадратных матриц четвертого порядка специального (указанного выше) вида, а множество кватернионов. Это позволит нам сохранить в памяти связь кватернионов с матрицами и при необходимости пользоваться ею.

**Трехмерное подпространство  $\bar{H}$  четырехмерного пространства  $H$ .** Рассмотрим множество линейных комбинаций с вещественными коэффициентами вида  $\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \lambda \in H$ . Обозначим это множество через  $\bar{H}$ . Очевидно, что  $\bar{H}$  образует трехмерное подпространство в  $H$ , поэтому элементы этого подпространства, будем называть векторами. Введем в  $\bar{H}$  операцию умножения векторов, определяемую правилом: для любых  $\lambda, \mu \in \bar{H}$  положим

$$\lambda \times \mu = \frac{1}{2}(\lambda \cdot \mu - \mu \cdot \lambda), \quad (12)$$

где:  $\lambda \cdot \mu$  — операция умножения в  $H$ . Из (11) следует, что  $\lambda \times \mu \in \bar{H}$ . Действительно, положив в (11)  $\lambda_0 = \mu_0 = 0$ , получим:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mu &= (\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k)(\mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k) = -(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3) + \\ &+ (\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) i + (-\lambda_1 \mu_3 + \lambda_3 \mu_1) j + (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) k \\ \mu \cdot \lambda &= (\mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k)(\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k) = \\ &= -(\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \mu_3 \lambda_3) + \end{aligned}$$

$$+(\mu_2\lambda_3 - \mu_3\lambda_2)i + (-\mu_1\lambda_3 + \mu_3\lambda_1)j + (\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1)k$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda \times \mu &= \frac{1}{2}(\lambda \cdot \mu - \mu \cdot \lambda) = (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)i + \\ &+ (-\lambda_1\mu_3 + \lambda_3\mu_1)j + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)k = \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}, \text{ т. е. } \lambda \times \mu \in \overline{H}. \end{aligned}$$

Перейдем к геометрической интерпретации подпространства  $\overline{H}$ . Для этого отождествим мнимые единицы  $i, j, k$  с ортами декартовой системы координат  $i, j, k$  (правая тройка). Тогда линейной комбинации мнимых единиц  $\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \lambda$  будет соответствовать линейная комбинация ортов  $\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \lambda$ , т. е. вектор. Таким образом, каждому кватерниону  $\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \lambda \in \overline{H}$  мы сопоставляем вектор  $\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \lambda$ . Далее, поскольку  $i, j, k \in \overline{H}$ , то, используя введенное в (12) обозначение для произведения элементов из  $\overline{H}$ , получим  $i \times j = -j \times i = k$ ,  $j \times k = -k \times j = i$ ,  $k \times i = -i \times k = j$ .

Не впадая в противоречие с определением произведения  $\lambda \times \mu$  для кватернионов из  $\overline{H}$ , введем *векторное произведение векторов*  $\lambda \times \mu$  в трехмерном пространстве с декартовой системой координат и ортами  $i, j, k$ , задав векторное произведение формулой:



$$\lambda \times \mu = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} = (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)i + \quad (13)$$

$$+ (-\lambda_1\mu_3 + \lambda_3\mu_1)j + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)k$$

Из (13) для ортов  $i, j, k$  декартовой системы координат следует:  
 $i \times j = -j \times i = k, j \times k = -k \times j = i, k \times i = -i \times k = j.$

Перечислим теперь свойства векторного произведения, вытекающие из этого определения.

Во-первых, векторное произведение замкнуто на множестве векторов (очевидным образом следует из определения).

Во-вторых, выполняются свойства дистрибутивности. Действительно,

$$\lambda \times (\mu + \gamma) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 + \gamma_1 & \mu_2 + \gamma_2 & \mu_3 + \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \times \mu + \lambda \times \gamma,$$

$$(\lambda + \mu) \times \gamma = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 + \mu_1 & \lambda_2 + \mu_2 & \lambda_3 + \mu_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \times \gamma + \mu \times \gamma.$$

Таким образом, трехмерное вещественное пространство векторов относительно операций сложения и векторного умножения векторов образует структуру кольца.

Это кольцо не ассоциативное. Например, поскольку  $(i \times j) \times j = k \times j = -i$ , а  $i \times (j \times j) = i \times 0 = 0$ , то  $(i \times j) \times j \neq i \times (j \times j)$ .

Это кольцо не коммутативное, ибо  $\lambda \times \mu = -\mu \times \lambda$ , и в нём нет «единицы».

Мы не будем заниматься дальнейшей геометрической интерпретацией векторного произведения векторов, поскольку это предмет аналитической геометрии, где векторное произведение изучается более детально.

Отметим ещё одно умножение элементов из  $\overline{H}$  и соответствующее ему умножение трехмерных векторов. Для чего рассмотрим произведение в  $\overline{H}$ , заданное формулой (правилом):

$$(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2}(\lambda \cdot \mu + \mu \cdot \lambda) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3,$$

где  $\lambda, \mu \in \overline{H}$ , а  $\lambda \cdot \mu$  — умножение кватернионов в  $H$ . Соответствующее произведение векторов  $\lambda = \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$  и  $\mu = \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$  задаётся формулой

$(\lambda, \mu) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$  и называется *скалярным произведением векторов*.

Перечислим некоторые свойства скалярного произведения векторов, вытекающие из его определения:

1.  $(\alpha\lambda + \beta\mu, \gamma) = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)\gamma_1 + (\alpha\lambda_2 + \beta\mu_2)\gamma_2 + (\alpha\lambda_3 + \beta\mu_3)\gamma_3 = \alpha(\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3) + \beta(\mu_1\gamma_1 + \mu_2\gamma_2 + \mu_3\gamma_3) = \alpha(\lambda, \gamma) + \beta(\mu, \gamma)$   
(линейность по первому аргументу), здесь  $\alpha, \beta$  — вещественные числа, а  $\lambda, \mu, \gamma$  — трехмерные вектора;

2.  $(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda)$  (симметричность);

3.  $(\lambda, \lambda) \geq 0$ , причем  $(\lambda, \lambda) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\lambda = 0$ .

Используя обозначения скалярного и векторного произведения векторов, покажем, как в этих обозначениях выглядит (выражается) произведение кватернионов. Пусть  $\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \lambda_0 + \lambda$  и  $\mu_0 + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k = \mu_0 + \mu$  два кватерниона, где  $\lambda$  и  $\mu$  — векторные части этих кватернионов.

Тогда

$$(\lambda_0 + \lambda) \cdot (\mu_0 + \mu) = \lambda_0 \mu_0 - (\lambda, \mu) + \lambda_0 \mu + \mu_0 \lambda + \lambda \times \mu.$$

Как видим эта запись произведения гораздо проще, чем соответствующая запись (11). При этом  $\lambda_0 \mu_0 - (\lambda, \mu)$  — скалярная часть кватерниона-произведения, а  $\lambda_0 \mu + \mu_0 \lambda + \lambda \times \mu$  — векторная часть кватерниона-произведения.

Вернемся вновь к векторному произведению векторов. Пусть  $a, b$  и  $c$  — трехмерные вектора, т. е.  $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ,  $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ ,  $c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$ . Рассмотрим векторное произведение  $a \times (b \times c)$ :

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix} = \\ &= i(a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_3) + \\ &\quad + j(a_3 b_2 c_3 - a_3 b_3 c_2 - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1) + \\ &\quad + k(a_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_2) = \\ &= i b_1 (a_2 c_2 + a_3 c_3) - i c_1 (a_2 b_2 + a_3 b_3) + \\ &\quad + j b_2 (a_1 c_1 + a_3 c_3) - j c_2 (a_1 b_1 + a_3 b_3) + \\ &\quad + k b_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2) - k c_3 (a_1 b_1 + a_2 b_2) = \\ &= i b_1 (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) - i c_1 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + jb_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - \\
& - jc_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + kb_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - \\
& - kc_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \\
& = (ib_1 + jb_2 + kb_3)(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - \\
& - (ic_1 + jc_2 + kc_3)(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = b(a, c) - c(a, b).
\end{aligned}$$

Все проделанные выкладки достаточно очевидны, кроме, возможно, добавления в соответствующем равенстве к двум соседним слагаемым с противоположными знаками одного и того же слагаемого с противоположными знаками. Так к слагаемым  $ib_1(a_2c_2 + a_3c_3)$  и  $-ic_1(a_2b_2 + a_3b_3)$  мы добавили слагаемое  $ia_1b_1c_1$  и слагаемое  $-ia_1b_1c_1$  и т. д., в итоге получили  $ib_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - ic_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$  и т. д.

Пропуская теперь выкладки, запишем результат:

$$a \times (b \times c) = b(a, c) - c(a, b).$$

Используя полученную формулу, теперь легко можно доказать *тождество Якоби*

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
& a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = \\
& = b(a, c) - c(a, b) + c(b, a) - a(b, c) + a(c, b) - \\
& - b(c, a) = a\{(c, b) - (b, c)\} + \\
& + 6b\{(a, c) - (c, a)\} + c\{(b, a) - (a, b)\} = 0.
\end{aligned}$$

**Заключение.** Отметим, что в данной статье мы ограничились доказательством алгебраических свойств кватернионов и лишь частично затронули их геометрические свойства, показав как из кватернионов появляется векторное и скалярное произведения векторов. В следующей статье мы покажем, как с помощью

кватернионов решается такая сложная задача как «сложение поворотов» в трехмерном пространстве, и как это используется в механике управляемого движения.

### **Список литературы:**

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. — 320 с.
2. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. — 672 с.
3. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. — 144 с.
4. Кватернионы в геометрии, механике, релятивистской физике, теории поля // fizteh.ru: информационный портал [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.fizteh.ru/02-07-90327/index/qwat/> (дата обращения 25.01.2014).
5. Побегайло А.П. Применение кватернионов в компьютерной графике. Минск: БГУ, 2010. — 216 с.
6. Хитров Г.М. Применение второго метода Ляпунова к решению задачи ориентации твердого тела // Дифференциальные и интегральные уравнения: межвуз. сб., Горький: ГГУ, 1981. — С. 152—155.
7. Цисарж В.В., Марусик Р.И. Математические методы компьютерной графики: учебное пособие. К.: Факт, 2004. — 466 с.

## СЕКЦИЯ 2.

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

#### 2.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

#### АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

*Галанин Александр Владимирович*

*аспирант, Нижегородский Государственный Университет  
им. Н.И. Лобачевского,  
РФ, г. Нижний Новгород  
E-mail: [al@galanin.nnov.ru](mailto:al@galanin.nnov.ru)*

#### ALGORITHMS AND SOFTWARE SUITE FOR TOPOLOGICAL ANALYSIS OF COMPUTER MODELS

*Galanin Alexander*

*graduate student, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod,  
Russia, Nizhy Novgorod*

#### АННОТАЦИЯ

Обсуждаются алгоритмы и программный комплекс, предназначенные для решения задач вычислительной топологии. Основное внимание уделено методам минимизации путей в заданных классах симплициальных гомологий по модулю 2.

## ABSTRACT

This article describes algorithms and software complex for solving problems of computational topology. Basic attention is given to path minimization problem in a given homology class of homology group  $H_1(P) = H_1(P; \mathbf{Z}_2)$ .

**Ключевые слова:** симплекс; полиэдр; группа гомологий; алгоритм; минимизация; топологический шум.

**Keywords:** simplex; polyhedron; homology group; algorithm; minimization; topological noise.

### *Рассматриваемые объекты*

В задачах компьютерного моделирования часто используются триангулированные объекты, представляющие собой объединения правильно пересекающихся симплексов. Поэтому представляется важным исследование их свойств, в том числе свойств топологических.

В топологии триангулированные объекты называются полиэдрами. В настоящей работе рассматриваются компактные двумерные полиэдры трехмерного евклидова пространства  $\mathbf{R}^3$ . Каждый такой полиэдр  $P$  является объединением конечного множества симплексов размерностей  $n = 0, 1, 2$ . Поэтому он задается списком вершин (нульмерных симплексов)  $V$ , списком ребер (одномерных симплексов)  $E$ , списком треугольников (двумерных симплексов)  $T$ , а также списком троек действительных чисел, являющихся координатами соответствующих вершин в пространстве  $\mathbf{R}^3$ . Первые три списка (без координат вершин) образуют симплициальную схему полиэдра.

### *Программный комплекс*

Для решения задач вычислительной топологии при участии автора данной работы создан программный комплекс TSL. Комплексом поддерживаются следующие основные форматы моделей:

- AF: формат трёхмерных моделей программы 3DPlus;
- VRML 1.0: Virtual Reality Modeling Language — стандартизированный формат файлов для демонстрации трёхмерной интерактивной векторной графики;
- STL: разработан для нужд стереолитографии и предназначен для представления трёхмерных моделей. Он включает в себя описание треугольников, из которых состоит поверхность объекта.

В TSL представлены возможности пошагового выполнения алгоритмов (запуск по шагам с разной степенью детализации — выполнение каждого шага или целого блока за один раз), а также их визуализации на триангулированных моделях. После выполнения каждого шага или некоторой части алгоритма можно наблюдать текущее состояние в окне модели (подсвеченные и раскрашенные вершины, ребра и треугольники, которые показывают состояние внутренних структур алгоритма).

Основные задачи, решаемые с помощью программного комплекса:

- Коллапсирование в размерностях 1 и 2.
- Поиск особенностей двумерных полиэдров.
- Исследование 2-многообразий на ориентируемость.
- Нахождение базисных циклов графов.
- Вычисление базисов групп симплициальных гомологий по модулю 2 для двумерных многообразий и псевдомногообразий без применения матриц инцидентий.
- Вычисление базисов групп гомологий для разветвленных поверхностей.
- Индексация ребер 2-многообразия относительно 1-цикла и построение индексной вектор-функции [2] относительно заданного базиса группы одномерных гомологий.
- Вычисление индексов пересечения 1-циклов двумерного многообразия.
- Поиск минимального пути с заданным индексом, соединяющего фиксированные вершины полиэдра.
- Минимизация одномерных путей и циклов в их классах гомологий.
- Построение минимальных 1-циклов ориентируемого замкнутого 2-многообразия, порождающих канонический базис соответствующей группы гомологий.

#### *Алгоритмы минимизации в заданных классах гомологий*

Наиболее трудоёмкими из вышеприведенного списка являются задачи нахождения минимальных представителей в заданных классах одномерных гомологий. Сформулируем одну из них более точно.

Пусть заданы полиэдр  $P$ , являющийся двумерным замкнутым многообразием, неотрицательная весовая функция  $L: C_1(P) \rightarrow \mathbf{R}$  и путь  $x_0 \in C_1(P)$  с начальной вершиной  $s$  и конечной вершиной  $t$ .



Требуется найти реберный путь с минимальным весом среди всех путей с концами  $s$  и  $t$ , гомологичных  $x_0$ .

Для решения этой задачи в [3] предложен следующий метод. Сначала вычисляется базис группы гомологий по модулю 2  $H_1(P)$  и строится индексная вектор-функция  $J : C_1(P) \rightarrow \mathbf{Z}_2^r$  относительно этого базиса. Затем для  $P$  строится накрывающий полиэдр  $\hat{P}$ . Его вершинами являются пары  $(v, i)$ , состоящие из вершин  $v$  исходного полиэдра  $P$  и векторов  $i \in \mathbf{Z}_2^r$ , где  $r$  — ранг группы  $H_1(P)$ . Кроме того, для любого пути  $x \in C_1(P)$ , соединяющего вершины  $a, b \in V(P)$ , накрывающие пути соединяют вершины  $(a, i_a), (b, i_b) \in V(\hat{P})$ , удовлетворяющие равенству  $i_a + i_b = J(x)$ . Далее применяется алгоритм Дейкстры (см. [1]) для поиска пути с минимальным весом на накрывающем полиэдре  $\hat{P}$ . При этом в качестве начальной точки на  $\hat{P}$  выбирается пара  $(s, 0)$ , а в качестве конечной — пара  $(t, J(x_0))$ . Наконец, полученный путь проектируется на исходный полиэдр  $P$ .

Переход к накрывающему полиэдру позволяет свести рассматриваемую проблему к уже решённой задаче поиска пути с минимальным весом на графе. Однако при этом не используется информация о соответствии между вершинами исходного полиэдра и накрывающего. Это приводит к тому, что пути на накрывающем полиэдре, имеющие один образ при накрывающем отображении, минимизируются независимо друг от друга, что приводит к значительному увеличению времени работы алгоритма. Поэтому нами разработана модификация алгоритма, свободная от указанного недостатка.

Множество вершин полиэдра триангулированного многообразия  $P$  обозначим буквой  $V$ , множество рёбер —  $E$ . Пусть, как и выше,  $L$  — неотрицательная весовая функция,  $J$  — индексная вектор-функция относительно некоторого базиса группы  $H_1(P)$ , а граф  $G = (V, E)$  представляет собой одномерный остов полиэдра  $P$ .

Построим мультиграф  $G' = (V', E')$  в качестве вершин которого возьмём множество  $V' = S$ , состоящее из начальной и конечной

вершин пути  $x_0$ , а также всех вершин, инцидентных рёбрам с ненулевым значением индексной вектор-функции  $J$ . В  $G'$  каждую пару вершин  $u, v \in V'$  будут соединять дуга  $[u, v]$  со значением  $J'(u, v) = J(u, v)$ , если  $J(u, v) \neq 0$ , и дуга с  $J'(u, v) = 0$ , имеющая вес, равный весу минимального пути между  $u$  и  $v$ , проходящего по рёбрам с нулевым значением индексной вектор-функции. При этом запоминается соответствие между рёбрами/путями на графе  $G$  и дугами  $G'$ .

К графу  $G'$  применим указанный метод и получим новый алгоритм минимизации пути в его классе гомологий. Он состоит из следующих процедур:

1. Нахождение базиса  $[y_1], \dots, [y_r]$  группы гомологий  $H_1(P)$ .
2. Вычисление индексной вектор-функции  $J : C_1(P) \rightarrow \mathbf{Z}_2^r$  относительно базиса  $[y_1], \dots, [y_r]$ .
3. Построение мультиграфа  $G' = (V', E')$ .
4. Построение накрытия  $\pi : \hat{G}' \rightarrow G'$  с помощью вектор-функции  $J'$ .
5. Поиск пути  $\hat{x}'$  с минимальным весом  $\hat{L}'(\hat{x}')$ ,  $\hat{L}' = L \circ \pi$ , на накрывающем графе  $\hat{G}'$ , соединяющий вершины  $(s, 0)$  и  $(t, J(x_0))$ .
6. Вычисление проекции  $x' = \pi(\hat{x}')$  найденного пути на  $G'$ .
7. Восстановление соответствующего  $x'$  пути  $x$  на  $G$ .

#### ***Оценка алгоритмической сложности***

Введём обозначения:  $N = \max(N_0, N_1, N_2)$ , где  $N_i$  — количество симплексов размерности  $i$  в исходном полиэдре;  $K = |S|$ . При построении графа  $G'$  для каждой вершины  $u \in S$  используется алгоритм Дейкстры для графа  $G$  с  $N_0$  вершинами и  $N_1$  рёбрами, сложность которого  $O(N_0^2 + N_1)$  [1]. Следовательно, шаг 3 алгоритма имеет сложность

$$O(K(N_0^2 + N_1)) = O(KN^2), \quad (1)$$

так как  $N_0, N_1 \leq N$ .

Для построения накрывающего графа  $\hat{G}'$  и последующего поиска на нём минимального пути используется граф  $G'$ , содержащий  $|V'| = K$  вершин. К графу  $\hat{G}'$  вновь применяется алгоритм Дейкстры. Этот алгоритм имеет сложность

$$O(|\hat{V}'|^2 + |\hat{E}'|) = O((K2^r)^2 + |E'|2^r) = O(K^2 2^{2r}), \quad (2)$$

так как  $|\hat{V}'| = |V'| 2^r$ ,  $|\hat{E}'| = |E'| 2^r$  по построению  $\hat{G}'$  и  $|E'| \leq K^2$ .

Вычисление базиса группы  $H_1(P)$  и индексация относительно него могут быть выполнены с помощью алгоритмов, разработанных в [2] и [4]. Первый из них имеет сложность  $O(Nr)$ , а второй —  $O(N \log N)$ . Остальные шаги в силу их простоты на окончательную оценку сложности алгоритма повлиять не могут.

Отсюда, из (1) и (2) получаем сложность

$$O(Nr + N \log N + KN^2 + K^2 2^{2r}) = O(KN^2 + K^2 2^{2r}).$$

Заметим, что если применять алгоритм Дейкстры к графу  $\hat{G}$ , накрывающему  $G$ , как это делается в алгоритме 2 из [3], то сложность составит  $O(N^2 2^{2r})$ . Поэтому существенный выигрыш от применения нового варианта алгоритма может быть получен в ситуации, когда количество специальных вершин  $K = |S|$  намного меньше параметра  $N = \max(N_0, N_1, N_2)$ .

### ***Некоторые приложения***

Как уже отмечалось выше, в качестве моделей 3D объектов часто используются триангулированные поверхности, являющиеся замкнутыми ориентируемыми многообразиями. В этом случае группа  $H_1(P)$  является векторным пространством четной размерности

$m = 2g$  над полем  $\mathbf{Z}_2$ , а индекс пересечения  $\text{Ind} : H_1(P) \times H_1(P) \rightarrow \mathbf{Z}_2$  представляет собой симплектическую форму на  $H_1(P)$ . Поэтому существует базис группы  $H_1(P)$ , в котором форма  $\text{Ind}$  приводится к каноническому виду. Этот базис естественно также называть каноническим.

Разработанный нами алгоритм может быть использован при реализации предложенного в [4] метода нахождения циклов  $z_1, \dots, z_m \in Z_1(P)$ , каждый из которых минимален в своем гомологическом классе, а гомологические классы  $[z_1], \dots, [z_m]$  образуют канонический базис симплектического векторного пространства  $(H_1(P), \text{Ind})$ . Циклы с такими свойствами позволяет выделять ручки поверхности  $P$ , что важно для анализа его топологической структуры.

В частности, с помощью указанных алгоритмов имеется возможность локализовывать и устранять топологические дефекты компьютерных моделей 3D объектов, возникающих из-за неточностей при построении набора базовых точек или в результате ошибок при его триангуляции.

### Список литературы:

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2001. — 960 с.
2. Яковлев Е.И. Вычислительная топология. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2005.
3. Lapteva A.V. and E.I. Yakovlev. Index Vector-Function and Minimal Cycles // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2006. — Vol. 22. — P. 35—46.
4. Lapteva A.V., Yakovlev E.I. Minimal 1-Cycles Generating a Canonical Basis of 2-Manifold's Homology Group // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2006. — Vol. 31. — № 4. — P. 555—570.

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ПРИ РЕШЕНИИ ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ  
ЗАДАЧИ НЕЙМАНА**

*Хабибулина Татьяна Васильевна*  
студент ПГУ имени Ш.-Алейхема,  
РФ, г. Биробиджан  
E-mail: [habik\\_tania@mail.ru](mailto:habik_tania@mail.ru)

*Бабинер Елена Станиславовна*  
старший преподаватель ПГУ имени Ш.-Алейхема,  
РФ, г. Биробиджан  
E-mail: [mineeva\\_elena18@mail.ru](mailto:mineeva_elena18@mail.ru)

**APPLICATION OF A FINITE ELEMENT METHOD  
AT THE SOLUTION  
OF THE SEMI-COERCIVE TASK NEUMANN**

*Habibulina Tatiana*  
student of Sholom-Aleykhema Priamursky state university,  
Russia, Birobidgan

*Babiner Elena*  
senior teacher of Sholom-Aleykhema Priamursky state university,  
Russia, Birobidgan

**АННОТАЦИЯ**

В статье рассмотрены краевые полукоэрцитивные задачи Неймана для одномерного и двумерного случаев и переход к их вариационным постановкам. Описываются алгоритмы аппроксимации рассматриваемых задач методом конечных элементов, представлены результаты численных расчетов.

**ABSTRACT**

Semi-coercive task Neiman for one-dimensional and two-dimensional cases and transition to their variation formulation are considered in the article. Algorithms of approximation tasks by finite element method are describe there and the numerical result are presented.

**Ключевые слова:** вторая краевая задача; метод конечных элементов.

**Keywords:** second boundary value problem; finite element method.

Процесс моделирования стационарных процессов (не зависящих от времени) различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) Обычно приводит к уравнениям эллиптического типа, на искомое решение которых накладываются дополнительные условия, вытекающие из физической (или другой) постановки задачи. Примером такой задачи является вторая краевая задача или задача Неймана, имеющая широкий спектр физических интерпретаций. В качестве ее приложения в пространстве  $R^1$  возьмем процесс колебания струны, а в  $R^2$  — колебания мембраны.

Краевая постановка полукоэрцитивной задачи Неймана в операторном виде представлена уравнением Пуассона (1) и краевым условием (2):

$$Au = f, \text{ на } (a, b) \quad (1)$$

$$\frac{du}{dx} \Big|_{[a; b]} = 0, \quad (2)$$

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}$$

Где оператор  $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ . Это математическая модель колебания струны со свободными концами.

Классическое решение задачи (1), (2) — это дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $[a, b]$ . Если взять в качестве области определения оператора множество таких функций, то оператор  $-\frac{d^2}{dx^2}$  не будет положительным, а это значит — задача не имеет решения [6, с. 126]. В силу своей полукоэрцитивности задача (1), (2)

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

разрешима при условии, что  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Единственность обеспечивается выполнением требования к решению:

$$\int_a^b u(x) dx = 0 \quad (3)$$

Область определения оператора задачи (1), (2), усиленная требованием (3) гарантирует его положительность, следовательно, можно осуществить переход к задаче минимизации функционала:

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v) = \int_a^b \left( -\frac{d^2v}{2dx^2} - f \right) v dx$$

Где скалярное произведение определяется по формуле:

$$(\phi, \psi) = \int_a^b \phi \psi dx$$

После интегрирования по частям получаем окончательный вид функционала:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_a^b \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_a^b f v dx \quad (4)$$

В [1, с. 9] показана справедливость утверждения о том, что если функция  $u(x)$  — минимум для функционала (4), то она является решением задачи (1), (2). Обратное также имеет место: если  $u(x)$  — решение задачи (1), (2), то она сообщает минимальное значение функционалу (4).

Вариационная постановка этой задачи имеет преимущество, которое заключается в том, что можно ограничиться только требованием наличия у искомой функции кусочно непрерывных первых производных. Функция, доставляющая минимум функционалу (4) является обобщенным (слабым) решением краевой задачи (1), (2) [4, с. 171].

Для численного решения задачи (1), (2) методом конечных элементов переходим от непрерывной задачи к конечномерной.

Произведем разбиение  $[a; b]$  на  $N$  частей:  $x_i = ih$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ .  
 Приближенное решение будем искать в виде линейной комбинации:

$$u_N(x) = \sum_i u_i \varphi_i, \quad i = \overline{0, N} \quad (5)$$

Где:  $\varphi_i(x)$  – базисные (пробные) функции заданные на разбиениях  $[a; b]$ , а коэффициенты  $u_i$  – это значения искомой функции в узлах сетки  $x_i$ . Вид базисных функций представлен в [1, с. 100].

После подстановки (5) в функционал (4), получаем:

$$J(u_N(x)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i u_j A_{ij} - \sum_i u_i f_i, \quad i, j = \overline{0, N}, \quad (6)$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega_j} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx, \quad f_i = \int_{\Omega_j} f(x) \varphi_i(x) dx.$$

Где

Принимая во внимание необходимое и достаточное условие для существования минимума выпуклого функционала, находим вариацию (6), приравниваем ее к нулю и сводим задачу к решению системы вида:

$$\sum_j A_{ij} u_j = f_i, \quad i = \overline{0, N} \quad (7)$$

$A_{ij}$  – трехдиагональная матрица жесткости:



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix}$$

Вектор правых частей системы определяется по формулам:

$$f_0 = \int_0^h f(x) \cdot \frac{h-x}{h} dx,$$

$$f_i = \int_{(i-1)h}^{ih} f(x) \cdot \frac{x-(i-1)h}{h} dx + \int_{ih}^{(i+1)h} f(x) \cdot \frac{(i+1)h-x}{h} dx,$$

$$f_N = \int_{(N-1)h}^{Nh} f(x) \cdot \frac{x-(N-1)h}{h} dx,$$

Развернутый вид системы (7) для  $N+1$  уравнений [7, с. 8]:

$$\begin{cases} u_0 A_{00} + u_1 A_{01} = f_0, \\ u_{i-1} A_{i-1} + u_i A_{ii} + u_{i+1} A_{i+1} = f_i, & i = \overline{1, N-1} \\ u_{N-1} A_{N-1} + u_N A_{NN} = f_N \end{cases}$$

Решение системы находим методом прогонки.

В случае если к концам  $[a; b]$  приложена вертикальная сила, то краевые условия принимают вид:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=a} = \alpha, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=b} = \beta \quad (8)$$

Условием разрешимости задачи (1), (8) является [2, с. 180]:

$$\int_a^b f(x) dx = \alpha - \beta$$

Вид функционала в соответствующей задаче минимизации:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( -\frac{d^2u}{2dx^2} - f \right) u dx &= -\int_a^b \frac{d^2u}{2dx^2} u dx - \int_a^b f u dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left( u \cdot \left. \frac{du}{dx} \right|_a^b - \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \right) - \int_a^b f u dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left( \beta \cdot u(b) - \alpha \cdot u(a) - \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \right) - \int_a^b f u dx. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_a^b f u dx - \frac{\beta \cdot u(b) - \alpha \cdot u(a)}{2} \quad (9)$$

После подстановки в (9) линейной комбинации (5) получим:

$$J(u_N(x)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i u_j A_{ij} - \sum_i u_i f_i - \frac{\beta \sum_i u_i \varphi_i(b) - \alpha \sum_i u_i \varphi_i(a)}{2}$$

Далее, приравнивая вариацию функционала к нулю,

$$\frac{\partial J(u_N(x))}{\partial u_i} = \sum_{j=0}^N u_j A_{ij} - f_i - \frac{\beta \cdot \varphi_N(b) - \alpha \cdot \varphi_1(a)}{2} = 0$$

Получаем систему уравнений [7, с. 8]:

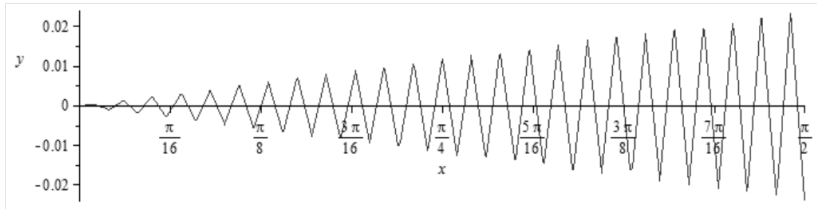
$$\sum_j u_j A_{ij} = f_i + \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (10)$$

При решении системы применяется методом прогонки.

**Результаты численных расчетов.**

В результате реализации описанного алгоритма для задачи

Неймана с однородными краевыми условиями на  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  с правой частью  $f(x) = \sin x - \cos x$  получено приближенное решение, график которого изображен на рисунке 1.

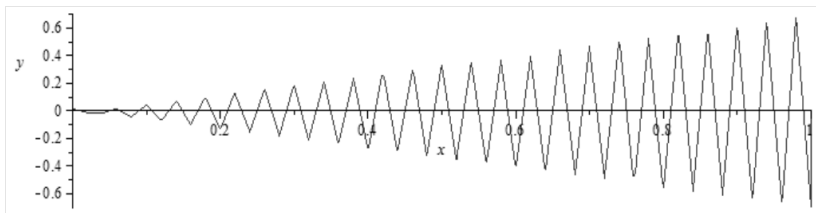


**Рисунок 1. График решения задачи (1), (2)**

Задача Неймана на  $[0;1]$  с правой частью  $f(x) = -3$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 2, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 5$$

и краевыми условиями имеет приближенное решение, график которого имеет вид:



**Рисунок 2. График решения задачи (1), (8)**

Теперь рассмотрим физическую интерпретацию задачи Неймана для случая  $R^2$ . Пусть на мембрану оказывает действие внешняя сила, плотность которой в каждой точке равна  $f(x, y)$  и ее направление перпендикулярно плоскости  $R^2$ . В состоянии покоя мембрана имеет форму плоской области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ , которая расположена в  $R^2$ .

Под действием этой силы мембрана прогнется в виде поверхности, уравнение которой  $u = u(x, y)$ . В положении равновесия функция  $u$  в каждой внутренней точке  $\Omega$  удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$-\Delta u = f, \quad (11)$$

Где оператор  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

Рассмотрим следующие варианты граничных условий, то есть связей, допускающих перемещение мембраны и относящиеся обычно к краю мембраны [3, с. 36]:

1. Кривая  $\partial\Omega$  свободно перемещается вертикально по боковой поверхности цилиндра с основанием  $\Omega$ , то есть условия на границе имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (12)$$

Где  $n$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ . Условия (12) относятся к *естественными* краевыми условиями [1, с. 10].

2. Помимо внешней силы, к границе приложена вертикальная сила  $g(x, y)$ , тогда получаем граничные условия вида:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = g(x, y). \quad (13)$$

Классическое решение задачи Неймана из пространства функций  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  [4, с. 170].

Аналогично одномерному случаю задачи Неймана, в задаче с однородными краевыми условиями (11), (12) на правую часть

$$\int f(x, y) dx dy = 0$$

накладывается условие  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = 0$  и для обеспечения положительной определенности оператора  $\Delta$  должно выполняться условие для решения:

$$\int_{\Omega} u(x, y) dx dy = 0.$$

Положительная определенность оператора позволяет перейти от краевой задачи (11), (12) к задаче минимизации функционала:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy - \int_{\Omega} f v dx dy. \quad (14)$$

Функция  $u \in H^1(\Omega)$ , реализующая минимум функционала (14) — есть обобщенное решение задачи (11),(12) [4, с. 172].  
 Пространство  $H^1(\Omega)$  — это пространство функций, таких, что

$$v \in L_2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega < \infty,$$

Где  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$  обобщенные производные [5, с. 34].

Слабое решение задачи (11), (13) реализует минимум функционала:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy - \int_{\Omega} f v dx dy - \int_{\Gamma} g v d\Gamma, \quad v \in G. \quad (15)$$

Где  $G = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} \geq 0\}$ .

Рассмотрим аппроксимацию этих задач методом конечных элементов на прямоугольной области  $\Omega = [a, b; c, d]$ . Для перехода от непрерывной задачи к конечномерной проведем триангуляцию

$$h_x = \frac{b-a}{N_x} \quad \text{и} \quad h_y = \frac{d-c}{N_y}, \quad \text{а} \quad N_x$$

области (рис. 3) с шагами

и  $N_y$  — количество разбиений по переменным  $x$  и  $y$  соответственно.

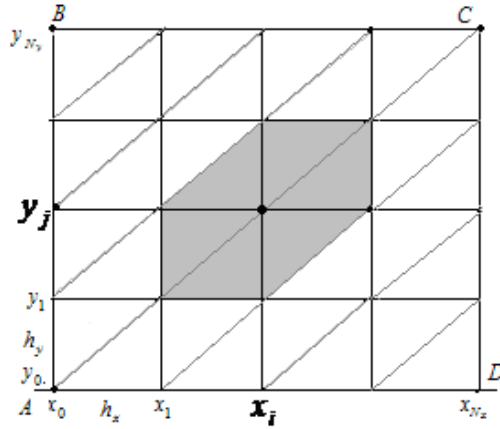


Рисунок 3. Триангуляция прямоугольной области с выделенным

носителем  $\Omega_{ij}$  базисной функции  $\varphi_{ij}$

Приближенное решение  $u$  ищем в виде линейной комбинации:

$$u_N = \sum_{i,j} u_{ij} \varphi_{ij} \quad (16)$$

Где:  $\varphi_{ij}(x, y)$  — кусочно-линейные финитные функции, заданные в узлах триангуляции с носителями  $\Omega_{ij}$  (рис. 3) [1, с. 184]. После подстановки (16) в (15) получаем:

$$J(u_N) = \sum_{i,j,k,l} u_{ij} u_{kl} A_{ijkl} - 2 \sum_{i,j} u_{ij} f_{ij} - \sum_{i,j} u_{ij} g_{ij}, \quad (17)$$

Где

$$A_{ijkl} = \int_{\Omega_{ijkl}} \left( \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} \right) d\Omega_{ijkl},$$

$$f_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} f \varphi_{ij} d\Omega_{ij} \quad \text{и} \quad g_{ij} = \int_{\partial\Omega_{ij}} g \varphi_{ij} d\partial\Omega_{ij},$$

$$\Omega_{ijkl} = \Omega_{ij} \cap \Omega_{kl} .$$

Аппроксимация функционала (14) имеет вид:

$$J(u_N) = \sum_{i,j,k,l} u_{ij} u_{kl} A_{ijkl} - 2 \sum_{i,j} u_{ij} f_{ij} . \quad (18)$$

Находим вариацию функционала (17) и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{\partial J(u_N)}{\partial u_{ij}} = 2 \sum_{k,l} u_{kl} A_{ijkl} - 2 f_{ij} - g_{ij} = 0 .$$



Получили систему линейных уравнений:

$$\sum_{k,l} u_{kl} A_{ijkl} = \hat{f}_{ij}, \quad (19)$$

Где  $\hat{f}_{ij} = f_{ij} + \frac{1}{2} g_{ij}$  для задачи (11), (13), а для задачи (11), (12) —

$$\hat{f}_{ij} = f_{ij}.$$

Систему (19) решаем методом Зейделя.

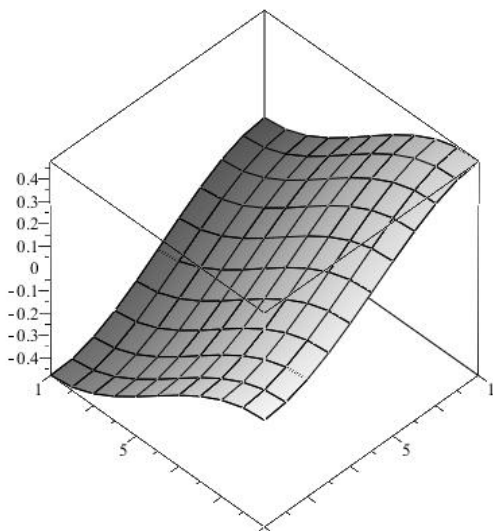
**Результаты численных расчетов.**

Описанный алгоритм был реализованы на квадрате  $[a, b; c, d]$ , где  $a = c = 0, b = d = 1$ . В таблице 1 приведены результаты работы программ, где  $k$  — количество итераций,  $\varepsilon$  — заданная точность. Для нахождения решений систем уравнений был использован метод Зейделя.

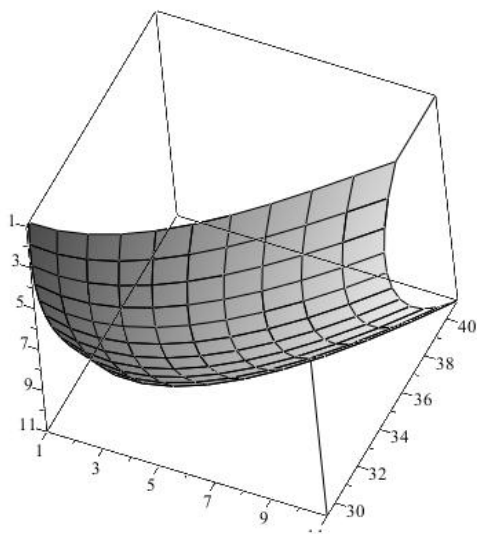
**Таблица 1.**

**Результаты расчетов задачи Неймана**

$h_{\max}$	$N_x$	$N_y$	$f(x, y)$	$\varepsilon$	$k$
0,1	10	10	$4(x - y)$	0,001	50
			$2(x - 2y)$	0,001	201



**Рисунок 4. График решения задачи Неймана с однородными краевыми условиями**



**Рисунок 5. График решения задачи Неймана с неоднородными краевыми условиями**

### **Список литературы:**

1. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 416 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977, — 456 с.
3. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учебник. М.: Изд-во РУДН, 1997. — 447 с.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. — 392 с.
5. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. Учеб. пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1977. — 431 с.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1970. — 512 с.
7. Хабибулина Т.В, Бабинер Е.С. Генерация систем уравнений при решении одномерных задач Дирихле и Неймана методом конечных элементов. / Молодежный научный форум: Естественные и медицинские науки. Электронный сборник статей по материалам IV студенческой международной заочной научно-практической конференции. Москва: Изд. «МЦНО». — 2013. — 44 с. — № 4 (4) / [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: [http://www.nauchforum.ru/archive/MNF\\_nature/4\(4\).pdf](http://www.nauchforum.ru/archive/MNF_nature/4(4).pdf).

## СЕКЦИЯ 3.

### ФИЗИКА

#### 3.1. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН НАТЯГОВ И ДОПУСКАЕМОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ В СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ, СОЕДИНЕННЫХ С НАТЯГОМ

*Годжаев Тофик Байрам оглы*

*д-р техн. наук, зав. кафедрой «Машинная инженерия  
и организация перевозок в транспорте», профессор  
Азербайджанского технологического университета,  
Республика Азербайджан, г. Гянджа  
E-mail: [Pkkin-540@mail.ru](mailto:Pkkin-540@mail.ru)*

*Алиев Шакир Гусейнгулу оглы*

*канд. техн. наук, доцент кафедры «Машинная инженерия  
и организация перевозок в транспорте», доцент  
Азербайджанского Технологического Университета,  
Республика Азербайджан, г. Гянджа  
E-mail: [shakiraliyev@mail.ru](mailto:shakiraliyev@mail.ru)*

# DEFINITIONS OF OPTIMAL VALUES OF PRELOADS AND ALLOWABLE INTERNAL PRESSURE IN COMPOSITE CONSTRUCTIONS CONNECTED WITH A PRELOAD

**Tofik Godzhaev**

*doctor of Engineering Science, Head of the Department of Mechanical Engineering and transport shipments, professor of Azerbaijan Technological University, Republic of Azerbaijan, Gyanja*

**Shakir Aliyev**

*candidate of Engineering Science, associate professor of the Department of Mechanical Engineering and transport shipments, Azerbaijan Technological University, Republic of Azerbaijan, Gyanja*

## АННОТАЦИЯ

В статье рассматриваются определения оптимальных величин и допускаемого внутреннего давления в составных конструкциях, соединенных с натягом. Дана методика определения оптимальных величин и допускаемого внутреннего давления. Определено, что при замене однородной составной пластинки (с учётом натяга), эквивалентное напряжение уменьшается и увеличивается прочность.

## ABSTRACT

The article considers definitions of optimal values and allowable internal pressure in composite constructions connected with a preload. A methodics for defining optimal values and allowable internal pressure is given. It is found that in case of replacement of a homogeneous composite plate (taking preload into consideration) equivalent voltage decreases and resistance increases.

**Ключевые слова:** напряжение; прочность; пластины; давление; натяг.

**Keywords:** voltage; resistance; plates; pressure; preload.

Современная техника предъявляет повышенное требование к прочностным свойствам машин, конструкции и сооружений, минимизации затрат материалов и максимальное использование ресурсов.

С целью повышения прочностных характеристик, экономии материалов, снижения веса и конструкции иногда требуется создание их элементов из кусочно-однородных деталей, соединённых между собой напряжённой посадкой. В этих соединениях детали хорошо центрируются, прочность и надёжность при динамических и знакопеременных нагрузках увеличиваются, они обладают демпфирующей способностью. Благодаря этим и другим преимуществам, соединения с натягом нашли весьма большую область применения в самых различных конструкциях. Поэтому разработка эффективных методов расчёта на прочность составных деталей, соединённых между собой прессовой посадкой, является актуальной.

С целью достижения наибольшей прочности, в рассматриваемых составных пластинках наименьшей материалоёмкости, для заданных внутренних давлений, на основе квадратной пластинки (рис. 1), рассмотрим методику определения оптимальных величин натягов  $\delta r_j$  ( $j=2, 3, 5, 6$ ); причём  $\delta r_2=\delta r_4$  и  $\delta r_3=\delta r_5$  и внутреннего давления  $P_0$ .

На основе принципа суперпозиции, величины полных напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , действующих в составной пластинке, равны алгебраической сумме [1, с. 78] полученных напряжений, т. е.

$$\sigma_r = \sigma_r^{(P)} + \sigma_r^{(\delta r_2)} + \sigma_r^{(\delta r_3)}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^{(P)} + \sigma_\theta^{(\delta r_2)} + \sigma_\theta^{(\delta r_3)}$$

и затем, для наглядности, построены в отдельности их эпюры.

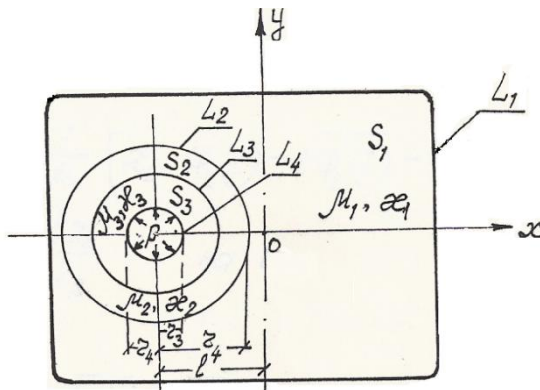


Рисунок 1. Составная пластинка

С учётом натягов  $\delta r_2$  и  $\delta r_3$  (где  $\delta r_5 = \delta r_2$  и  $\delta r_6 = \delta r_3$ ), напряжение  $\sigma_0$  уменьшается и, наряду с этим, рассматриваемая пластинка будет выдерживать сравнительно большее внутреннее давление.

Величины натягов  $\delta r_5 = \delta r_2$  и  $\delta r_6 = \delta r_3$  при заданном внутреннем давлении подбираем таким образом, чтобы распределение напряжений  $\sigma_0$  вдоль вещественной оси квадратной пластинки было бы, по возможности, практически равномерным.

Для этого приравниваем между собой результирующие напряжения в непосредственной близости слева от точек А, В и С (рис. 2), т. е.

Таблица 1.

Точки компл. напр.	$B$	$-(e+R_4)$	$-(e+R_5)$	$-(e+R_5)$	$-(e+R_4)$	$0$
$-\sigma_0/P$	0,007	0,232	0,4915	0,549	0,351	0,287
$-\sigma_0/P$	0,485	0,593	0,593	0,566	0,566	0,491
		0,347	0,109	0,081	0,340	

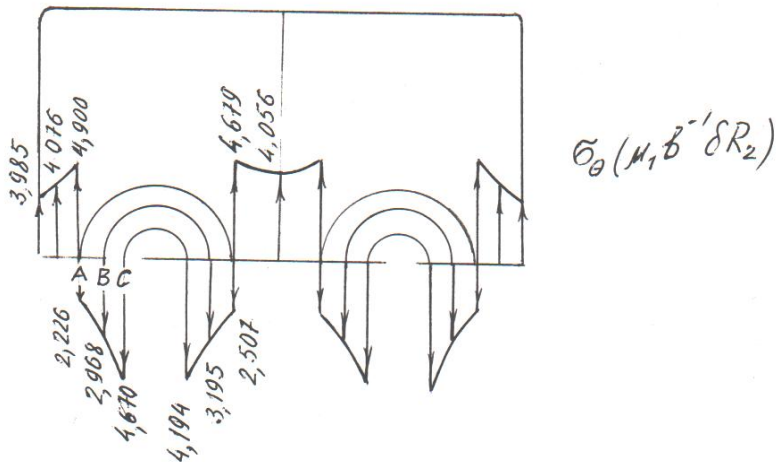


Рисунок 2. Эпюра напряжений составных пластинок

$$\sigma_{\theta}^A = \sigma_{\theta}^B = \sigma_{\theta}^C$$

Результирующие напряжения  $\sigma_{\theta}$  в точках А, В и С для рассматриваемой пластинки соответственно равны:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}^A &= 0,309P + 4,9\alpha + 2,744\beta \\ \sigma_{\theta}^B &= 0,479P - 2,968\alpha + 4,258\beta \\ \sigma_{\theta}^C &= 1,156P - 4,670\alpha - 8,615\beta\end{aligned}$$

где  $\alpha = \frac{\mu_1 \delta r_2}{b}$ ,  $\beta = \frac{\mu_1 \delta r_3}{b}$

При заданных внутренних давлениях  $P_4=P_7=P$  из условий  $\sigma_{\theta}^A = \sigma_{\theta}^B$  и  $\sigma_{\theta}^A = \sigma_{\theta}^C$ , для определения  $\alpha$  и  $\beta$ , составляем систему уравнений, т. е.:

$$\left. \begin{aligned}0,17p - 7,868\alpha + 1,514\beta &= 0 \\ 0,847p - 9,57\alpha - 11,359\beta &= 0\end{aligned} \right\}$$

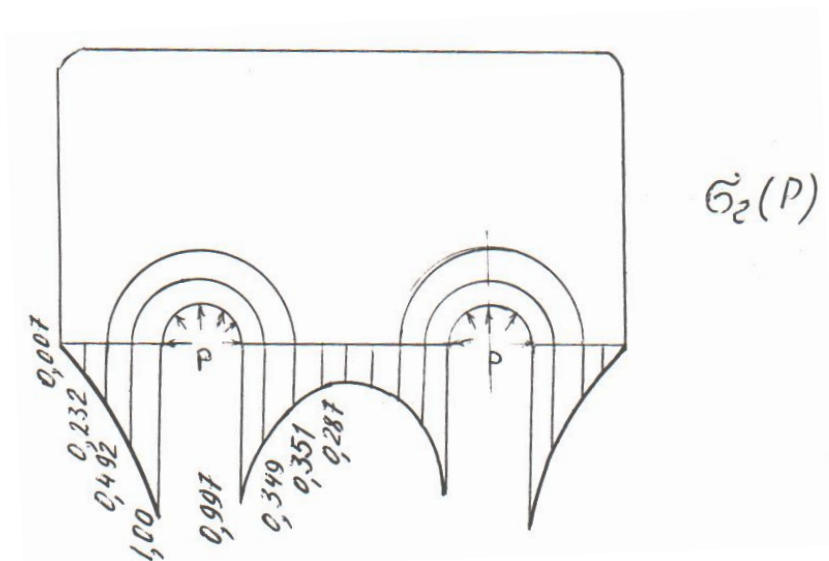
Решая её, получим:  $\alpha=0,031P$ ,  $\beta=0,0485P$

Отсюда

$$\begin{aligned}\delta r_2 = \delta r_5 &= \frac{0,031Pb}{\mu_1} = \frac{0,031Pb}{7,956 \cdot 10^4} = 0,0039Pb \cdot 10^{-4} \\ \delta r_3 = \delta r_6 &= \frac{0,0485Pb}{\mu_1} = \frac{0,0485Pb}{7,956 \cdot 10^4} = 0,0061Pb \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Далее, при найденных значениях натягов в характерных точках пластинки, определены величины результирующих напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_{\theta}$  (таблица) и для наглядности построены эпюры напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_{\theta}$  (рис. 3 и 4).





**Рисунок 3. Эпюра напряжений составных пластинок**

Из рис. 4 наглядно видно, что окружное напряжение по вещественной оси распределяется» [3, с. 58] почти равномерно.

Далее согласно III теории прочности, в наиболее напряжённой точке для однородной (без натяга) и составной (с натягом) пластинок, напряжения  $\sigma_\theta$  соответственно равны:

$$\sigma_{\text{экв}}^C = \sigma_\theta - \sigma_r = 1,156P + 1,0P = 2,156P$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{*C} = \sigma_\theta - \sigma_r = 0,593P + 1,0P = 1,593P$$

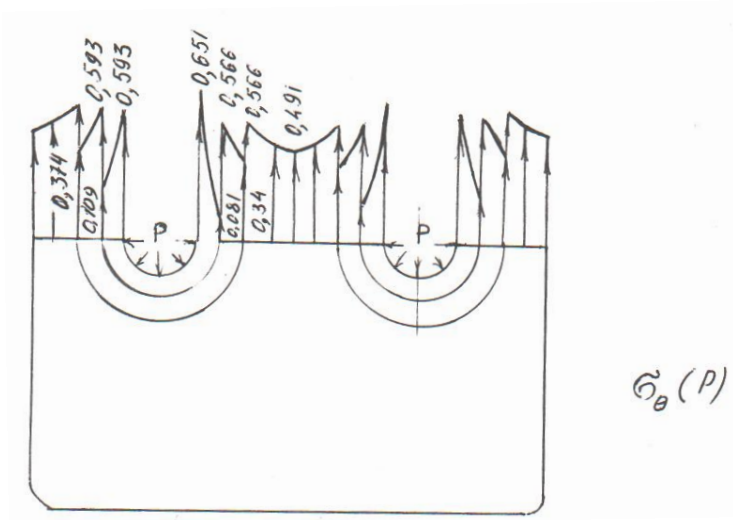


Рисунок 4. Эпюра напряжений составных пластинок

Таким образом, при замене однородной пластинки составной (с учётом натяга), эквивалентное напряжение уменьшается

$$\Delta\sigma_{\text{экв}}^C = \sigma_{\text{экв}}^C - \sigma_{\text{экв}}^{*C} = 0,563P,$$

т. е. эквивалентное напряжение уменьшается в  $\sigma_{\text{экв}}^C : \sigma_{\text{экв}}^{*C} = 1,353$  раз и соответственно увеличивается прочность. Затем, определим допускаемое давление  $P_{\text{доп}}.$

$$\sigma_{\text{экв}}^{*C} = 1,593P \leq [\sigma]$$

Отсюда

$$R_2 = R_4 = 0,35b, R_3 = R_5 = 0,25b, R_0 = R_6 = 0,15b \\ e = 0,45b, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 \\ \delta R_3 = \delta R_5 \neq 0, P \neq 0$$

$$P_{\text{доп}} = \frac{[\sigma]}{1,593} = 0,627[\sigma]$$

Так как все составные части пластинки изготовлены из стали–3, при этом  $[\sigma]=160$  МПа, тогда

$$P_{\text{допус.}} \leq 100 \text{ МПа}$$

Таким образом, при выше найденных натягах  $\delta r_2$  и  $\delta r_3$ , допускаемое внутреннее давление не должно превышать 100 МПа.

На основании результатов многочисленных примеров при различных вариантах выяснено, что с увеличением количества запрессованных колец, с учётом действия внутренних давлений, соответственно уменьшаются значения возникающих напряжений и соответственно увеличивается прочность рассматриваемого объекта, а также путём варьирования эксцентриситета запрессованных шайб, можно определить оптимальный вариант места расположения шайб.

### **Список литературы:**

1. Амензаде Ю.А. К вопросу об упругом равновесии кусочно-однородных тел. Прикладная механика, т.П., вып.10, 1966 — с. 69—70.
2. Годжаев Т.Б., Алиев Ш.Г. Концентрация напряжений в кусочно-однородной пластинке различной конфигурации от двух эксцентрично запрессованных круглых шайб, центрально ослабленных отверстием различной формы // Национальная Академия Наук Азербайджана. Гянджинский Региональный Научный Центр «Сборник Известий» № 29. Гянджа-2007, — стр. 111—114.
3. Годжаев Т.Б., Алиев С.Г., Алиев Ш.Г. К вопросу исследования концентрации напряжений в квадратной пластинке от центрально посаженного упругого кольца, симметрично ослабленного двумя круглыми отверстиями // Азербайджанский Технологический Университет, «Научные вести» № 5—6, Гянджа 2007, — стр. 65—69.

## 3.2. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРА В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

***Киселев Николай Андреевич***

*студент математико-механического факультета  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [kisnikn@mail.ru](mailto:kisnikn@mail.ru)*

***Рябинин Анатолий Николаевич***

*д-р физ.-мат. наук, гл. научн. сотр.  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [a\\_ryabinin@front.ru](mailto:a_ryabinin@front.ru)*

### THE STUDY OF CYLINDER ROTATIONAL OSCILLATIONS IN THE AIRFLOW

***Kiselev Nikolai***

*student, Faculty of Mathematics and Mechanics  
of St. Petersburg State University,  
Russia, St. Petersburg*

***Ryabinin Anatoly***

*d.Sc, Principal Researcher, St. Petersburg State University,  
Russia, St. Petersburg*

#### АННОТАЦИЯ

Экспериментально исследуются вращательные колебания кругового цилиндра в воздушном потоке с целью их описания с помощью математической модели. Получены амплитуды колебаний и их период. Вычислены параметры математической модели.

## ABSTRACT

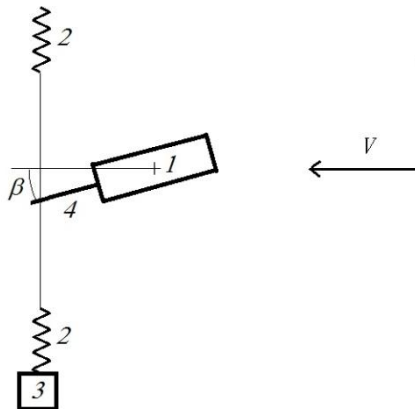
Rotational oscillations of circular cylinder in the airflow are studied experimentally. The goal of study is the description of oscillations with the mathematical model. The amplitude of oscillations and their period are obtained. Model parameters are calculated.

**Ключевые слова:** воздушный поток; цилиндр; колебания; математическая модель.

**Keywords:** airflow; cylinder; oscillations; mathematical model.

Задача о колебаниях плохообтекаемых тел в воздушном потоке возникает, например, при транспортировке грузов, подвешенных под вертолетом. Одной из форм колебаний являются вращательные колебания тела вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс [2, 3, 5].

В настоящей работе экспериментально исследуются вращательные колебания кругового цилиндра. Эксперименты проводились в дозвуковой аэродинамической трубе АТ-12 Санкт-Петербургского государственного университета, описанной в работе [1]. В открытой рабочей части установки скорость воздушного потока может регулироваться в пределах от 0 до 40 м/с. Начальная степень турбулентности равна 0,4 %. Длина рабочей части 2,25 м, диаметр среза сопла круглого сечения 1,5 м.



*Рисунок 1. Схема эксперимента. 1 — цилиндр, 2 — пружины, 3 — полупроводниковый тензопреобразователь С-50, 4 — хвостовая державка*

Цилиндр диаметром 0,14 м и длиной  $L = 0,28$  м, выполненный из дерева, закреплялся в рабочей части на проволоочной подвеске таким образом, что он мог свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр цилиндра. Ось вращения перпендикулярна оси цилиндра и вектору скорости набегающего потока. К основанию цилиндра была прикреплена хвостовая державка, соединенная с двумя пружинами (рис. 1).

Нижняя пружина крепилась к полупроводниковому тензопреобразователю, предназначенному для измерения сил в диапазоне от 0 до 50 Н. Сигнал от тензопреобразователя подавался на осциллограф Velleman PCS500A, который, в свою очередь, был связан с компьютером. В положении равновесия угол  $\beta = \beta_*$  принимал значения от 0 до 3 градусов. Зависимость натяжения пружины от времени записывалась в файл для дальнейшей обработки. Частота считывания равна 100 Гц, длительность записи — 17 секунд. Измерения затухающих колебаний проводились при отсутствии воздушного потока. Установившиеся колебания регистрировались при различных скоростях потока от 5 до 14 м/с и различных углах  $\beta_*$ . Процедура градуировки позволила пересчитать амплитуды колебаний натяжения пружины в амплитуды вращательных колебаний. Во всех случаях установившихся колебаний форма колебаний была близка к гармонической и период колебаний  $T = 0,74$  с не зависел от скорости набегающего потока. Таким же периодом характеризовались затухающие колебания цилиндра в отсутствие потока. При обработке результатов измерений была принята модель вращательных автоколебаний цилиндра в потоке, предложенная в работе [4]:

$$\dot{A} = \frac{A\mu}{2} \left[ \frac{v}{L} \left( 1 - \delta\beta_*^2 - A^2 \frac{\delta}{4} \right) - k_2 \right], \quad (1)$$

где:  $A$  — амплитуда вращательных колебаний,

$v$  — скорость набегающего потока,

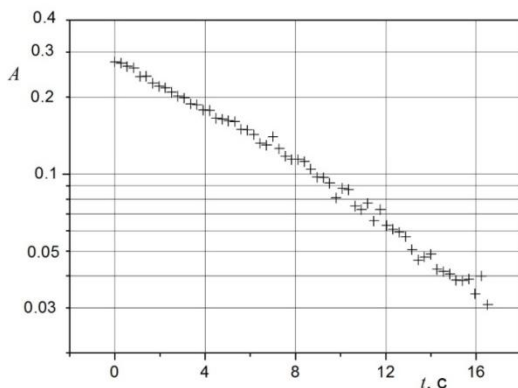
$\delta$  — параметр модели, описывающий влияние аэродинамических сил,

$k_2$  — параметр модели, описывающий вязкое сопротивление упругой подвески,

$\mu$  — безразмерный коэффициент. Если скорость потока в формуле (1) положить равной нулю, получится уравнение (2) для амплитуды затухающих колебаний

$$\dot{A} = -\frac{A\mu k_2}{2}, \quad (2)$$

имеющее экспоненциальное решение. Экспериментально полученная зависимость  $A$  от времени в полулогарифмических координатах приведена на рис. 2. Величина  $\mu k_2 / 2$ , определенная по наклону аппроксимирующей прямой на рис. 2, равна  $0,13 \text{ с}^{-1}$ .



**Рисунок 2. Зависимость амплитуды затухающих колебаний (в радианах) от времени в отсутствие потока в рабочей части**

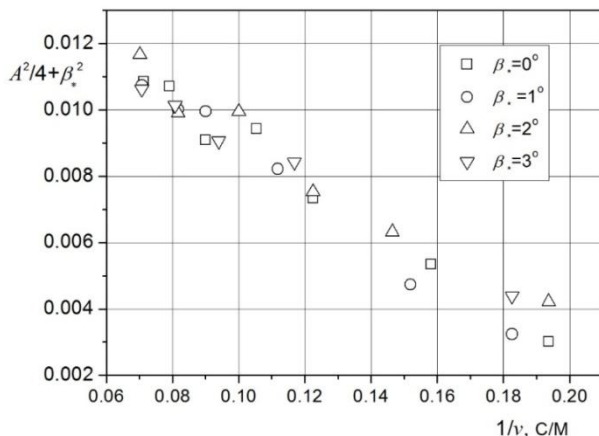
Полагая в формуле (1)  $\dot{A} = 0$ , можно получить уравнение для амплитуды установившихся колебаний, которое преобразуется к виду

$$\frac{A^2}{4} + \beta_*^2 = \frac{1}{\delta} - \frac{k_2 L}{\delta \nu}. \quad (3)$$

Как и предсказывает формула (3), экспериментальные точки на графике рис. 3 для всех углов  $\beta_*$  ложатся в пределах

экспериментальной погрешности на одну прямую. Методом наименьших квадратов найдены коэффициенты линейной зависимости  $A^2/4+\beta_*$  от  $1/\nu$  и определены параметры  $\delta = 65,3$  и  $k_2 = 14,5$ .

Определена также величина безразмерного параметра математической модели колебаний цилиндра в воздушном потоке  $\mu = 0,018$ .



**Рисунок 3.** Зависимость  $A^2/4+\beta_*$  от  $1/\nu$

Таким образом, в результате эксперимента в аэродинамической трубе найдены все параметры математической модели, описывающей колебания кругового цилиндра в воздушном потоке.

### Список литературы:

1. Ковалев М.А. О расчете и исследовании аэродинамических труб // Уч. зап. Ленингр. ун-та. — 1939. — Вып. 7. — С. 61—86.
2. Рябинин А.Н. Колебания маятника со стабилизатором в воздушном потоке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. — 1997. — Вып. 2. — С. 71—77.
3. Рябинин А.Н. Некоторые задачи аэродинамики плохообтекаемых тел. СПб.: Изд-во С.-Петербурга. ун-та. 1997. — 142 с.
4. Рябинин А.Н., Лущенко И.В. Экспериментальные исследования колебаний цилиндра в воздушном потоке // Вестник СПбГУ. Сер. 1, — 2007. — Вып. 2. — С. 120—123.
5. Рябинин А.Н., Тюрин Б.Ф. Поведение груза, подвешенного под вертолетом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, — 1993. — Вып. 1. — С. 87—91.



### 3.3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

#### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАТЕРНИОНОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

***Камачкин Александр Михайлович***

*профессор, д-р физ.-мат. наук, профессор  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [akamachkin@mail.ru](mailto:akamachkin@mail.ru)*

***Свиркина Лариса Анатольевна***

*канд. физ.-мат. наук, доцент  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [lara\\_a@mail.ru](mailto:lara_a@mail.ru)*

***Хитров Геннадий Михайлович***

*доцент, канд. физ.-мат. наук, доцент  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
РФ, г. Санкт-Петербург  
E-mail: [chitrow@gmail.com](mailto:chitrow@gmail.com)*

# USAGE OF QUATERNIONS FOR THE DESCRIPTION OF THE ROTATIONAL MOTION

**Alexander Kamachkin**

*professor, doctor of physical and mathematical sciences, professor  
of St. Petersburg State University,  
Russia, St. Petersburg*

**Larisa Svirkina**

*candidate of physical and mathematical sciences, associate professor  
of St. Petersburg State University,  
Russia, St. Petersburg*

**Gennady Khitrov**

*associate professor, candidate of physical and mathematical sciences,  
associate professor of St. Petersburg State University,  
Russia, St. Petersburg*

## АННОТАЦИЯ

Статья посвящена описанию свойств кватернионов, позволяющих использовать их для описания вращательного движения, как управляемого вращательного движения космических аппаратов, так и в компьютерных играх.

## ABSTRACT

The paper is devoted to the description of properties of the quaternions, allowing us to use them for the description of a rotational motion as a controlled rotational motion of spacecrafts, and in computer games.

**Ключевые слова:** кватернионы; сложение поворотов; вращательное движение; кинематические уравнения.

**Keywords:** quaternions; addition of turns; rotational motion; kinematic equations.

**Введение.** Статья посвящена применению кватернионов в уравнениях, определяющих положение одной системы координат относительно другой. В частности, это касается использования кватернионов в уравнениях механики, описывающих вращательное движение твердых тел. Речь идет об описании следствий из геометрической интерпретации кватернионов.

Для облегчения чтения приведем представление кватерниона в виде числа с тремя мнимыми единицами и представление кватерниона в так называемой векторной форме, а также запись произведения двух кватернионов в векторной форме.

$$\text{Пусть } \Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \lambda_0 + \lambda$$

и  $\mathbf{M} = \mu_0 + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k = \mu_0 + \mu$  — кватернионы или «числа» с тремя мнимыми единицами  $i, j, k$ . В записи кватернионов наборы  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  — вещественные числа. Числа  $\lambda_0$  и  $\mu_0$  называются скалярными частями кватернионов, а  $\lambda = \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$  и  $\mu = \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$  — векторными частями. Умножение кватернионов как чисел с тремя мнимыми единицами производится как обычное умножение «скобки», т. е. как

$$\Lambda \cdot \mathbf{M} = (\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k)(\mu_0 + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k)$$

с учетом перемножения мнимых единиц между собой:  
 $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$ .

Произведение кватернионов в векторной форме имеет вид:  
 $\Lambda \cdot \mathbf{M} = (\lambda_0 + \lambda) \cdot (\mu_0 + \mu) = \lambda_0 \mu_0 - (\lambda, \mu) + \lambda_0 \mu + \mu_0 \lambda + \lambda \times \mu$ ,  
 где  $(\lambda, \mu)$  и  $\lambda \times \mu$  означают скалярное и векторное произведения  $\lambda$  на  $\mu$  соответственно. При этом  $\lambda$  и  $\mu$  могут рассматриваться как векторы трехмерного пространства с декартовой системой координат с осями  $i, j, k$ . Отметим, что  $\lambda_0 \mu_0 - (\lambda, \mu)$  будет скалярной, а  $\lambda_0 \mu + \mu_0 \lambda + \lambda \times \mu$  — векторной частями произведения  $\Lambda \cdot \mathbf{M}$ .

**Преобразование векторной части кватерниона и геометрическая интерпретация этого преобразования.** Пусть  $\lambda$  — векторная часть некоторого кватерниона (или чисто векторный кватернион),  $\mathbf{E} = \cos \psi + p \sin \psi$  — некоторый фиксированный кватернион, где  $p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$  и  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ . Нетрудно видеть, что модуль кватерниона  $\mathbf{E}$  равен единице. Действительно,

$$\begin{aligned}
E \cdot \bar{E} &= (\cos \psi + p \sin \psi) \cdot (\cos \psi - p \sin \psi) = \\
&= \cos^2 \psi + (p, p) \sin^2 \psi = \\
&= \cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию  $f(E, \lambda) = E \cdot \lambda \cdot E^{-1} = E \cdot \lambda \cdot \bar{E}$ .

$$\begin{aligned}
E \cdot \lambda \cdot \bar{E} &= (\cos \psi + p \sin \psi) \cdot \lambda \cdot (\cos \psi - p \sin \psi) = \\
&= \{-(p, \lambda) \sin \psi + \lambda \cos \psi + (p \times \lambda) \sin \psi\} \cdot (\cos \psi - p \sin \psi) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-(p, \lambda) \sin \psi \cos \psi + \\ &+(\lambda, p) \cos \psi \sin \psi + ((p \times \lambda), p) \sin^2 \psi \end{aligned} \right\} + \\
&+ \left\{ \begin{aligned} &p(p, \lambda) \sin^2 \psi + \lambda \cos^2 \psi + \\ &+(p \times \lambda) \sin \psi \cos \psi - (\lambda \times p) \sin \psi \cos \psi - \\ &-(p \times \lambda) \times p \sin^2 \psi \end{aligned} \right\} = p(p, \lambda) \sin^2 \psi + \\
&+ \lambda \cos^2 \psi - 2(\lambda \times p) \sin \psi \cos \psi + \\
&+ p(p, \lambda) \sin^2 \psi - \lambda(p, p) \sin^2 \psi = \\
&= 2p(p, \lambda) \sin^2 \psi - (\lambda \times p) \sin 2\psi + \lambda \cos 2\psi = h
\end{aligned}$$

Мы видим, что функция  $f(E, \lambda)$  сопоставляет векторному кватерниону  $\lambda$  векторный кватернион  $h$ . отождествляя кватернионы  $\lambda$  и  $h$  с векторами  $\lambda$  и  $h$  соответствующей декартовой системы координат, мы можем в трехмерном векторном пространстве рассматривать функцию  $f(E, \lambda)$ , сопоставляющую вектору  $\lambda$  вектор  $h$  по правилу:

$$f(E, \lambda) = 2p(p, \lambda) \sin^2 \psi - (\lambda \times p) \sin 2\psi + \lambda \cos 2\psi = h,$$

где  $p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$ , фиксированный вектор единичной длины ( $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ ), и угол  $\psi$  — параметры, связанные друг

с другом соотношением  $E = \cos \psi + p \sin \psi$ , с помощью которых задается функция  $f(E, \lambda)$ .

Дадим геометрическую интерпретацию функции  $f(E, \lambda)$ . Для этого найдём проекции векторов  $\lambda$  и  $h$  на орты ортогональной системы координат:  $p, q = \frac{1}{\|\lambda \times p\|} \lambda \times p$ ,

$$r = \frac{1}{\|p \times (\lambda \times p)\|} p \times (\lambda \times p).$$

Начнем с вектора  $\lambda$ . Чтобы найти указанные проекции, достаточно найти скалярные произведения  $(p, \lambda)$ ,  $(q, \lambda)$ ,  $(r, \lambda)$ . Поскольку  $p$  и  $\lambda$  заданные векторы, то будем считать, что  $(p, \lambda)$  — известно. Найдем  $(q, \lambda)$ :

$$(q, \lambda) = \frac{1}{\|\lambda \times p\|} (\lambda \times p, \lambda) = 0, \text{ т. е. } \lambda \text{ лежит в плоскости проходящей}$$

через орты  $p$  и  $r$ . Найдем теперь  $(r, \lambda)$ :

$$(r, \lambda) = \frac{1}{\|p \times (\lambda \times p)\|} (p \times (\lambda \times p), \lambda).$$

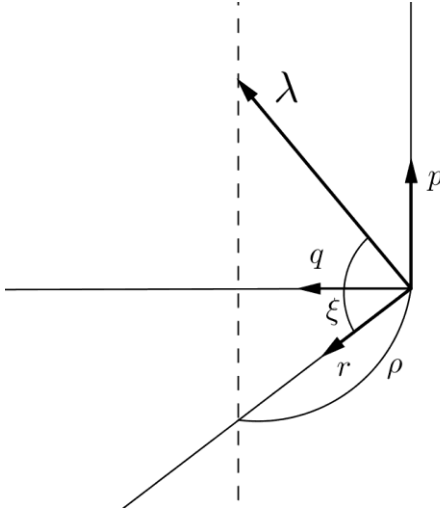
Обозначим проекцию вектора  $\lambda$  на ось с ортом  $r$  через  $\rho$ , т. е. положим  $(r, \lambda) = \rho$ . Очевидно, поскольку  $(q, \lambda) = 0$ , что проекция вектора  $\lambda$  на плоскость с ортами  $q$  и  $r$  будет совпадать с проекцией  $\lambda$  на ось с ортом  $r$ , т. е. будет равна  $\rho$ .

Но эта же проекция будет равна  $\|\lambda \times p\|$ , т. е.  $\|\lambda \times p\| = \rho$ .

(Мы воспользовались здесь определениями скалярного и векторного произведения векторов из аналитической геометрии, откуда следует, что  $(r, \lambda) = \|r\| \cdot \|\lambda\| \cos \xi = \|\lambda\| \cos \xi$

$$\text{и } \|\lambda \times p\| = \|\lambda\| \cdot \|p\| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) = \|\lambda\| \cos \xi, \text{ где } \xi \text{ — угол}$$

между векторами  $r$  и  $\lambda$ ).



**Рисунок 1. Взаимное расположение векторов  $p, q, r, \lambda$**

Найдем теперь скалярные произведения  $(p, h)$ ,  $(q, h)$  и  $(r, h)$ :

$$\begin{aligned}
 (p, h) &= (p, 2p(p, \lambda)\sin^2 \psi - (\lambda \times p)\sin 2\psi + \lambda \cos 2\psi) = \\
 &= 2(p, \lambda)\sin^2 \psi + \\
 &+ (p, \lambda)\cos 2\psi = 2(p, \lambda)\sin^2 \psi + (p, \lambda)(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) = \\
 &= (p, \lambda)(\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = (p, \lambda), \\
 (q, h) &= \frac{1}{\|\lambda \times p\|} (\lambda \times p, h) = \\
 &= \frac{1}{\|\lambda \times p\|} (\lambda \times p, 2p(p, \lambda)\sin^2 \psi - (\lambda \times p)\sin 2\psi + \lambda \cos 2\psi) = \\
 &= -\frac{1}{\|\lambda \times p\|} (\lambda \times p, \lambda \times p)\sin 2\psi = -\|\lambda \times p\|\sin 2\psi = -\rho \sin 2\psi, \\
 (r, h) &= \frac{1}{\|p \times (\lambda \times p)\|} \left( p \times (\lambda \times p), 2p(p, \lambda)\sin^2 \psi - \right. \\
 &\quad \left. - (\lambda \times p)\sin 2\psi + \lambda \cos 2\psi \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\|p \times (\lambda \times p)\|} (p \times (\lambda \times p), \lambda) \cos 2\psi = (r, \lambda) \cos 2\psi = \rho \cos 2\psi$$

Сравним теперь координаты векторов  $\lambda$  и  $h$  в декартовой системе координат с ортами  $p, q, r$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= (p, \lambda)p + (q, \lambda)q + (r, \lambda)r = (p, \lambda)p + (\rho \cdot 0)q + (\rho \cdot 1)r, \\ h &= (p, h)p + (q, h)q + (r, h)r = (p, \lambda)p - (\rho \sin 2\psi)q + (\rho \cos 2\psi)r \end{aligned}$$

Сравнивая координаты двух указанных векторов, мы видим, что вектор  $h$  получен из вектора  $\lambda$  поворотом последнего на угол  $2\psi$  вокруг оси с ортом  $p$ .

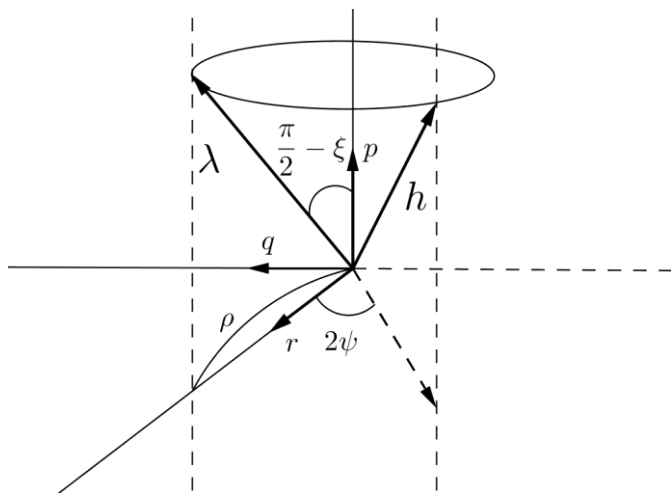


Рисунок 2. Поворот вектора  $\lambda$  на угол  $2\psi$

Отметим, что обычно единичный кватернион  $E = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j + \varepsilon_3 k = \varepsilon_0 + \varepsilon$  (кватернион с  $|E|=1$ ), используемый в преобразованиях  $f(E, \lambda)$ , записывают в виде

$E = \varepsilon_0 + \varepsilon = \cos \frac{\varphi}{2} + p \sin \frac{\varphi}{2}$ , где  $\cos \frac{\varphi}{2}$  и  $p$  определяются

из соотношений:  $\cos \frac{\varphi}{2} = \varepsilon_0$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ),

$$\text{а } p = \frac{1}{|\varepsilon|} \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}} \varepsilon. \text{ Действительно, поскольку}$$

$|\mathbf{E}| = \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1$ , то при этих предположениях имеем:

$$\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

где  $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\varepsilon_0^2} = \varepsilon_0$ , а  $\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}$ .

Итак, преобразование

$$f(\mathbf{E}, \lambda) = \mathbf{E} \cdot \lambda \cdot \bar{\mathbf{E}} = (\varepsilon_0 + \varepsilon) \cdot \lambda \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon), \quad \text{с } |\mathbf{E}| = 1,$$

поворачивает вектор  $\lambda$  вокруг оси определяемой вектором  $\varepsilon$  на угол

$\varphi$ , определяемый из условия:  $\cos \frac{\varphi}{2} = \varepsilon_0$ . Очевидно,

что эта интерпретация сохраняет смысл и для предельных случаев

$\mathbf{E} = 1$  и  $\mathbf{E} = -1$ . В первом случае не происходит ничего:

$f(1, \lambda) = 1 \cdot \lambda \cdot 1 = \lambda$ , поскольку  $\varphi = 0$ . Во втором случае —

$f(-1, \lambda) = (-1) \cdot \lambda \cdot (-1) = \lambda$  происходит поворот на угол  $2\pi$

( $\varphi = 2\pi$ ) безразлично вокруг какой оси ( $\varepsilon = 0$ ).

Предположим, что

$$f(\mathbf{E}, \lambda) = \mathbf{E} \cdot \lambda \cdot \bar{\mathbf{E}} = (\varepsilon_0 + \varepsilon) \cdot \lambda \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon) = h. \text{ Совершим теперь}$$

поворот вектора  $h$  вокруг некоторой оси на некоторый угол, определяемые единственным кватернионом

$$\mathbf{M} = \mu_0 + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k = \mu_0 + \mu \left( |\mathbf{M}| = 1 \right).$$



Преобразование можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f(M, h) &= f(M, f(E, \lambda)) = \\ &= M \cdot (E \cdot \lambda \cdot \bar{E}) \cdot \bar{M} = (M \cdot E) \cdot \lambda \cdot \overline{(M \cdot E)} = f(M \cdot E, \lambda) \end{aligned}$$

То есть, два последовательных поворота вектора  $\lambda$ , определяемых параметрами единичных кватернионов  $E$  и  $M$ , равносильны одному повороту, определяемому параметрами (ось и угол) единичного кватерниона  $M \cdot E$  ( $|M \cdot E| = |M| \cdot |E| = 1$ ).

Операция замены двух последовательных поворотов одним поворотом называется *сложением поворотов*. Понятно, что эту операцию сложения с двух поворотов можно обобщить на произвольное число поворотов.

**Кинематические уравнения движения твердого тела в декартовых координатах.** При изучении вращательного движения твердого тела, как правило, требуется вычислить его ориентацию, то есть положение системы координат связанной с телом относительно какой-либо другой, чаще всего инерциальной системы координат. Это, так сказать, «полная» ориентация. Иногда требуется знать лишь «частичную» ориентацию, например, направление какой-либо оси в теле относительно выбранного направления в пространстве.

Уравнения, позволяющие определить ориентацию тела в пространстве, называют *кинематическими уравнениями*. Существует несколько видов кинематических уравнений. Одно из них получается из следующих естественных соображений. Пусть нам задана декартова система координат  $O\xi\eta\zeta$  в инерциальном пространстве и декартова система координат  $Oxyz$ , связанная с телом. Не нарушая общности рассуждения, будем считать, что центры этих систем координат совпадают. Тогда, как известно, переход от одной системы координат к другой совершается с помощью ортогональной матрицы перехода. То есть, если  $\tilde{R}$  — координатный столбец произвольного вектора в инерциальной системе координат,  $R$  — в системе координат, связанной с телом,  $S$  — матрица перехода от инерциальной системы координат к системе, связанной с телом, то  $R = S\tilde{R}$  (или  $\tilde{R} = S^T R$ ) и  $SS^T = E$ . При этом столбцами матрицы  $S$  служат координатные векторы ортов осей координат инерциальной системы в системе координат, связанной с телом. Поэтому если во все время движения

мы будем знать компоненты матрицы  $S$ , то тем самым мы и будем знать ориентацию тела.

Для составления кинематических уравнений заметим следующее: пусть  $s_i (i = 1, 2, 3)$  орт  $i$ -той оси координат в инерциальном пространстве, а  $\omega$  — вектор угловой скорости тела. Тогда в системе координат  $Oxyz$  для ортов  $s_i$  будем иметь уравнения [3, с. 410]

$$\dot{s}_i = -\omega \times s_i (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

при этом на  $s_i$  и  $\omega$  в равенстве (1) можно смотреть как на координатные векторы в системе координат связанной с телом.

Итак  $s_i$  — есть не что иное, как столбцы матрицы  $S$ , тем самым (1) есть система дифференциальных уравнений для определения элементов матрицы  $S$  как функций времени. Система уравнений (1) может быть записана в матричном виде

$$\dot{S} = -\omega \times S \quad (2)$$

(под векторным произведением вектора  $\omega$  на матрицу  $S$  понимается векторное произведение указанного вектора  $\omega$  на каждый столбец матрицы  $S$ ).

Если ввести в рассмотрение кососимметричную матрицу  $\Omega$ , построенную из координат  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  вектора  $\omega$  в системе координат, связанной с телом следующим образом:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

то матричные соотношения (2) можно записать так:

$$\dot{S} = -\Omega S \quad (3)$$

Полученная система кинематических уравнений в форме (1) (или, что то же самое, в форме (2) или (3)) не всегда удобна, так как она имеет размерность равную девяти. С другой стороны эти девять величин связаны шестью независимыми соотношениями  $SS^T = E$ . Следовательно, положение тела определяется всего тремя независимыми параметрами. Поэтому представляют интерес системы кинематических, независимых уравнений, которые имеют меньшую размерность. Наименьшая размерность равна трем и связана она, например, с углами Эйлера. Кинематические уравнения базирующиеся на использовании углов Эйлера сугубо нелинейные. Поэтому представляют интерес уравнения обладающие свойствами уравнения (3), но имеющие меньшую размерность.

**Кинематические уравнения в параметрах Родрига–Гамильтона.** Известно, что для твердого тела, имеющего неподвижную точку, переход от одного положения к другому можно совершить с помощью поворота вокруг некоторой оси на вполне определенный угол, скажем  $\varphi$ , в одном направлении, и на угол  $2\pi - \varphi$  в противоположном направлении вращения. Достигают ясности в этом вопросе, как известно, выбором направляющего вектора оси вращения  $p$  и договоренности о выборе положительного направления вращения, то есть вращения против часовой стрелки, если смотреть с конца направляющего вектора. При указанных условиях задание орта  $p$  и угла поворота  $\varphi$  однозначно определяет положение тела.

В теории конечных поворотов и в механике принято вместо  $p$  и  $\varphi$  рассматривать следующие величины:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \text{ и } \lambda = p \sin \frac{\varphi}{2}, \varphi \in [0, 2\pi].$$

$\lambda_0$  и координаты  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  вектора  $\lambda$  в какой либо правой декартовой системе координат называют **параметрами Родрига–Гамильтона** [8, с. 104]. Параметры связаны очевидным соотношением:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \quad (4)$$

и, по сути, являются компонентами «единичного кватерниона»

$$E = \lambda_0 + \lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + p \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Орт оси поворота  $p$  и угол поворота  $\varphi$  выражаются через эти параметры следующим образом:

$$\varphi = 2 \arccos \lambda_0$$

и если  $\lambda_0 \neq \pm 1$ , то

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_0^2}} \lambda.$$

Если  $\lambda_0 \neq \pm 1$ , то это соответствует случаю поворота вокруг произвольной оси на углы равные нулю, либо кратные  $2\pi$  радиан. (В этом случае из соотношения (4) следует, что  $\lambda = 0$  и что ось поворота не определена; или начальное и конечное положения тела совпадают.)

Таким образом, параметры Родрига-Гамильтона однозначно определяют конечное положение тела.

**Замечание 1:** Обратим внимание, однако, на следующее: если конечное положение характеризуется значениями параметров Родрига-Гамильтона

$$\lambda_0 = \alpha_0, \lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \lambda_3 = \alpha_3, \quad (5)$$

то тоже положение тела характеризуется и значениями параметров

$$\lambda_0 = -\alpha_0, \lambda_1 = -\alpha_1, \lambda_2 = -\alpha_2, \lambda_3 = -\alpha_3. \quad (6)$$

Действительно, пусть положение тела характеризуется значениями параметров (5), которым соответствует орт  $p$  и угол

поворота  $\varphi$ . Но то же положение характеризуется также ортом  $-p$  и углом  $2\pi - \varphi$  и, следовательно, учитывая что

$$\cos \frac{2\pi - \varphi}{2} = -\cos \frac{\varphi}{2}, \quad \sin \frac{2\pi - \varphi}{2} = \sin \frac{\varphi}{2},$$

значениями параметров (6).

Рассмотрим вновь два положения твердого тела, точнее два положения правой декартовой системы координат, связанной с ним. Два положения системы координат можно рассматривать как две системы координат  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$ . Пусть  $S$  матрица перехода от системы  $O\xi\eta\zeta$  к  $Oxyz$ . Матрица  $S$  полностью определяет как ось поворота, так и угол поворота и, следовательно, параметры Родрига-Гамильтона.

Чтобы яснее представлять как ось и угол определяются через элементы матрицы  $S$ , напомним некоторые ее свойства:

Матрица  $S$  — ортогональная матрица, то есть  $SS^T = E$ . Далее, так как рассматриваемая декартова система координат правая, то  $S_1 \times S_2 = S_3$  и  $(S_1 \times S_2, S_3) = 1$ , откуда следует, что  $\det S = 1$ .

Из ортогональности и вещественности матрицы  $S$  следует, что она имеет характеристические корни (числа) по модулю равные единице, и если имеет комплексное характеристическое число, то имеет и комплексное сопряженное к нему. Матрица  $S$  — матрица нечетного (третьего) порядка и, следовательно, имеет, по крайней мере, одно вещественное характеристическое число. Из того, что определитель матрицы  $S$  равен произведению его характеристических чисел, и равен единице, следует, что, по крайней мере, одно характеристическое число матрицы  $S$  равно единице. Отсюда следует, что характеристические числа  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  матрицы  $S$  можно представить в виде:

$$\tau_1 = 1, \tau_2 = \cos \varphi + i \sin \varphi, \tau_3 = \cos \varphi - i \sin \varphi, i^2 = -1. \quad (7)$$

Из теории канонической структуры нормальных операторов и их матриц следует, что существуют такие ненулевые вещественные вектора  $a, b$  и  $c$ , что

$$Sa = a, S(b + ci) = (\cos\varphi + i \sin\varphi)(b + ci), \quad (8)$$

Причем

$$\|b\| = \|c\|, (b, c) = (a, b) = (a, c) = 0. \quad (9)$$

Из (8) и (9) видно, что, не нарушая общности, можно считать вектора  $a$ ,  $b$  и  $c$  оортами правой декартовой системы координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ . (Если это не так, то система  $a$ ,  $c$ ,  $b$  будет правой, либо, заменив вектор  $a$  на  $(-a)$ , что не отразится на равенствах (8), получим правую тройку  $(-a), b, c$ .)

Построим матрицу  $T$  из векторов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  так, что  $T = (a, b, c)$ . Матрица  $T$  будет матрицей перехода от системы координат  $O\xi'\eta'\zeta'$  к  $O\xi\eta\zeta$ .

Преобразование, определяемое матрицей  $S$ , переводит систему  $O\xi'\eta'\zeta'$  в новое положение, скажем,  $Ox'y'z'$ . Очевидно, что  $T$  будет также матрицей перехода от системы  $Ox'y'z'$  к  $Oxyz$ .

Матрица перехода  $\tilde{S}$  от системы  $O\xi'\eta'\zeta'$  к  $Ox'y'z'$  будет задавать то же преобразование, что и матрица  $S$ . Рассмотрим цепочку переходов

$$Ox'y'z' \xleftarrow{T^T} Oxyz \xleftarrow{S} O\xi\eta\zeta \xleftarrow{T} O\xi'\eta'\zeta',$$

видим, что  $\tilde{S} = T^T ST$ . Найдем явный вид матрицы  $\tilde{S}$ , для чего выпишем вначале следствие из формулы (8):

$$\begin{cases} Sb = b \cos\varphi - c \sin\varphi \\ Sc = b \sin\varphi + c \cos\varphi \end{cases} \quad (8')$$

Затем вычислим произведение  $ST$ , используя формулы (8) и (8'), получим

$$\begin{aligned}
ST &= S(a, b, c) = (Sa, Sb, Sc) = \\
&= (a, b \cos \varphi - c \sin \varphi, b \sin \varphi + c \cos \varphi) = \\
&= (a, b, c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Теперь подставляя произведение  $ST$  в выражение  $\tilde{S} = T^T ST$

$$\tilde{S} = T^T ST = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Из вида матрицы  $\tilde{S}$  следует, что она задает преобразование поворота на угол  $\varphi$  вокруг первой координатной оси, то есть вокруг оси с ортом  $a$ . (Если  $a, c, b$  образуют правую тройку векторов, то берем  $T = (a, c, b)$  и получаем  $\tilde{S}$ , которая будет транспонированной к выписанной выше, и рассматриваемое преобразование будет поворотом вокруг оси с ортом  $a$  на угол  $2\pi - \varphi$ , или на угол  $\varphi$  вокруг оси с ортом  $(-a)$ ). Следовательно, ось поворота задается собственным вектором матрицы  $S$  отвечающим собственному числу равному единице.

Укажем простые способы нахождения собственного вектора  $d$  матрицы  $S$ , соответствующего собственному числу равному единице ( $d$  — обязательно нормированный).

Из равенств  $S^T S = E$  и  $Sd = d$  следует, что  $S^T d = d$ . Из равенств же  $Sd = d$  и  $S^T d = d$  следует, что  $d$  является решением системы

$$(S^T - S)d = 0 \quad (11)$$

с кососимметричной матрицей коэффициентов равной  $S^T - S$ .

Если  $S^T - S \neq 0$  (то есть  $S$  несимметричная матрица), то ненулевое решение системы (11) будет собственным вектором матрицы  $S$ , соответствующим собственному числу, равному единице.

Действительно, так как ортогональная несимметричная матрица обязательно имеет комплексные характеристические корни, то собственные вектора матриц  $S$  и  $S^2$ , отвечающих собственному числу равному единице, образуют одномерные подпространства, которые, очевидно, совпадают.

Домножив (11) слева на  $S$ , убедимся, что ненулевое решение этой системы является собственным вектором матрицы  $S^2$  и, следовательно, матрицы  $S$ , отвечающим собственному числу равному единице.

Для отыскания же решения системы (11) заметим, что если дана ненулевая кососимметрическая матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

то вектор  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  будет собственным вектором этой матрицы,

отвечающим нулевому собственному числу.

Таким образом, если  $S$  — несимметричная матрица, то в качестве вектора  $d$  можно взять вектор

$$d = \begin{pmatrix} s_{23} - s_{32} \\ s_{31} - s_{13} \\ s_{12} - s_{21} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Если же  $S$  симметричная, то она либо имеет собственные числа равные  $(-1)$ , и тогда их два (определитель матрицы  $S$  равен единице), либо не имеет, и тогда  $S = E$ , в любом случае  $S^2 = E$ .

В случае симметрической матрицы  $S$  не совпадающей с  $E$ , у матрицы  $S$  только три элемента отличны от нуля, которые равны либо  $+1$ , либо  $-1$ . При этом есть как  $+1$ , так и минус 1, поскольку



$S \neq E$  и  $\det S = 1$ . В этом случае, для любой конкретной матрицы  $S$ , вектор  $d$  находится весьма просто.

Заметим, что преобразование с симметричной матрицей  $S$ , имеющей собственные числа равные  $(-1)$ , будет вращением на угол  $\pi$  или  $-\pi$  вокруг собственного вектора соответствующего собственному числу равному единице.

Выразим теперь параметры Родрига-Гамильтона через элементы матрицы  $S$ . Для этого заметим, что поворот тела на один и тот же угол, вокруг одной и той же оси, в одном и том же направлении описывают различные наборы параметров Родрига-Гамильтона, в зависимости от выбора системы координат, относительно которой определяются координаты орта оси поворота. Так, если начальное и конечное положение тела описываются системами координат  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$ , то параметры Родрига-Гамильтона будут следующие:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \lambda_1 = a_1 \sin \frac{\varphi}{2}, \lambda_2 = a_2 \sin \frac{\varphi}{2}, \lambda_3 = a_3 \sin \frac{\varphi}{2},$$

где  $a_1, a_2, a_3$  — координаты орта оси поворота в указанных системах.

Если же начальное и конечное положение тела описывается системами  $O\xi'\eta'\zeta'$  и  $Ox'y'z'$ , то параметры примут следующие значения:

$$\tilde{\lambda}_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \tilde{\lambda}_1 = \sin \frac{\varphi}{2}, \tilde{\lambda}_2 = 0, \tilde{\lambda}_3 = 0.$$

Здесь орт оси поворота  $e'_1$  в указанных системах будет такой:  $e'_1 = (1, 0, 0)$ .

Вектора  $\tilde{\lambda} = e_1 \sin \frac{\varphi}{2}$  и  $\lambda = a \sin \frac{\varphi}{2}$  связаны очевидным соотношением:  $\tilde{\lambda} = T^T \lambda$ , поскольку  $\lambda$  — координатный вектор в системе координат  $O\xi\eta\zeta$ , а  $\tilde{\lambda}$  — координатный вектор в системе координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ . Аналогичным соотношением и по тем же

соображениям связаны векторы  $d$  и  $\tilde{d}$ , т. е.  $\tilde{d} = T^T d$ , где  $\tilde{d}$  построен по матрице  $\tilde{S}$  таким же образом, как  $d$  по матрице  $S$ .

Используя (10) и (12) получаем, что

$$\tilde{d} = \begin{pmatrix} 2 \sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\lambda_0 \tilde{\lambda}.$$

Отсюда уже легко получается

$$4\lambda_0 \lambda = d \quad (13)$$

Из известного факта теории матриц, что сумма собственных чисел матрицы  $S$  равна  $\text{spur} S = \sum s_{ii}$  следует, что

$$\sum s_{ii} = 1 + 2 \cos \varphi, \text{ или } 4\lambda_0^2 = \sum s_{ii} + 1. \quad (14)$$

Формулы (13) и (14), расписанные по координатам, и дают выражение параметров Родрига-Гамильтона через элементы матрицы  $S$  в случае, если она несимметричная.

$$\begin{cases} 4\lambda_0^2 = \sum s_{ii} + 1 \\ 4\lambda_0 \lambda_1 = s_{23} - s_{32} \\ 4\lambda_0 \lambda_2 = s_{31} - s_{13} \\ 4\lambda_0 \lambda_3 = s_{12} - s_{21} \end{cases} \quad (15)$$

**Замечание 2.** Формулы (15) справедливы и в том случае, когда  $S$  симметричная матрица. Однако, в этом случае из них нельзя получить выражений для  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , если  $S$  не совпадает с  $E$ .

**Замечание 3.** Как и в замечании 1, при выражении  $\lambda_0$  из (14) знак перед квадратным корнем можно брать любой.

Если матрица  $S$  симметричная и не совпадает с единичной, то выражение для параметров Родрига-Гамильтона имеет следующий вид

$$\lambda_0 = 0, \lambda = d, \quad (16)$$

где  $d$  нормированный собственный вектор, отвечающий собственному числу равному единице.

Если  $S = E$ , то эти параметры следующие:

$$\lambda_0 = \pm 1, \lambda = 0. \quad (17)$$

Найдем теперь выражения элементов матрицы  $S$  через параметры Родрига-Гамильтона. Для этого кроме соотношений (15), которых явно недостаточно, рассмотрим так же при  $\lambda \neq 0$  следующие соотношения:  $S\lambda = \lambda$  или вытекающие из него:

$$(s_i, \lambda) = \lambda_i (i = 1, 2, 3), \quad (18)$$

$$(\lambda \times e_i, \lambda \times s_i) = \cos \varphi (1 - \lambda_0^2 - \lambda_i^2), (i = 1, 2, 3) \quad (19)$$

(соотношения (18) и (19) обращаются при  $\lambda = 0$  в тождество).

Соотношение (19) получено из наглядного геометрического соображения, что вектор  $\lambda \times s_i$ , ортогональный к вектору  $\lambda$  и  $i$ -тому орту системы координат  $O\xi\eta\zeta$  при повороте вокруг оси с направляющим вектором  $\lambda$  на угол  $\varphi$  перейдет в вектор ортогональный к  $\lambda$  и  $i$ -тому орту системы  $Oxyz$ . Слева в (19) стоит скалярное произведение двух векторов одинаковой длины (один получен из другого поворотом вокруг заданной оси). Как известно скалярное произведение векторов равно произведению длин этих векторов (в нашем случае квадрату длины) на косинус угла между этими векторами (выражение справа). Осталось убедиться, что квадрат длины вектора  $\lambda \times e_i$  т. е. выражение  $(\lambda \times e_i, \lambda \times e_i)$  будет равно  $1 - \lambda_0^2 - \lambda_i^2$ . Действительно,

$$\begin{aligned}
 (\lambda \times e_i, \lambda \times e_i) &= (\lambda, \lambda(e_i, e_i) - e_i(\lambda, e_i)) = \\
 &= (\lambda, \lambda) - \lambda_i^2 = 1 - \lambda_0^2 - \lambda_i^2
 \end{aligned}$$

Теперь из соотношений (18) и (19) легко находятся  $s_{11}, s_{22}, s_{33}$ . Действительно, (19) в развернутом виде дает:

$$s_{1i}\lambda_1 + s_{2i}\lambda_2 + s_{3i}\lambda_3 = \lambda_i \quad (19')$$

Так как  $\cos \varphi = 2\cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = 2\lambda_0^2 - 1$  и  $(\lambda, \lambda) = 1 - \lambda_0^2$ , то (19) в развернутом виде дает: левая часть –

$$\begin{aligned}
 (\lambda \times e_i, \lambda \times s_i) &= (\lambda, s_i \times (\lambda \times e_i)) = (\lambda, \lambda(s_i, e_i) - e_i(s_i, \lambda)) = \\
 &= (\lambda, \lambda)(s_i, e_i) - (\lambda, e_i)(s_i, \lambda) = (\lambda, \lambda)s_{ii} - \lambda_i^2
 \end{aligned}$$

правая часть —  $\cos \varphi(1 - \lambda_0^2 - \lambda_i^2) = (2\lambda_0^2 - 1)(1 - \lambda_0^2 - \lambda_i^2)$ . Подставляя их и приравнявая, получаем:

$$(1 - \lambda_0^2)s_{ii} - \lambda_i^2 = (2\lambda_0^2 - 1)(1 - \lambda_0^2 - \lambda_i^2) \quad (19'')$$

Из (19'') получаем:

$$s_{ii} = \frac{(2\lambda_0^2 - 1)(1 - \lambda_0^2 - \lambda_i^2) + \lambda_i^2}{1 - \lambda_0^2} = 2\lambda_0^2 + 2\lambda_i^2 - 1$$

Полагая  $i = 1, 2, 3$  распишем последние соотношения подробно:

$$s_{11} = 2\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - 1$$

$$s_{22} = 2\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - 1$$

$$s_{33} = 2\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - 1$$

Для определения остальных элементов матрицы  $S$  поступим следующим образом. Разрешим соотношение  $(S^T + S)\lambda = 2\lambda$  относительно  $s_{ij} + s_{ji}$ ,  $i \neq j; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ . Учитывая выражения для  $s_{ii}$ , получим:

$$\begin{cases} s_{12} + s_{21} = 4\lambda_1\lambda_2 \\ s_{23} + s_{32} = 4\lambda_2\lambda_3 \\ s_{31} + s_{13} = 4\lambda_1\lambda_3 \end{cases} \quad (20)$$

Теперь из (15) и (20) совсем просто получить выражения для  $s_{ij}$ ,  $i \neq j; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ .

Итак

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_0^2 + 2\lambda_1^2 - 1 & 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2 \\ 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 - 1 & 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_1 \\ 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_2 & 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1 & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_3^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Соотношения (3), (4), (15), (21) позволяют, наконец, получить искомые кинематические уравнения в параметрах Родрига-Гамильтона. Для этого продифференцируем (15) в силу системы (3), затем исключим с помощью (15) и (21) элементы  $s_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) в полученных соотношениях. В итоге получим дифференциальные уравнения, разрешив которые относительно  $\dot{\lambda}_0, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3$ , приведем их к искомым кинематическим уравнениям.

Итак, берем первое уравнение системы (15), получим:

$$\begin{aligned} 8\lambda_0\dot{\lambda}_0 &= \sum \dot{s}_{ii} = -\left( \begin{aligned} &(-s_{21}\omega_3 + s_{31}\omega_2) + \\ &+(s_{12}\omega_3 - s_{32}\omega_1) + (-s_{31}\omega_2 + s_{23}\omega_1) \end{aligned} \right) = \\ &= -(\omega_3 4\lambda_0\lambda_3 + \omega_2 4\lambda_0\lambda_2 + \omega_1 4\lambda_0\lambda_1) \end{aligned}$$

Откуда

$$\dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2}(\omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2 + \omega_3\lambda_3) \quad (22)$$

Далее берем второе уравнение системы (15), имеем:

$$4\lambda_0\dot{\lambda}_1 + 4\lambda_1\dot{\lambda}_0 = \dot{s}_{23} - \dot{s}_{32} = -s_{13}\omega_3 + s_{33}\omega_1 - s_{12}\omega_2 + s_{22}\omega_1$$

Используя (21) и (22) получим далее

$$\begin{aligned} 4\lambda_0\dot{\lambda}_1 &= 2\omega_1\lambda_1^2 + 2\omega_2\lambda_1\lambda_2 + 2\omega_3\lambda_1\lambda_3 + \\ &+ \omega_3(2\lambda_0\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3) + \omega_2(-2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_0\lambda_3) + \\ &+ \omega_1(4\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 - 2) \end{aligned}$$

Откуда

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2}(\omega_1\lambda_0 - \omega_2\lambda_3 + \omega_3\lambda_2) \quad (23)$$

Совершенно аналогично получаем:

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2}(\omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1) \quad (24)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \frac{1}{2}(\omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2) \quad (25)$$

Соотношения (22), (23), (24), (25) и есть искомые кинематические уравнения. Используя векторную форму записи, эти соотношения записываются более компактно:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2}(\omega, \lambda) \\ \dot{\lambda} = -\frac{1}{2}(\omega\lambda_0 - \omega \times \lambda) \end{cases} \quad (26)$$

Уравнения (26) задают кинематику движения системы  $Oxyz$  относительно  $O\xi\eta\zeta$  в координатах системы  $Oxyz$ .

Поменяв ролями системы  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$ , мы получим точно такие же по форме уравнения движения системы  $O\xi\eta\zeta$  относительно  $Oxyz$  в координатах системы  $O\xi\eta\zeta$ . Пусть  $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}$  — параметры Родрига-Гамильтона, характеризующие переход системы  $Oxyz$  в  $O\xi\eta\zeta$ , и  $\tilde{\omega}$  — координатный вектор угловой скорости вращения  $O\xi\eta\zeta$  относительно  $Oxyz$  в системе  $O\xi\eta\zeta$ . Тогда искомые уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\lambda}}_0 = -\frac{1}{2}(\tilde{\omega}, \tilde{\lambda}) \\ \dot{\tilde{\lambda}} = -\frac{1}{2}(\tilde{\omega}\tilde{\lambda}_0 - \tilde{\omega} \times \tilde{\lambda}) \end{cases}$$

Если учесть, что  $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0, \tilde{\lambda} = -\lambda, \tilde{\omega} = -S^T \omega$ , ( $\lambda_0, \lambda, \omega$  — те же, что в уравнении (26)) и ввести обозначение  $S^T \omega = \tilde{\tilde{\omega}}$ , то есть  $\tilde{\tilde{\omega}} = -\tilde{\omega}$ , то в этих обозначениях получим:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2}(\tilde{\tilde{\omega}}, \lambda) \\ \dot{\lambda} = -\frac{1}{2}(\tilde{\tilde{\omega}}\lambda_0 - \tilde{\tilde{\omega}} \times \lambda) \end{cases} \quad (27)$$

$\tilde{\omega}$ -координатный в системе  $O\xi\eta\zeta$  вектор, соответствующий вектору угловой скорости системы  $Oxyz$  относительно  $O\xi\eta\zeta$ .

Системы (26) и (27) в расписанном по координатам виде обычно приводятся во многих руководствах по аналитической механике [4, с. 618—619] (см. также [1]). Некоторое преимущество кинематических уравнений в форме (26) по сравнению с (3) очевидно, то есть употребление параметров Родрига-Гамильтона вполне оправдано. Покажем также, что знание параметров Родрига-Гамильтона, характеризующих переход системы  $O\xi\eta\zeta$  в  $Oxyz$  позволяет также просто определять конечное положение любого вектора, как и значение матрицы перехода от  $O\xi\eta\zeta$  в  $Oxyz$ . Кроме того, если мы совершаем переход системы  $O\xi\eta\zeta$  в  $Oxyz$  через промежуточную систему  $Ox'y'z'$ , то есть

$$Oxyz \xleftarrow{S_2} Ox'y'z' \xleftarrow{S_1} O\xi\eta\zeta \quad (28)$$

где  $S_1, S_2$  — соответствующие матрицы перехода, то знание параметров  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  перехода  $O\xi\eta\zeta$  в  $Ox'y'z'$  и  $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$  перехода  $Ox'y'z'$  в  $Oxyz$ , позволяет так же просто, если еще не проще, определить параметры  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  перехода  $O\xi\eta\zeta$  в  $Oxyz$  как и матрицу перехода  $S$  от  $O\xi\eta\zeta$  к  $Oxyz$  через  $S_1, S_2$ .

Начнем с последнего утверждения.

Из (28) видно, что:

$$S = S_2 \cdot S_1 \quad (29)$$

Выразим элементы матриц  $S_1, S_2$  через соответствующие параметры по формулам (21). Тогда из (29) видно, что элементы матрицы  $S$  будут алгебраическими выражениями от  $\mu_i, \nu_j (i, j = 0, 1, 2, 3)$ . Эти выражения, после упрощений на основе соотношения (4), подставим в (15). Тогда для параметров  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  получим следующие решения:



$$\begin{cases} \lambda_0 = \mu_0\nu_0 - \mu_1\nu_1 - \mu_2\nu_2 - \mu_3\nu_3 \\ \lambda_1 = \mu_0\nu_1 + \mu_1\nu_0 + \mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2 \\ \lambda_2 = \mu_0\nu_2 + \mu_2\nu_0 - \mu_1\nu_3 + \mu_3\nu_1 \\ \lambda_3 = \mu_0\nu_3 + \mu_3\nu_0 + \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 \end{cases} \quad (30)$$

Другое решение (см. замечание 3) получится, если все правые части системы (30) взять с обратным знаком. Соотношения (30) в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda_0 = \mu_0\nu_0 - (\mu, \nu) \\ \lambda = \mu_0\nu + \nu_0\mu + \mu \times \nu \end{cases} \quad (31)$$

Решение (30) (или (31), что, то же самое), а так же уравнения (26), (27) можно записать в еще более простом виде, если использовать кватернионы.

Вернемся к формулам (30), предварительно сопоставив набору параметров  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  кватернион

$M = \mu_0 + \mu_1i + \mu_2j + \mu_3k = \mu_0 + \mu$ , набору параметров

$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$  кватернион  $N = \nu_0 + \nu$  и параметрам  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  —

кватернион  $\Lambda = \lambda_0 + \lambda$ . Из формул (30) или (31) непосредственно следует, что

$$\Lambda = M \cdot N.$$

Вернемся к кинематическим уравнениям (26) и дополним их динамическими уравнениями вращательного движения твердого тела в системе координат, связанной с телом, и центр которой находится в центре инерции тела [3, с. 410]

$$\Theta \dot{\omega} + \omega \times \Theta \omega = M, \quad (32)$$

где:  $\Theta$  — тензор инерции твердого тела,  
 $\omega$  — угловая скорость,

$M$  — момент внешних сил приложенных к телу. Объединяя (32) и (26) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \Theta \dot{\omega} + \omega \times \Theta \omega = M \\ \dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2}(\omega, \lambda) \\ \dot{\lambda} = -\frac{1}{2}(\omega \lambda_0 - \omega \times \lambda) \end{cases} \quad (33)$$

полностью описывающую вращательное движение твердого тела. Система уравнений (33) удобна в том смысле, что позволяет строить для неё достаточно простые функции Ляпунова. Момент  $M$  в уравнениях (33), рассматриваемый как управляющий, можно выбирать в силу функций Ляпунова таким образом, чтобы он решал, например, задачу полной ориентации твердого тела (см., например [10]).

**Заключение.** Использование кватернионов в задачах ориентации и управления вращательным движением твердого тела, позволяет усовершенствовать результаты работ [2, 5, 6] на базе уравнений (26).

В последнее время кватернионы находят все большее применение в компьютерных технологиях (см. например [7, 9, 11]).

### Список литературы:

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. — 320 с.
2. Ермолин В.С., Жабко А.П., Камачкин А.М., Овсянников Д.А. Школа В.И. Зубова по теории устойчивости и теории динамических и механических систем // Труды СВМО. — 2005. — Т. 7. — № 1. — С. 426—432.
3. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. — 496 с.
4. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. — 672 с.
5. Камачкин А.М. Методы оценки точности позиционирования грузовой платформы при ограниченных возмущениях // Автоматизация морских судов и технологических процессов в судостроении. ВНТО им. акад. А.Н. Крылова. Л.: Судостроение. — 1989. — Вып. 478. — С. 15—22.
6. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Метод декомпозиции в многомерных нелинейных динамических системах // Вестник ВГУ. Сер.: Системный анализ и информационные технологии. — 2012. — Вып. 1. — С. 47—55.

7. Кватернионы в геометрии, механике, релятивистской физике, теории поля // fizteh.ru: информационный портал [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: <http://www.fizteh.ru/02-07-90327/index/qwat/> (дата обращения 25.01.2014).
8. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. — 826 с.
9. Побегайло А.П. Применение кватернионов в компьютерной графике. Минск: БГУ, 2010. — 216 с.
10. Хитров Г.М. Применение второго метода Ляпунова к решению задачи ориентации твердого тела // Дифференциальные и интегральные уравнения: межвуз. сб., Горький: ГГУ, 1981. — С. 152—155.
11. Цисарж В.В., Марусик Р.И. Математические методы компьютерной графики: учебное пособие. К.: Факт, 2004. — 466 с.

### **3.4. ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ**

#### **ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ДОНОРОВ НА ОБРАЗОВАНИЕ И РАЗМЕР ПОР В НАНОПОРИСТОМ КРЕМНИИ**

***Абрамова Елена Николаевна***

*магистр Московского государственного университета  
тонких химических технологий,  
РФ, г. Москва*

***Хорт Андрей Михайлович***

*канд. хим. наук, старший научный сотрудник кафедры физики  
и химии твердого тела Московского государственного университета  
тонких химических технологий,  
РФ, г. Москва*

***Яковенко Анатолий Георгиевич***

*д-р тех. наук,  
заведующий кафедрой физики и химии твердого тела,  
профессор Московского университета тонких химических технологий,  
РФ, г. Москва  
E-mail: [overmind11@rambler.ru](mailto:overmind11@rambler.ru)*

# INFLUENCE CONCENTRATION OF DONORS FOR FORMATION AND SIZE PORES IN NANOPOROUS SILICON

*Abramova Elena Nikolaevna*

*master of Science of Moscow state university of fine chemical technologies,  
Russia, Moscow*

*Hort Andrey Michailovich*

*the department of solid-state physics and chemistry of Moscow state  
university of fine chemical technologies, Doctor Ph., Scientific worker,  
Russia, Moscow*

*Ykovenko Anatoly Georgievich*

*the department of solid-state physics and chemistry of Moscow state  
university of fine chemical technologies, Prof., Head of department,  
Russia, Moscow*

## АННОТАЦИЯ

Исследовано влияние концентрации мелких доноров на процесс образования слоев нанопористого кремния (НК). Установлено, что в определенном интервале концентраций, она существенно влияет на образование и размер нанопор.

## ABSTRACT

The influence of the concentration of the shallow donors on the process of obtaining of nanoporous layers in silicon was investigated. Important influences of donors at the process of obtaining and size of pours were determined.

**Ключевые слова:** нанопористый кремний; нанопоры; мелкие доноры; концентрация; размер.

**Keywords:** nanoporous silicon; nanopores; shallow donors; concentration; size.

Вопрос зарождения пор в ходе электролитического травления кремния и факторов, влияющих на этот процесс, является одним из важнейших в общей проблеме получения НК. Способы решения этой проблемы у различных авторов существенно отличаются друг от друга [1—7].

Наибольшее распространение получили предпосылки, в соответствии с которыми считается, что центры зарождения пор

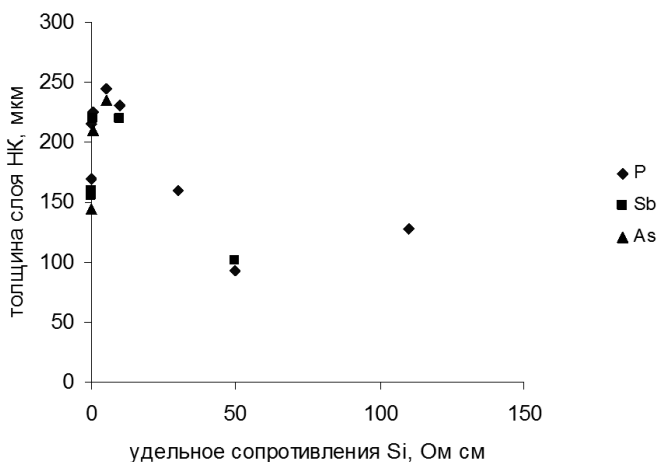
возникают случайно, без видимой закономерности. Это относится как к механизму образования НК с формированием на поверхности слоя аморфного кремния [7], так и при пассивации поверхности кремния слоем атомов водорода [5, 6]. С другой точки зрения природа точек зарождения пор связана с различными поверхностными центрами [2, 4]. Наиболее часто это связывается с различными поверхностными дефектами, атомами примесей [4, 1] и вакансионными центрами [3]. Однако работы, систематизирующие влияние мелких доноров (фосфор, сурьма, мышьяк) на образование НК и их влияние на параметры слоев, практически отсутствуют.

Целью данной работы являлось исследование влияния мелких доноров на процесс зарождения, формирования и размер нанопор в ходе электролитического травления кремния.

В работе использовался бездислокационный кремний n-типа марок КЭФ, КЭС, КЭМ с удельным сопротивлением в интервале  $(0,01 \div 110)$  Ом см, что соответствует интервалу концентраций примесей  $(4-5) \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  —  $(6-7) \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

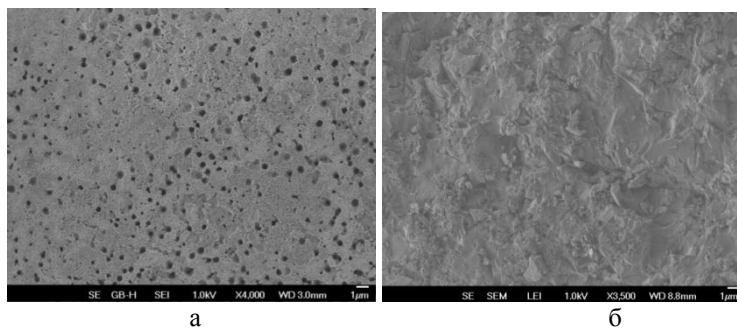
Анодное травление проводилось в гальваностатическом режиме. Ток травления составлял  $(5 \div 50)$  мА. Время травления составляло  $\tau \leq 60$  минут. Травители представляли собой водные растворы фтористоводородной кислоты в соотношении 1:2. В качестве катода использовалась платиновая пластина. Чтобы исключить возможное влияние различных поверхностных центров, возникающих в процессе подготовки пластины, исследуемый кремний первоначально подвергался электрополирующему травлению. Толщина образующихся при травлении слоев определялась с помощью оптического микроскопа ПОЛАМ Р-315 с точностью  $\Delta l_{\text{сл.}} = 0,1$  мкм, а данные о размерах пор были получены с помощью растровой электронной микроскопии на электронном микроскопе «JEOL». Удельное сопротивление кремния контролировалось с помощью стандартного 4-х зондового метода.

На рисунке 1 представлена типичная зависимость толщины слоя НК от удельного сопротивления. Из рисунка видно, что при изменении удельного сопротивления кремния от 0,01 до 5 Ом см, наблюдается рост толщины слоя НК, достигающий максимума 250—270 мкм в области  $\sim 5$  Ом см. Далее следует ее уменьшение в 1,5—2 раза (100—125 мкм), и сохранение этих значений толщины слоя практически до значений удельного сопротивления беспримесного кремния. Тип примеси — (фосфор, мышьяк или сурьма), ток и время травления не оказывали влияние на характер получаемых зависимостей.



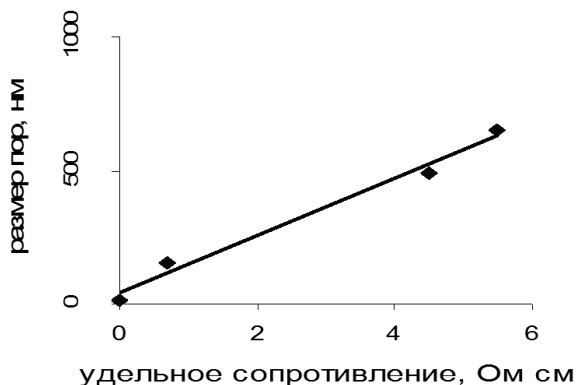
**Рисунок 1. Изменение толщины слоя НК в зависимости от удельного сопротивления кремния типа КЭФ. Ток травления — 50 мА, время травления 60 минут**

Структуры слоев НК (рисунок 2), полученных на материалах с удельным сопротивлением (0,01—5) Ом см, представляют собой отдельные четко обозначенные нанопоры (рисунок 2а), а для более высокоомных образцов пористые слои представляли собой аморфную массу (рисунок 2б).



**Рисунок 2. Структура поверхности слоев НК, полученных на кремнии КЭФ 5 Ом см (а) ( $\times 4000$ ) и КЭФ 110 Ом см (б) ( $\times 3500$ ). Ток травления  $I=25$  мА, время травления  $\tau=25$  минут**

Размер пор, полученных на материале с сопротивлением (0,01—5) Ом см, увеличивается по мере уменьшения содержания примеси (рисунок 3).



**Рисунок 3. Зависимость размера пор от удельного сопротивления исходного кремния n-типа (КЭФ). Ток травления — 25 мА, время травления 30 минут**

Результаты проведенных экспериментов свидетельствуют, что пористый слой с размером пор более 10 нм активно формируется на кремнии n-типа проводимости с удельным сопротивлением (0,01 ÷ 5) Ом см в процессе электролитического травления. При этом мелкая донорная примесь активно влияет на этот процесс. С увеличением удельного сопротивления в интервале (0,01—5) Ом см размер пор и толщина слоев увеличиваются. При этом структура слоев НК практически во всем выбранном интервале сопротивлений представляет собой отдельные, четко обозначенные нанопоры. Тип легирующей примеси не оказывает влияния на процесс зарождения и размер пор.

Полученные результаты свидетельствуют, что содержание мелкой донорной примеси в кремнии с удельным сопротивлением (0,01 ÷ 5) Ом см является одним из факторов, существенно влияющих на формирование слоя НК. Поэтому, изменение концентрации мелких доноров может служить одним из способов формирования слоев НК с заданными значениями толщины слоя и размерами пор и таким образом способствовать получению НК с заданными физико-химическими свойствами.



### Список литература:

1. Бондаренко В.П., Ворозов Н.Н., Некрасов Б.М. Кинетика роста и плотность пористых слоев, полученных при анодной обработке монокристаллического кремния в HF// Тез. док. Н.-т. конференции: Пути технического совершенства и интенсификации разработки, производства и эксплуатации средств радиотехники, электроники и связи. Минск, 1979. — с. 76—77.
2. Горячев Д.Н., Л.В. Беляков, О.М. Среселли. Формирование толстых слоев пористого кремния при недостаточной концентрации неосновных носителей, ФТП, — 2004, — 38(6), — с. 735—739.
3. Залкинд Я.Г. Физико-механические свойства кремниевых наноструктур как технологического материала микросистемной техники: Диссертация к.т.н., М., 2006 г., — с. 131.
4. Николаев К.П., Немировский Л.Н., Новицкий В.М. и др. Особенности формирования пористого кремния на слаболегированных подложках из кремния электронного типа проводимости// Электронная техника. — 1985, — вып. 3(176), —с. 81—85.
5. Bisi O., Ossicini S., Pavesi L. Porous silicon: a quantum stronge structure for silicon based optoelectronics// Surface Science Report, — 2000, — V. 38, — p. 1—126.
6. Lehman V., Stengl R., Luigart A. On the morphology and the electrochemical formation mechanism of mesoporous silicon// Materials Science and Engineering. — 2000, — В 69—70, — p. 11—22.
7. Memming R., Skwandt G. Anodi dissolution of silicon in hydrofluoric acid solution // Surface Scien. — 1966. — Vol. 4, — № 2, — p. 109—124.

## СЕКЦИЯ 4.

## БИОЛОГИЯ

### 4.1. БИОГЕОЦЕНОЛОГИЯ

#### ОНТОГЕНЕТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ЦЕНОПОПУЛЯЦИЙ *MEDICAGO FALCATA* В УСЛОВИЯХ ОКРЕСТНОСТЕЙ ГОРОДА ЯКУТСКА

*Атласова Людмила Григорьевна*

*канд. с.-х. наук, с.н.с. ФГБУН ИБПК СО РАН,*

*РФ, г. Якутск*

*E-mail: [mila\\_atlasova@mail.ru](mailto:mila_atlasova@mail.ru)*

#### ONTOGENETIC STRUCTURE OF *MEDICAGO FALCATA* CENOPOPULATIONS IN THE CONDITIONS OF NEIGHBORHOOD OF THE CITY OF YAKUTSK

*Lyudmila Atlasova*

*candidate of Agriculture, senior research scientist of Federal State*

*Budgetary Institution of Science, Institute for Biological Problems*

*of Cryolithozone, Siberian Branch of RAS,*

*Russia, Yakutsk*

#### АННОТАЦИЯ

В статье представлены результаты изучения онтогенетической структуры ценопопуляций *Medicago falcate* L. в естественных условиях. При этом установлено, что все изученные ценопопуляции являются молодыми нормальными, неполночленными, так как абсолютные максимумы находятся в группе особей в виргинильном и молодом генеративном состоянии. У всех ценопопуляций отмечены невысокие индексы восстановления, которые указывают на затруднения процессов самоподдержания. Для растений *M. falcate*,

произрастающих в окрестностях города Якутска, исследованных в 2012 году, установлена защитно-стрессовая онтогенетическая стратегия.

#### ABSTRACT

In the article there are presented the study results of ontogenetic structure of cenopopulations of *Medicago falcate* L. under natural conditions. In addition, it is found that all the studied cenopopulations are young, normal and unsaturated due to the fact that absolute maximums are in the group of species in virginile and young generative state. All cenopopulations are marked with low recovery indices, which denote difficulties of the processes of self-maintenance. For *M. falcate* plants growing in the neighborhood of the city of Yakutsk, which were studied in 2012, a protective-stressful ontogenetic strategy has been established.

**Ключевые слова:** ценопопуляция; возрастная; структура; индекс; организменные; популяционные; признаки.

**Keywords:** cenopopulation; age structure; index; organismic population features.

Люцерна серповидная (*Medicago falcata* L.) — многолетнее растение с мощной развитой корневой системой. Стебли многочисленные, восходящие, прямые или простертые, (20) 40—80 (150) см высоты, слабо волосистые или голые. Листочки различной формы и размеров: обратно яйцевидные, продолговато ланцетные, ланцетные, линейно ланцетные, овальные или округло яйцевидные, (2) 5—22 (30) мм длины и (1) 2—6 (10) мм ширины. Цветочные кисти овальные, головчатые, густо цветковые, на коротких ножках. Венчики желтые с оранжевым оттенком. Бобы сравнительно мелкие, серповидные реже — лунные до прямых, но не густо опушенные, (6) 8—12 (15) мм длины и (2) 2,5—3,5 мм ширины. Цветение — июль-август, массовое созревание бобов — сентябрь-октябрь. Перекрестно опыляемый.  $2n = 16, 32$ . Ареал распространения — встречается по всему Северному полушарию, исключение составляют арктические районы. На территории Якутии в естественных условиях растет в долине реки Лена. Растет на остепененных лугах, приречных редких ивняках. Не переносит заболачивание, кислые почвы, так как они угнетающе действуют на клубеньковую азотфиксирующую флору.

В изучении ЦП *M. falcata* использовались популяционно-онтогенетические методики (Работнов, 1969; Уранов, 1975; Жукова, 1995; Злобин, 1984; Ишбирдин, Ишмуратова, 2004).

Особое значение для ценопопуляции имеют процессы самоподдержания. Поэтому Л.А. Жуковой (1986) для характеристики самоподдержания был предложен показатель — индекс

восстановления —  $I_v$ , представляющий отношение плотности подростка к плотности генеративных растений. Этот индекс показывает, какую часть генеративной фракции после ее отмирания способен восстановить подрост или сколько потомков в данный момент времени приходится на одну генеративную особь. Результаты исследований возрастной структуры ЦП *Medicago falcate* L. даны в таблице 1. Плотность особей ЦП *M. falcate* L. изменяется 30 (ЦП 4) до 43 (ЦП 5) штук на  $1\text{ м}^2$ . У всех ценопопуляций отмечены невысокие индексы восстановления, которые указывают на затруднения процессов самоподдержания.

Таблица 1.

Возрастная структура ЦП *Medicago falcate* L.

ЦП	Возрастная структура, %						Плотность	$I_v$	$g/p+j+im+v+g$
	j	im	v	g1	g2	g3			
ЦП1	10,1	19,2	30,3	15,2	12,1	9,1	32,9	1,64	0,379
ЦП2	16,0	13,8	16,0	11,7	7,4	1,1	31,3	2,26	0,202
ЦП3	10,2	11,8	25,2	16,5	18,1	13,4	42,3	0,98	0,504
ЦП4	26,3	22,0	24,2	9,9	7,7	9,9	30,3	2,64	0,275
ЦП5	3,5	10,8	19,4	31,0	17,0	15,5	42,9	0,54	0,643
ЦП 6	16,9	22,6	20,2	16,9	12,1	5,6	41,3	1,73	0,346

Все изученные ценопопуляции являются молодыми нормальными, неполночленными, так как абсолютные максимумы находятся в группе особей в виргинильном и молодом генеративном состоянии (рис. 1).

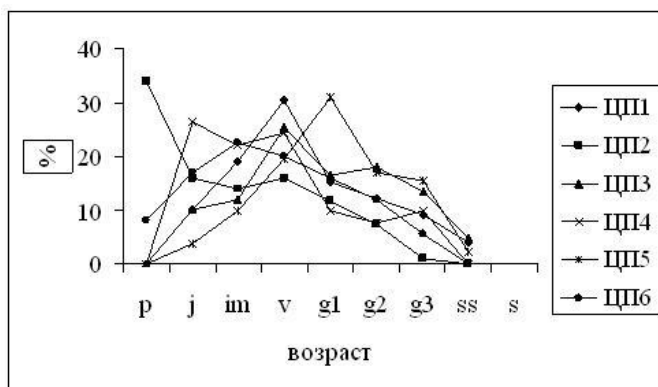


Рисунок 1. Возрастная структура ЦП *Medicago falcate* L.

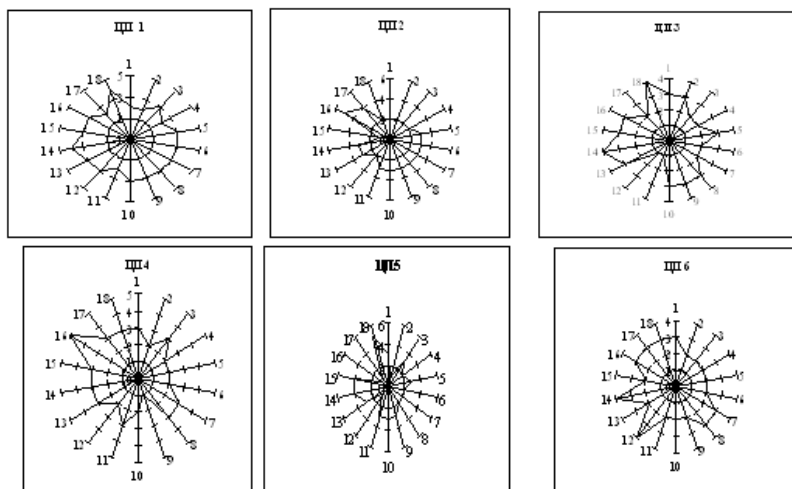
Наилучшим развитием организменных (2,7) и популяционных (3,2) признаков у ЦП 1. Сравнительно высокий показатель популяционных признаков (3) у ЦП 4, но показатель организменных (2,1) самый низкий. Одинаковый балл организменных (2,3) и популяционных (2,7) признаков у ЦП 3 и ЦП 5 (табл. 2.).

**Таблица 2.**

**Балловые оценки организменных и популяционных признаков ценопопуляций *Medicago falcate* в условиях пригорода Якутска**

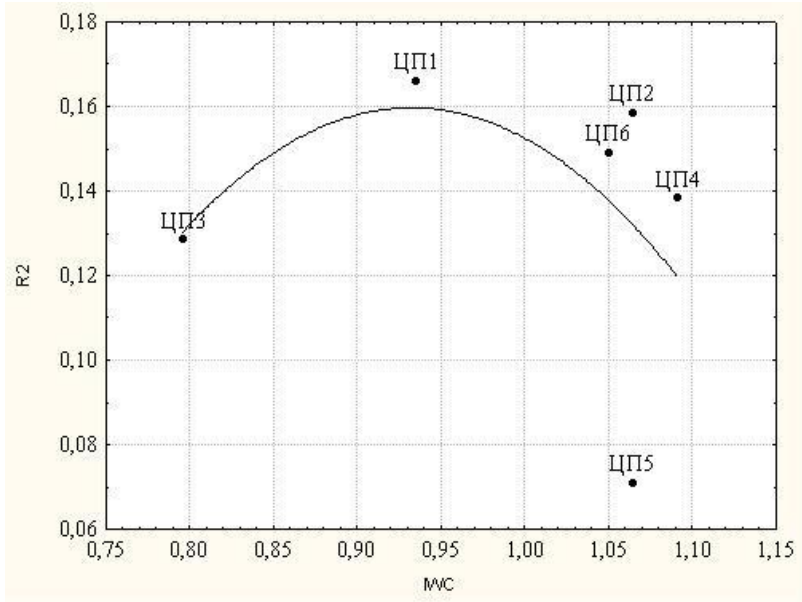
	признак	Номер ценопопуляции					
		1	2	3	4	5	6
<b>Организменные:</b>							
1	Высота растений, см	2	2	3	3	3	3
2	Соцветий всего, шт.	2	2	3	2	1	2
3	Цветков в соцветии, шт.	3	2	2	3	3	2
4	Всего листьев на побег, шт.	2	2	2	2	2	2
5	Длина листочков, см	3	3	3	2	3	2
6	Ширина листочков, см	3	3	2	2	2	2
7	Длина соцветий (кисти), см	3	3	2	3	2	3
8	Длина цветоносов, см	3	3	3	3	2	3
9	Длина черешков листьев, см	3	3	3	1	3	2
10	Длина среднего листочка, см	3	3	3	2	3	2
11	Число бобов на соцветии, шт.	2	3	1	3	3	2
12	Всего бобов на побег, шт.	3	2	1	2	1	4
13	Средний балл организменных признаков	2,7	2,6	2,3	2,1	2,3	2,4
<b>Популяционные:</b>							
15	Средняя плотность	3	3	3	3	3	2
16	Доля генеративных особей от общего числа взрослых особей (g/v+g)	4	3	5	3	4	4
17	Доля генеративных особей от общего числа (g/p+j+im+v+g)	3	1	3	3	4	2
18	Индекс восстановления - Iв	3	5	2	5	1	3
19	Доля молодых особей (j+im), %	2	4	2	3	1	3
20	Доля взрослых особей (v+g), %	4	2	4	3	5	3
21	Средний балл популяционных признаков	3,2	2,6	2,7	3	2,6	2,4
22	<b>Общий средний балл</b>	2,95	2,6	2,5	2,55	2,5	2,4

В целом по комплексу организменных и популяционных признаков (общий средний балл) в лучшем состоянии находится ЦП 1, который характеризуется большой площадью круговой диаграммы (рис. 2).



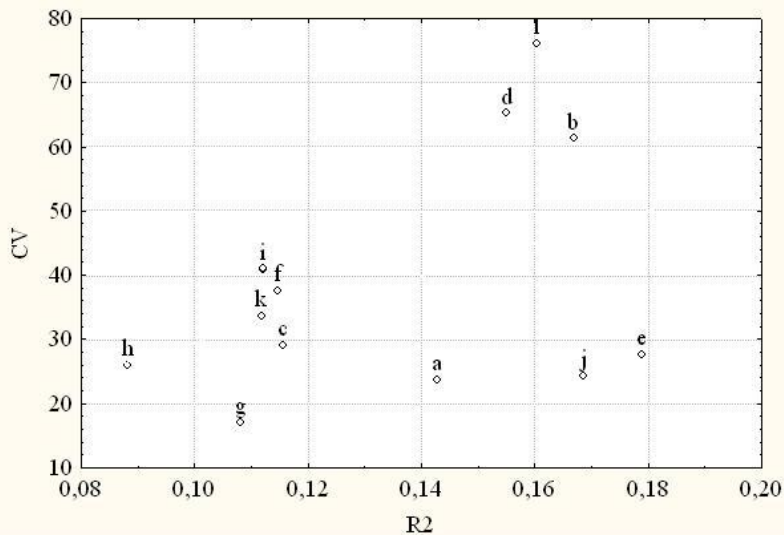
**Рисунок 2. Круговые диаграммы организменных и популяционных показателей *Medicago falcate* L. в исследованных ЦП**

В стабильном состоянии находятся ЦП 2, ЦП 3, ЦП 4, ЦП 5, ЦП 6, о чем свидетельствует отсутствие разрывов в диаграммах (рис. 2.).



**Рисунок 3. Тренд онтогенетической стратегии популяций *M. falcate* 2012 г. По оси абсцисс — индекс виталитета ценопопуляции IVC, по оси ординат морфологическая целостность (коэффициент детерминации R2)**

Для растений *M. falcate*, произрастающих в окрестностях города Якутска, исследованных в 2012 году, установлена защитно-стрессовая онтогенетическая стратегия. Коэффициент детерминации имеет максимальное значение у ЦП 1 (0,16), затем снижается ЦП 4 (0,12). Таким образом, в онтогенетической стратегии вида можно наблюдать сочетание защитной (возрастание интеграции составляющих) и стрессовой (снижение уровня морфологической интеграции в развитии растений). При повышении стресса происходит усиление, а потом ослабление координации развития растений.



**Рисунок 4. Структура изменчивости морфологических признаков *M. falcate* 2012 г: a — высота побега, см; b — всего соцветий, шт; c — цветков в соцветии; d — всего листьев; e — длина листочков; f — ширина листочков; g — длина соцветий, мм; h — длина цветоносов; I — длина черешков листьев, мм; j — длина среднего листочка, мм; k — бобов на соцветие, шт.; l — всего бобов**

Изучение структуры изменчивости морфологических признаков *M. falcate* 2012 г. зависящих от условий произрастания: a — высота побега, см; b — всего соцветий, шт; c — цветков в соцветии; d — всего листьев; e — длина листочков; f — ширина листочков; g — длина соцветий, мм; h — длина черешков листьев, мм; I — длина среднего листочка, мм; j — длина цветоносов, мм показала, что, из этих признаков число соцветий, бобов и листьев имеют высокий уровень общей изменчивости (CV — 61—76 %), средний уровень (CV — 26—41 %) имеют число цветков в соцветии, длина цветоносов, длина и ширина листочков, длина черешков листьев, число бобов на соцветие. Наименьшим уровнем согласованности изменчивости (R2) характеризуется такой признак, как длина соцветий, высота побега, длина среднего листочка (Рис. 4).

Таким образом, в результате проведенных исследований выявлено, что возрастное состояние выявлено, что все изученные ценопопуляции являются молодыми нормальными, неполночленными,



так как абсолютные максимумы находятся в группе особей в виргинильном и молодом генеративном состоянии. Наилучшим развитием организменных (2,7) и популяционных (3,2) признаков у ЦП1. Для растений *M. falcate*, произрастающих в окрестностях города Якутска, исследованных в 2012 году, установлена защитно-стрессовая онтогенетическая стратегия.

### Список литературы:

1. Жукова Л.А. Популяционная жизнь луговых растений. Йошкар-Ола, 1995. — 223 с.
2. Злобин Ю.А. Принципы и методы изучения ценотипических популяций растений: Учебно-методическое пособие. Казань, 1989. — 147 с.
3. Ишбирдин А.Р., Ишмуратова М.М. Адаптивный морфогенез и эколого-ценотипические стратегии выживания травянистых растений //Методы популяционной биологии: Сб. материалов докл. VII Всерос. популяц. Семинара (ч.2). Сыктывкар, 2004. — С. 113—120.
4. Работнов Т.А. Некоторые вопросы изучения ценотипических популяций //Бюлл. МОИП. отд. биол. — 1969. — Т. 74, — № 1, — С. 141—149.
5. Уранов А.А. Возрастной спектр фитоценопопуляций как функции времени и энергетических волновых процессов //Биологические науки. — 1975. — № 2. — С. 7—34.

## 4.2. БИОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

### ЗНАЧЕНИЕ ПОПУЛЯЦИОННОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОЦЕНКИ СОЛЕУСТОЙЧИВОСТИ СОРТОВ ВИНОГРАДА

*Юсуфов Абдулмалик Гасамутдинович*

*д-р биол. наук, профессор ДГУ,  
РФ, г. Махачкала*

*E-mail: [yusufov\\_a.g.@mail.ru](mailto:yusufov_a.g.@mail.ru)*

### IMPLICATION OF THE POPULATION APPROACH FOR ESTIMATION OF SALINITY RESISTANCE OF GRAPE VARIETIES

*Abdulmalik Yusufov*

*doctor of Biological Sciences, professor of Dagestan State University,  
Russia, Makhachkala*

#### АННОТАЦИЯ

Обоснована необходимость применения методов популяционного анализа для оценки агроэкологической устойчивости сортов винограда изучением изменений сроков развития и биомассы у черенков при культивировании в условиях засоления. Выявлены результаты изменчивости разных параметров корней и побегов при их взаимодействии.

#### ABSTRACT

There is proved a necessity of application of population analysis methods for estimation of agro-ecological resistance of grape varieties by means of study of growth period changes and biomass of cuttings when cultivation under the conditions of salinity. The findings have shown variability of roots and stems when interacting with each other.

**Ключевые слова:** виноград; черенки; взаимодействие корней и побегов; биомасса; популяционный подход; засоление среды.

**Keywords:** grape; cuttings; interaction between roots and stems; biomass; population approach; salinity of environment.

Для достижения высокой продуктивности чаще всего обращают внимание на обеспечение возделываемых растений благоприятными естественными [5, с. 20] и агротехническими условиями [1, с. 1—10; 3, с. 20; 6, с. 239]. При этом чаще всего остается без внимания роль взаимодействия разных морфофизиологических особенностей, о чем идет ниже речь при изучении черенков у сортов винограда в условиях засоления среды для обеспечения продуктивности и жизнеспособности.

Для этого на черенках сортов винограда (Агадаи, Гюляби, Нарма, Матраса, Премьер и Хусейн) было изучено действие засоления среды  $\text{NaCl}$  и  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  ( $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}\text{M}$ ) на выход стандартных саженцев. При этом обращалось внимание на сроки формирования побегов и корней, сырую и сухую биомассу, роль соотношения взаимодействия корней и побегов у 12-ти количественных показателей черенков. Для этого были определены показатели изменчивости, t-критерий Стьюдента, коэффициента корреляции признаков, однофакторного дисперсионного и регрессивного анализа, силы влияния ( $h^2$ ) факторов на весовые показатели побегов и корней [4, с. 45].

Виноград отнесен к солеустойчивым культурам. Однако поливное земледелие сопровождается поднятием грунтовых вод, способствующих повышению засоления насаждений. В этих условиях урожайность винограда зависит от чувствительности всех его структур к засолению, что, прежде всего, отражается на изменчивости разных параметров корней и побегов при их взаимодействии в процессе роста.

Осенью и весной из зрелых побегов текущего года прироста нарезали черенки с 2—3 почками, которые постоянно культивировали в воде (контроль) и растворах солей. Черенки изученных сортов проявляли изменчивость всех показателей.

У черенков всех изученных сортов угнетенность в большей мере проявлялась в растворе  $10^{-2}$ , чем  $10^{-3}\text{M}$  солей. Исключение составляли сорта Хатми и Премьер, у которых лучшие показатели сухой биомассы корней наблюдались в растворах  $\text{NaCl}$  ( $10^{-2}\text{M}$ ). Сырая биомасса побегов у Агадаи мало отличалась от контроля. У сортов Нармы и Гюляби, наоборот, сухая биомасса корней в растворе  $10^{-3}\text{M}$  даже превосходила показатели контроля.

Варианты  $10^{-1}$  и  $10^{-2}\text{M}$  отличались от контроля летальностью, ингибированием ризогенеза, сроков и пробуждения почек к росту. У черенков в варианте  $10^{-1}\text{M}$  побеги также быстро высыхали из-за

солевых ожогов апексов и листьев. В этом отношении по устойчивости выделялись черенки Агадаи. Растворы  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  оказались менее благоприятными, чем  $\text{NaCl}$ . Последующий перевод черенков из раствора  $10^{-1}\text{M}$  в воду подтвердил полную потерю у них жизнеспособности.

По сырой и сухой биомассе корней и побегов можно судить о солеустойчивости сортов. Черенки Нарма проявляют жизнеспособность лишь в слабых растворах солей, в растворе  $10^{-2}\text{M}$  они угнетены. Сорт Матраса относится к хлоридоустойчивым, тогда как  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  ( $10^{-2}\text{M}$ ) оказывает на корни и побеги депрессивное воздействие. Для оценки жизнеспособности черенков информативен анализ вариабельности комплекса их взаимосвязанных показателей: сроки формирования побегов и корней, сырая и сухая биомасса, сравнение совокупных величин биомассы побегов и корней по вариантам и т. д. С учетом таких изменений убывающий ряд солеустойчивости сортов составляет: Агадаи → Хатми → Матраса → Премьер → Нарма → Гюляби. Этот ряд не всегда совпадает при отдельном анализе величин для корней и побегов.

Индекс солеустойчивости по сухой биомассе побегов у черенков сорта Премьер и Матраса характеризуется довольно высокими показателями, по сырой же биомассе наблюдалась обратная картина. Для выяснения причин такого несовпадения по вариантам, прирост биомассы сравнивали по суткам (в %). Например, у сорта Матраса во всех вариантах прирост биомассы побега в течение суток оказался выше, тогда как корней — ниже контроля. У сортов Агадаи и Хатми прирост биомассы корней в вариантах на засоление был выше, тогда как побегов — ниже контроля. По сырой биомассе преобладали черенки сортов Премьер и Агадаи в растворах  $\text{NaCl}$ . Заметно ниже оказалась биомасса корней у черенков Матраса в растворе  $10^{-2}\text{Na}_2\text{SO}_4$ . Наиболее низкие показатели были характерны для черенков неустойчивого к засолению сорта Нармы, что особенно ярко было выражено в растворе  $10^{-2}\text{M}$ .

Поэтому следует сопоставить состояние комплекса их взаимосвязанных показателей. Подобные агроэкологические исследования оправданы при анализе действия и других факторов на растения. Они имеют значение и для решения задач аутоэкологии [2, с. 4]. Только для этого важно использовать соответствующие методы популяционного анализа с целью разграничения случайных закономерных явлений, о чем свидетельствуют приведенные данные.

Значение использования популяционного подхода при этом состоит не только в оценке результатов культивирования черенков

винограда, но и в демонстрации роли популяционного подхода. Он вообще не применялся в исследованиях процессов морфогенеза у черенков, отличающихся большой лабильностью.

На наличие противоречий между корнями и побегами при их формировании давно обращали внимание. Однако при этом ограничивались оценкой темпов и мощности их формирования в отдельности. Корни и побеги характеризуются изменениями множества других параметров при формировании. Их связь удалось выявить при анализе особенностей формирования комплекса 12 признаков.

Приведенные результаты свидетельствуют о перспективах оценки результатов агроэкологических исследований с позиций задач аутоэкологии с использованием методов популяционного анализа. Упрощенный подход изучения устойчивости сортов винограда культивированием черенков в растворах солей не заменяет необходимости анализа общей вегетативной и генеративной продуктивности сортов в полевых условиях при возделывании на почвах с разным типом и уровнем засоления. Этой задаче отвечает и культивирование черенков разных сортов в растворах солей.

### **Список литературы:**

1. Аци Дж. Сельскохозяйственная экология. М.: ИЛ, 1959. — 479 с.
2. Бахтенко Е.Ю. Аутоэкологический подход к физиологическому ответу растений на затопление. Автореф. докт. ... дисс. Вологда, 2001. — 38 с.
3. Кошкин Е.И. Физиология устойчивости с/х культур: учебное пособие. М.: Дрофа, 2010. — 638 с.
4. Юсуфов А.Г., Мамедова К.К., Сулейманов А.Ш. Анализ взаимодействия компонентов биомассы корней и побегов у черенков винограда // Виноделие и виноградарство. — 2013. — № 4. — С. 44—46.
5. Boock F.H. Evolutionary ecology Plants. Booksel and Publ. 1990. — 600 p.
6. Munns R. Comparative physiology of salt and water stress // Plant Cell and Enviromen. — 2002. — v. 25. — P. 239—250.

### 4.3. БИОХИМИЯ

#### ПОИСК И ПЕРВИЧНАЯ ОЧИСТКА БИОЛОГИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ПОЛИПЕПТИДОВ ИЗ АКТИНИИ *URTICINA CF. CORIACEA*

***Кветкина Александра Николаевна***

*студент, кафедра биохимии, микробиологии и биотехнологии,  
Школа естественных наук, Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего профессионального  
образования Дальневосточный Федеральный Университет,  
РФ, г. Владивосток  
E-mail: [sashaledy.ru@mail.ru](mailto:sashaledy.ru@mail.ru)*

***Гладких Ирина Николаевна***

*канд. хим. наук, н.с. лаборатории химии пептидов,  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Тихоокеанский институт биоорганической химии им. Г.Б. Елякова  
Дальневосточного отделения Российской академии наук,  
РФ, г. Владивосток  
E-mail: [irinagladkikh@gmail.com](mailto:irinagladkikh@gmail.com)*

***Монастырная Маргарита Михайловна***

*д-р хим. наук, в.н.с. лаборатории химии пептидов,  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Тихоокеанский институт биоорганической химии им. Г.Б. Елякова  
Дальневосточного отделения Российской академии наук,  
РФ, г. Владивосток  
E-mail: [rita1950@mail.ru](mailto:rita1950@mail.ru)*

***Козловская Эмма Павловна***

*д-р хим. наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки Тихоокеанский институт биоорганической химии  
им. Г.Б. Елякова Дальневосточного отделения Российской академии наук,  
РФ, г. Владивосток  
E-mail: [kozempra@mail.ru](mailto:kozempra@mail.ru)*

# THE RESEARCH AND PRIMARY PURIFICATION OF BIOLOGICALLY ACTIVE POLYPEPTIDES FROM ACTINIA URTICINA CF. CORIACEA

**Kvetkina Aleksandra Nikolayevna**

student, Far Eastern Federal University,  
Russia, Vladivostok

**Irina Gladkikh**

candidate of chemical sciences, research worker of the laboratory  
of Peptide Chemistry, G.B. Elyakov Pacific Institute of Bioorganic  
Chemistry, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences,  
Russia, Vladivostok

**Margarita Monastyrnaya**

doctor of Chemistry, leading research worker of the laboratory  
of Peptide Chemistry, G.B. Elyakov Pacific Institute of Bioorganic  
Chemistry, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences,  
Russia, Vladivostok

**Emma Kozlovskaya**

doctor of Chemistry, professor, G.B. Elyakov Pacific Institute of Bioorganic  
Chemistry, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences,  
Russia, Vladivostok

## АННОТАЦИЯ

Описано выделение и определение биологической активности полипептидов, выделенных из актинии *Urticina cf. coriacea*.

## ABSTRACT

Process of purification and determination of biologically active polypeptides from the sea anemone *Urticina cf. coriacea* is described.

**Ключевые слова:** актинии; нейротоксины; ASIC-каналы.

**Keywords:** sea anemones; neurotoxins; ASIC-channels.

В последние годы проводятся ширококомасштабные исследования в области химии и фармакологии морских природных соединений (МПС), направленные на разработку лекарственных препаратов нового поколения. Интересными объектами изучения являются морские кишечнорастворимые, актинии, продуцирующие огромное разнообразие

низко- и высокомолекулярных биологически активных полипептидов, таких как анемонотоксины структурных типов 1 и 2 (5 кДа) [3, 5—7], ингибиторы протеиназ (6 кДа), специфически взаимодействующие с различными биологическими мишенями включая определенные типы ионных каналов и ионотропных рецепторов [2, 4], а также пороформирующие токсины (актинопорины 20 кДа) [8, 13, 20]. Наиболее богатыми источниками таких соединений являются тропические виды актиний. Так, из *Heteractis crispa* (ранее *Radianthus macrodactylus*) выделен полипептид APHC1, который, блокируя болевой ваниллоидный рецептор TRPV1, оказывает выраженное анальгетическое действие *in vivo* на моделях тепловой стимуляции боли [11]. Недавно из этой же актинии был выделен еще один полипептид,  $\pi$ -AnmTX Hcr 1b-1, который блокирует протончувствительные  $\text{Na}_v$ -каналы электровозбудимых мембран (ASIC3 типа) [9] и проявляет анальгетическую активность на млекопитающих. Установлено, что TRPV1 и некоторые типы ASICs-каналов играют важную роль в приеме, обработке и передаче болевых стимулов в центральную нервную систему [14].

Не менее интересным источником таких соединений являются актинии дальневосточных морей. Недавно в лаборатории химии пептидов ТИБОХ ДВО РАН был проведен поиск биологически активных полипептидов в ядах актиний Охотского моря, *Urticina sp.*, *Stomphia coccinea*, и Японского моря, *Cnidopus japonicus*. Тестирование активности водных и этанольных экстрактов ядов методом тепловой стимуляции боли у мышей показало, что они обладают выраженной анальгетической активностью [1]. В экстрактах актиний северо-западной части Тихого океана были найдены полипептиды, обладающие гидролитической активностью, а экстракт актинии *Metridium senile* разрушает хитин ракообразных за счет содержащегося в нем фермента хитиназы [16]. Показано, что активность ферментов тропических видов актиний, участвующих в гидролизе глюканов, несколько ниже, чем у актиний низкороборальных вод Дальнего Востока [17].

Для поиска и последующего выделения новых биологически активных соединений белковой природы нами был выбран вид актинии Охотского моря *U. cf. coriacea*, который широко распространен в западной части Тихого океана на побережье Северной Америки, а также около Курильских островов. Канадские ученые из университета Альберта, исследовавшие экстракты одиннадцати видов актиний, показали, что экстракт актинии *U. coriacea*, собранной у побережья Канады, обладает мощным цитотоксическим действием



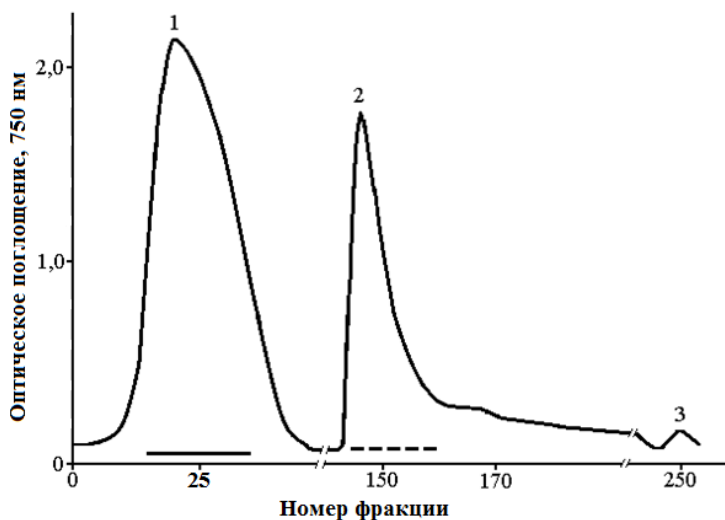
на клеточную линию HEL 299, получаемую из легочной ткани эмбрионов, а также повышает частоту сердечных сокращений у крысы [13]. Это свидетельствует о том, что актиния *U. cf. coriacea* может являться потенциальным источником цитотоксинов и кардиостимулирующих соединений.

Для получения яда из *U. cf. coriacea* применили метод осмотического шока в сочетании с термическим шоком. Этот подход позволяет получить более чистый и концентрированный яд, не загрязненный белками и полипептидами, содержащимися в тканях тела животного. Для этого живых актиний поместили в теплую дистиллированную воду (40—45 °С) на 15—20 минут и периодически помешивали их стеклянной палочкой для дополнительной стимуляции выброса биологически активных веществ из клеток щупалец и тела. Полученный водный экстракт после фильтрации центрифугировали и лиофильно высушивали. Для дальнейшего разделения содержащихся в нем биологически активных полипептидов применяли гидрофобную хроматографию на полихrome-1. Элюцию адсорбированных полипептидов осуществляли сначала водой, а затем последовательно 40 %-ным и 60 %-ным этанолом (рис. 1). Фракции, элюированные водой, были проверены на содержание в них полипептидов, обладающих гемолитической и фосфолипазной активностью. Результаты анализа показали, что эти фракции обладали только гемолитической активностью.

Полипептиды 40 %-ных этанольных фракций (спирт предварительно упаривали) были проверены на наличие трипсинингибирующей, токсической и анальгетической активности. Было установлено, что трипсинингибирующей активностью они не обладают, что связано, возможно, с примененным способом экстракции. Известно, что нейро-, цитотоксины и ингибиторы протеиназ были получены из водных и этанольных экстрактов актиний путем гомогенизации цельного организма. Примером может служить актиния *H. crispa*, из которой было выделено 8 нативных ингибиторов протеиназ, и для ингибитора Jn-IV была установлена полная аминокислотная последовательность [8]. Однако, согласно литературным данным, в экстракте актинии *Gyrostoma helianthus* ингибиторная активность также не обнаружена [19].

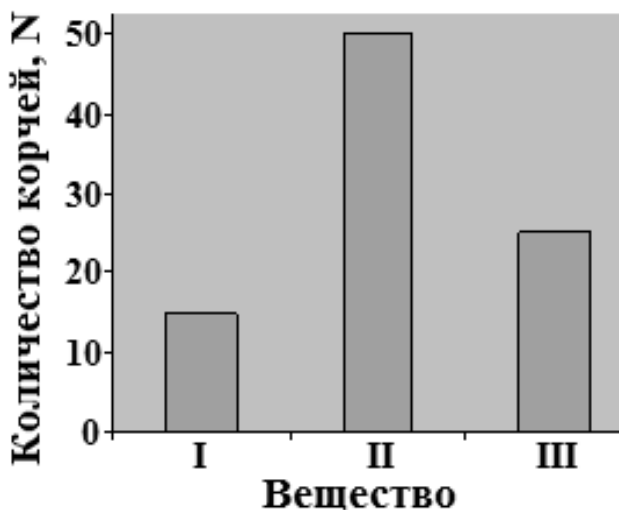
Для определения токсичности мышам вводили раствор полипептидов в дозе 80,5 мг/кг. Но даже в такой дозе токсичность полипептиды не проявляли. В то же время значения LD<sub>50</sub> токсинов, выделенных из тропической актинии *H. crispa*, для мышей варьировали от 3000 мкг/кг до 2,5 мкг/кг [2—7].

Для определения анальгетической активности полипептидов, экстрагированных 40 %-ным этанолом, в экспериментах *in vivo* использовали модель химического болевого раздражения, вызываемого внутрибрюшинным введением 1 %-ной уксусной кислоты («кислотная» модель) [10]. Показано, что при введении раствора полипептидов в дозе 590 мкг/мышь среднее количество корчей у экспериментальных животных составило 25, а количество корчей у нелеченных животных — 50 (рис. 2). Это говорит о том, что полипептиды 40 %-ных этанольных фракций обладают анальгетической активностью.



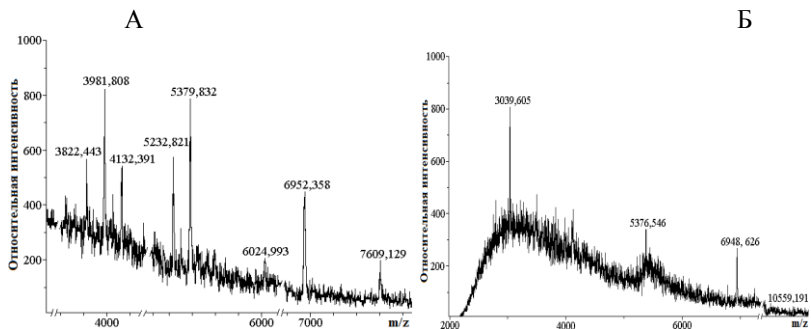
**Рисунок 1. Гидрофобная хроматография полипептидов водного экстракта актинии *U. cf. coriacea* на колонке с полихромом-1, уравновешенным водой. Пик 1 — элюция полипептидов дистиллированной водой, пик 2—40 %-ным этанолом, пик 3—60 %-ным этанолом. Границы объединенных полипептидных фракций, обладающих гемолитической активностью, отмечены сплошной линией, а анальгетической активностью — пунктирной**

Согласно данным масс-спектрометрического анализа (MALDI TOF MS) полипептиды, присутствующие во фракциях пика 1 (рис. 1), имели молекулярные массы 3822,4; 3981,8; 4132,4; 5232,8; 5379,8; 6024,9; 6952,4; 7609,1 Да (рис. 3, А).



**Рисунок 2. Анальгетический эффект полипептидов пика 2 (рис. 1) на «кислотной» модели: мышам вводили 100 мкл раствора исследуемого препарата полипептидов и анальгин внутривнутрибрюшинно. Через час вводили 100 мкл 1 %-ной уксусной кислоты и подсчитывали количество корчей в течение 15 мин. I — мыши, леченные контрольным препаратом сравнения (анальгин), II — нелеченые мыши, III — мыши, леченные исследуемыми препаратом полипептидов**

Во фракциях 2-го пика (рис. 1) содержались полипептиды с молекулярными массами: 3039,6; 5376,6; 6948,6; 10559,2 Да (рис. 3, Б). Пептиды с молекулярными массами в диапазоне 3822—4132 Да могут принадлежать к группе токсичных APETx2-подобных пептидов, обнаруженных у актинии *Anthopleura elegantissima* [12] и *H. crispa* [9], обладающих анальгетической активностью, которая обусловлена их блокирующим действием на ASICs-каналы (ASIC3 и ASIC1a), в то время как полипептиды с молекулярной массой около 5000 Да, очевидно, принадлежат к нейротоксинам структурных типов 1 или 2, модуляторам Na<sup>+</sup>-каналов [18]. Наличие в масс-спектре сигналов, соответствующих 6 кДа, показывает, что во фракциях могут присутствовать полипептидные ингибиторы протеиназ [2, 4].



**Рисунок 3. Масс-спектры полипептидов в объединенных полипептидных фракциях пика 1 (А) и пика 2 (Б) (рис. 1)**

Полипептиды со значениями молекулярных масс около 7 кДа, возможно, являются низкомолекулярными цитополизинами (6—7 кДа). Так, ранее из актинии низкобореальных вод *Tealia felina* был выделен низкомолекулярный полипептид — теалиатоксин с молекулярной массой 7,8 кДа [15], а из водного экстракта актинии *R. macrodactylus* два цитополизина RmI и RmII (6 кДа) [8].

Таким образом, установлено, что экстракт актинии *U. cf. coriacea* содержит ряд биологически активных полипептидов, обладающих цитолитической и анальгетической активностью. Полученные данные позволяют предположить, что так же как анальгетические полипептиды Кунитц-типа АРНС1-АРНС3 и АРЕТх2-подобные токсины актинии *H. Crispa* [9], биологически активные полипептиды из *U. cf. coriacea* могут обладать фармакологическим потенциалом.

### Список литературы:

1. Гладких И.Н., Монастырская М.М., Табакмахер В.М., Кривошапка О.Н., Синцова О.В., Сухова И.Г., Ткачева Е.С., Чаусова В.Е., Костина Е.Е., Попов А.М., Козловская Э.П. Поиск анальгетических компонентов, продуцируемых морскими актиниями // Актуальные научные вопросы: реальность и перспективы: сб. науч. тр. по материалам Междунар. заочной науч.-практ. конф. Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество». — 2012. — Ч. 2. — С. 29—33.
2. Зыкова Т.А., Винокуров Л.М., Маркова Л.Ф., Козловская Э., Еляков Г.Б. Аминосилотная последовательность трипсинового ингибитора IV из *Radianthus macrodactylus* // Биоорганич. химия. — 1985. — Т. 11. — № 3 — С. 293—301.

3. Зыкова Т.А., Винокуров Л.М., Козловская Э.П., Еляков Г.Б. Аминокислотная последовательность нейротоксина III из актинии *Radianthus macrodactylus* // Биоорган. химия. — 1985а. — Т. 11. — № 3. — С. 302—310.
4. Зыкова Т.А., Винокуров Л.М., Маркова Л.Ф. и др. Аминокислотная последовательность трипсिनового ингибитора II из *Radianthus macrodactylus* // Биоорган. химия. — 1985б. — Т. 11. — № 3. — С. 293—301.
5. Зыкова Т.А., Козловская Э.П. Аминокислотная последовательность нейротоксина I из актинии *Radianthus macrodactylus* // Биоорган. химия. — 1989а. — Т. 15. — № 10. — С. 1301—1306.
6. Зыкова Т.А., Козловская Э.П. Дисульфидные связи в нейротоксине III из актинии *Radianthus macrodactylus* // Биоорган. химия. — 1989б. — Т. 15. — № 7. — С. 904—907.
7. Зыкова Т.А., Козловская Э.П., Еляков Г.Б. Аминокислотная последовательность нейротоксинов IV и V из актинии *Radianthus macrodactylus* // Биоорган. химия. — 1988. — Т. 14. — № 11. — С. 1489—1494.
8. Зыкова Т.А., Монастырская М.М., Апаликова О.В., Швец Т.В., Козловская Э.П. Низкомолекулярные цитолизины и ингибиторы трипсина из актинии *Radianthus macrodactylus*. Выделение и частичная характеристика. // Биоорган. химия. — 1997. — Т. 24. — С. 509—516.
9. Козлов С.А., Андреев Я.А., Кошелев С.Г., Иванова Е.А., Лейченко Е.В., Козловская Э.П., Гришин Е.В. Патент на изобретение «Полипептид актинии, обладающий анальгетическим действием», РФ № 2368621. 2009.
10. Козловская Э.П., Монастырская М.М., Гладких И.М., Табакмахер В.М., Кривошапко О.Н., Козлов С.А., Осмаков Д.И., Андреев Я.А., Кошелев С.Г., Гришин Е.В. Полипептид из морской анемоны *Heteractis crispa*, обладающий анальгетическим действием. Патент РФ 2012108499. 2012.
11. Andreev Y.A., Kozlov S.A., Koshelev S.G., Ivanova E.A., Monastyrnaya M.M., Kozlovskaya E.P., Grishin E.V. Analgesic compound from sea anemone *Heteractis crispa* is the first polypeptide inhibitor of vanilloid receptor 1 (TRPV1) // J. Biol. Chem. — 2008. — Vol. 283. — P. 23914—23921.
12. Chagot B., Escoubas P., Diochot S., Bernard C., Lazdunski M., Darbon H. Solution structure of APETx2, a specific peptide inhibitor of ASIC3 proton-gated channels // Protein Sci. — 2008 — Vol. 14. — P. 2003—2010.
13. Cline E.I., Wolowyk M.W. Cardiac stimulatory, cytotoxic and cytolytic activity of extracts of sea anemones // International Journal of Pharmacognosy. — 1997. — Vol. 35 — № 2 — P. 91—98.
14. Deval E., Gasull X., Noel J., Salinas M., Baron A., Diochot S., Lingueglia E. Acid-sensing ion channels (ASICs): pharmacology and implication in pain // Pharmacol. Ther. — 2010. — V. 128. — P. 549—558.
15. Elliott R.C., Konya R.S., Vickneshwara K. The isolation of a toxin from the Dahlia sea anemone *Tealia feline* // Toxicon. — 1986. — Vol. 24. — P. 117—122.

16. Elyakova L.A., Distribution of cellulase and chitinases in marine invertebrates // *Comp. Biochem. Physiol. B.* — 1972. — Vol. 43. — P. 67—70.
17. Elyakova L.A., Shevchenko N.M., Avaeva S.M. A Comparative Study of Carbohydrase Activities in Marine Invertebrates // *Comp. Biochem. Physiol. B.* — 1981. — Vol. 69. — P. 905—908.
18. Honma T., Shiomi K. Peptide toxins in sea anemones: structural and functional aspects // *Mar. Biotechnol.* — 2006. — Vol. 8. — P. 1—10.
19. Mebs D., Liebrich M., Beul A., Samejima Y. Hemolisin and proteinase inhibitors from sea anemones of Gulf of Aqaba // *Toxicon.* — 1983. — Vol. 21 — № 2 — P. 257—264.
20. Monastyrnaya M.M., Zyкова Т.А., Апаликова О.В., Шветс Т.В., Козловская Е.Р. Biologically active polypeptides from the tropical sea anemone *Radianthus macrodactylus* // *Toxicon.* — 2002. — Vol. 40 — P. 1197—1217.

## **СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ ГИПОТИРЕОЗА, РТУТНОЙ ИНТОКСИКАЦИИ НА ИММУНИТЕТ И ПУРИНОВЫЙ ОБМЕН**

***Олжаева Рауза Романовна***

*канд. биол. наук, и.о. доцента ГМУ,  
Республика Казахстан, г. Семей  
E-mail: [olzhaeyevr@mail.ru](mailto:olzhaeyevr@mail.ru)*

***Олжаева Галия Романовна***

*преподаватель  
КГУ «СОШ № 34» ГУ «Отдела образования города Семей ВКО»,  
Республика Казахстан, г. Семей*

# COMBINED EFFECT OF HYPOTHYROIDISM, MERCURY INTOXICATION ON THE IMMUNITY AND PURINE METABOLISM

*Rauza Olzhayeva*

*candidate of biological sciences,  
fulfilling duties associate professor of Medical State University,  
Republic of Kazakhstan, Semey*

*Galiya Olzhayeva*

*Teacher KGD "School № 34" GD "Education department" Semey,  
Republic of Kazakhstan, Semey*

## АННОТАЦИЯ

Приведены результаты состояния иммунитета, пуринового обмена при сочетанном влиянии гипотиреоза и ртутной интоксикации. Исследования проведены экспериментально на белых крысах, по иммунологическим и биохимическим методикам. Эксперименты на животных проводили в соответствии с приказом Минздрава СССР от 12 августа 1977 г., Женевской конвенцией (1990 г.) и Хельсинкской декларацией о гуманном отношении к животным. Установлено, что ртутная интоксикация изменяет состояние иммунного статуса и нарушает регуляторную функцию ферментов цикла пуриновых нуклеотидов при сочетанном действии гипотиреоза и ртутной интоксикации.

## ABSTRACT

The results of state immunity, purine metabolism in hypothyroidism and combined effects of mercury intoxication. Research were carried out on white rats experimentally, by immunological and biochemical methods. Experiments on animals were performed in accordance with the order of the USSR Ministry of the August 12 1977, the Geneva Convention ( 1990) and the Declaration of Helsinki on humane treatment of animals . Found that mercury intoxication changes the state of the immune status and infringed the regulatory function of purine nucleotide enzymes cycle in the combined hypothyroidism and mercury intoxication.

**Ключевые слова:** иммунитет; пуриновый обмен; гипотиреоз; ртутная интоксикация.

**Keywords:** immunity; purine metabolism; hypothyroidism; mercury intoxication.

Проблема загрязнения окружающей среды актуальна во всём мире. На земле Казахстана лежит 20 миллиардов тонн твёрдых отходов, оставленных промышленными предприятиями. Эта цифра с каждым годом увеличивается в среднем на 1 млрд. тонн. Весьма актуальной является проблема роста патологии щитовидной железы у населения, проживающего на территории бывшего Семипалатинского испытательного полигона. Высокий уровень концентрации тяжёлых металлов в природных объектах внешней среды приводит к глубоким нарушениям морфологического и биохимического статуса организма и изучение влияния и последствий интоксикации представляет большой интерес [4, с. 350—531]. Озабоченность вызывает промышленная площадка Павлодарского химического завода, где содержание ртути превышает 50 фонов, под корпусом цеха Павлодарского химического завода образовалось техногенное «месторождение» общей площадью 0,52 кв.км содержащее 850—900 тонн ртути [1, с. 548]. Исследования направлены на изучения воздействия солей ртути, на фоне гипотиреоза и поиска в дальнейшем коррегирующих веществ, обладающих защитными свойствами при сочетанном воздействии гипотиреоза и ртутной интоксикации.

**Цель.** Выяснить состояние иммунитета и пуринового обмена при совместном воздействии ртутной интоксикации у гипотиреозных животных.

**Новизна.** Впервые изучено сочетанное влияние ртутной интоксикации и гипотиреоза на иммунный статус и пуриновый обмен.

**Метод.** Для оценки иммунологического статуса в периферической крови подсчитывали общее количество лейкоцитов и лимфоцитов. Количество Т-лимфоцитов преимущественно с хелперной (ТФУ-РОК) и супрессорной (ТФЧ-РОК) активностью определяли методом Limatiul S., Shore A. и соавторов (1978) [8, с. 503—510]. Количество Т и В лимфоцитов определяли розеткообразующими тестами Jondal V. и соавторов (1972) [7, с. 207—209]. Количество В-лимфоцитов определялось по наличию рецептора к С3-компоненту комплемента (ЕАС-РОК) в соответствии с методом A.G. Ehlenberger et al. (1976) [5, с. 53—56]. Исследования проведены на белых крысах. Гипотиреоз вызывали путём тотальной тиреоидэктомии. На второй день после операции вводили раствор хлористой ртути (3 дня). Через 2 недели, определяли активность показателей иммунного статуса. Определение активности 5'-нуклеотидазы по С.О. Тапбергенову [3, с. 29]. Определение активности аденозинмонофосфат-дезаминазы (АМФ-дезаминазы) и аденозиндезаминазы проводили методом разработанным Тапбергеновым С.О. [2, с. 104—107]. Метод основан на ферментативном гидролизе АМФ и аденозина, приводящем



к освобождению аммиака. По количеству освободившегося NH<sub>3</sub> за 30 минут судят об активности ферментов.

**Результат.** Проведенными исследованиями установлено, гипотиреоз в сочетании с ртутной интоксикацией приводят к изменениям показателей иммунитета пуринового обмена. В эксперименте на животных, установлено: введение солей ртути гипотиреозным животным приводит к следующим изменениям иммунитета (таблица 1). Ртутная интоксикация у животных с гипотиреозом приводит к снижению повышенного количества лейкоцитов (17,53 %), к повышению числа Т-хелперов (30,29 %), к снижению повышенного гипотиреозом уровня В-лимфоцитов (абсол. число 47,12 %) на 35,99 % и Т-супрессоров (38,13 %).

*Таблица 1.*

**Иммунный статус при гипотиреозе и ртутной интоксикации**

Показатель	Контроль	Гипотиреоз	
		Гипотиреоз	+ртутная интоксикация
Лейкоциты (10 <sup>9</sup> /л) общ. число	6,63±0,38	11,01±0,60*	9,08±0,52**
Лимфоциты абс. сод. в мкл	4367,27±547,93	6411,11±391,31*	5795,5±669,20
Лимфоциты %	62,92±2,95	60,37±1,83	57,60±2,76
Т-лимфоциты абс. сод. в мкл	1015,23±132,16	1309,75±80,63*	1339,2±83,75
Т-лимфоциты %	20,85± 1,05	20,4±2,26	21,37±0,77
Т-хелперы абс. сод. в мкл	627,92 ±25,50	875,40±44,7*	1140,6±150,65**
Т-хелперы %	11,40±1,27	11,50±0,76	15,42±1,47**
Т-супрессоры абс. сод. в мкл	456,91±63,66	841,4±46,51*	520,14±45,19**
Т-супрессоры %	12,2±1,11	12,66±1,58	8,75±0,81**
В-лимфоциты абс. сод. в мкл	412,18±9,87	885,8±155,82*	468,4±40,46**
В лимфоциты %	8,92± 1,13	10,67±1,25*	6,83±0,54 **
Коэффициент А	0,12	0,13	0,10
Коэффициент В	1,61	1,92	1,71

*Примечание: \* — достоверность  $p < 0.05$  по сравнению с контролем, \*\* — достоверность  $p < 0.05$  по сравнению с гипотиреозом*

Хлористая ртуть у гипотиреозных животных вызывает неоднозначные изменения активности указанных ферментов в печени

(таблица 2). Активность ферментов метаболизма пуриновых нуклеотидов в печени повышается (5'-нуклеотидазы (50 %), АДА-дезаминазы (56,10 %), АМФ-дезаминазы (20 %).

**Таблица 2.**

**Изменения активности ферментов метаболизма пуриновых нуклеотидов в печени, сыворотке крови, почках крыс при гипотиреозе и ртутной интоксикации**

Показатель — орган	Контроль	Гипотиреоз	
		гипотиреоз	+ртутная интоксикация
Печень-5'-нуклеотидаза мкмоль/мг	0,03±0,004	0,01 ±0,001*	0,02±0,006**
Печень-Аденозин дезаминаза мкмоль/мг	0,71±0,08	0,41±0,03*	0,64±0,03 **
Печень-АМФ-дезаминаза мкмоль/мг	0,50±0,08	0,22±0,01*	0,55±0,03**
Сыворотке крови-5'-нуклеотидаза мкмоль/мл	37,71±6,00	25,02 ±3,00*	28,19±7,05
Сыворотке крови-Аденозиндезаминаза мкмоль/мл	482,96±39,82	368,49±33,72*	449,97±24,71 **
Сыворотке крови - АМФ-дезаминаза мкмоль/мл	299,97±42,67	191,80±23,82*	261,80±24,33**
Почки-5'-нуклеотидаза мкмоль/мг	0,04±0,006	0,06 ±0,001*	0,03±0,007**
Почки-Аденозиндезаминаза мкмоль/мг	0,94.±0,08	0,91±0,03*	0,58±0,05 **
Почки-АМФ-дезаминаза мкмоль/мг	0,69±0,07	0,33±0,01*	0,78±0,06**

*Примечание: \*— различия статистически значимы в сравнении с контролем, \*\* — для сравнения с гипотиреозом p<0.05*

В почках у животных с гипотиреозом, введение ртути вызывает снижение активности 5'-нуклеотидазы на 50 %, аденозиндезаминазы (36,26 %), активацию АМФ-дезаминазы. Пуриновые соединения принимают широкое участие в различных биохимических процессах

и регуляторных реакциях. Они способны влиять на функциональную активность клеток всех систем организма животных и человека. Установлено, что, в основе клеточного и гуморального иммунитета лежат изменения активности ряда ферментов нуклеотидного обмена, они играют особую роль в регуляции функции иммунокомпетентных клеток [6, с. 109—119]. В эксперименте установлено, что ртутная интоксикация гипотиреозных животных приводит к снижению, числа лейкоцитов, повышает число Т-хелперов, снижает повышенный при гипотиреозе уровень В-лимфоцитов и Т-супрессоров. Введение солей ртути гипотиреозным животным увеличивает активность АМФ-дезаминазы и аденозиндезаминазы в сыворотке крови. В печени гипотиреозных животных, введение солей ртути повышает активность ферментов метаболизма пуриновых нуклеотидов. В почках, введение солей ртути гипотиреозным животным вызывает снижение активности 5'-нуклеотидазы, аденозиндезаминазы, активацию АМФ-дезаминазы.

**Выводы.** Анализ этих результатов показал, что ртутная интоксикация изменяет состояние иммунного статуса, изменяет нарушая регуляторную функцию ферментов цикла пуриновых нуклеотидов контролирующих уровень аденозина, инозина и АМФ в тканях печени и почек организма у животных с гипотиреозом.

### Список литературы:

1. Панин М.С. Экология Казахстана / Под ред. Байтулина И.О. Семипалатинск: СГПИ, 2005. — 548 с.
2. Тапбергенов Т.С. Современные основы энзимной диагностики. Руководство для врачей. Семипалатинск, 2001. — 29 с.
3. Тапбергенов Т.С., Тапбергенова С.М. // Лабораторное дело. — 1984. — № 2. — С. 104—107.
4. Ташенов К.Т. Ким Т.Д. и др. Влияние свинца на некоторые показатели печени *in vivo* и *in vitro* // Актуальные проблемы экспериментальной и клинической физиологии: материалы науч.-практ. конф. посв. 10-летию Р.К. Алматы, 2001. — С. 350—531.
5. Ehlenberger A.G., McWilliams M., Phillips-Quagliata J.M. et al. Immunoglobulin-bearing and complement-receptor lymphocytes constitute the same population in human peripheral blood // *J Clin Invest.* — 1976. — Vol. 57 (1). — P. 53—56.
6. Groscurth P. Cytotoxic effector cells on the immune system. // *Anat. and embriol.* — 1989. — № 2. — P. 109—119.
7. Jondal M., Holm G., Wigzell H. Thyroid hormones // *J.Exp., Med.* — 1972. — № 136. — P. 207—209.
8. Limatibul S., Shore A., Dosch H.M., Gelfand W. Theophyllini modulation of E rosette formatio. — 1999. — № 3. — P. 503—510.

#### 4.4. БОТАНИКА

### МОРФОЛОГИЧЕСКОЕ И АНАТОМИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ГОДИЧНОГО ПОБЕГА *SICHRIUM INTYBUS L.* В УСЛОВИЯХ КАЛМЫКИИ

***Дорджиева Виктория Ильинична***

*канд. биол. наук, преподаватель кафедры ботаники и зоологии,  
доцент Калмыцкого Государственного Университета,*

*РФ, Республика Калмыкия, г. Элиста*

*E-mail: [Ochirov\\_sergey@list.tu](mailto:Ochirov_sergey@list.tu)*

***Очиров Сергей Батнасанович***

*учитель химии и биологии*

*МБОУ «Ики-Бурульская СОШ им. А. Пюрбеева»,*

*РФ, Республика Калмыкия, пос. Ики-Бурул*

*E-mail: [Ochirov\\_sergey@list.tu](mailto:Ochirov_sergey@list.tu)*

***Мукабенова Лариса Игоревна***

*студент 4 курса кафедры ботаники и зоологии*

*Калмыцкого Государственного Университета,*

*РФ, Республика Калмыкия, г. Элиста*

*E-mail: [id-zula@mail.ru](mailto:id-zula@mail.ru)*

# MORPHOLOGICAL AND ANATOMICAL STRUCTURE OF THE ANNUAL ESCAPE CICHRIUM INTYBUS L. IN THE CONDITIONS OF KALMYKIA

***Dordzhieva Victoria Ilinichna***

*cand. Biol. Sciences, lecturer in botany and zoology,  
associate Professor of Kalmyk State University,  
Russia, the Republic of Kalmykia, Elista*

***Ochirov Sergey Batnasanovich***

*chemistry and biology teacher  
of MBOU «Iki-Burul school them. A. Purbeeva»,  
Russia, the Republic of Kalmykia, Iki-Burul*

***Mukabenova Larisa Igorevna***

*4th year student of the Department of botany and zoology  
of the Kalmyk State University,  
Russia, the Republic of Kalmykia Elista*

## АННОТАЦИЯ

Изучено морфолого-анатомическое строение годичного побега *Cichrium intybus* L. Использован метод микроскопии и описание анатомических рисунков. Определены основные особенности строения в условиях аридного климата.

## ABSTRACT

Studied morphological, anatomical structure of the annual escape *Cichrium intybus* L. Used the method of microscopy and description of anatomical drawings. Defines the main features of the structure in conditions of arid climate.

**Ключевые слова:** морфология; анатомия; эпидерма; листовая пластинка; стебель.

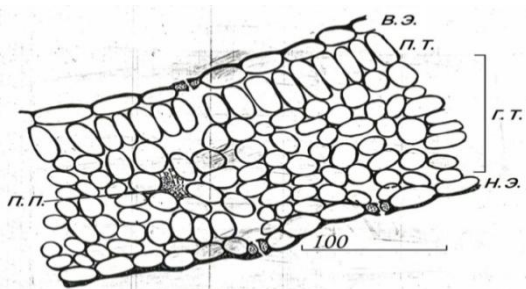
**Keywords:** morphology; anatomy; epidermis; leaf; stem.

Цикорий обыкновенный известен ценный медонос и лекарственное растение [1]. Сезонная и погодная динамика, пространственная организация, популяционное поведение *C. intybus* L. рассматриваются в ряде работ [2—3].

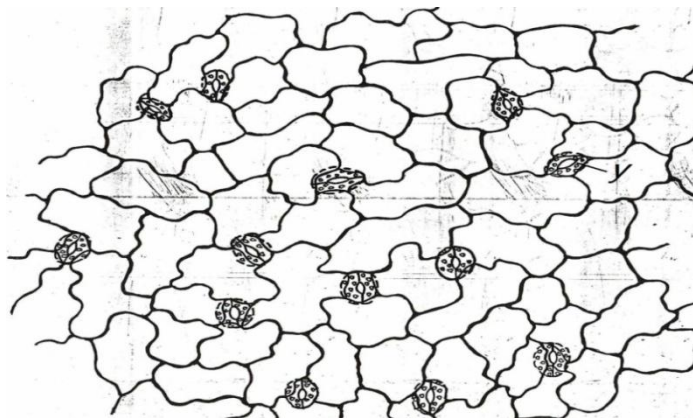
В данной работе установлена анатомическая структура листа и стебля *C. intybus* L. произрастающего в Калмыкии.

В условиях нашей республики побег *C. intybus* L. к концу июня, когда рост полностью завершен, достигает до 54 см (выборки из 3х популяций, по 20 побегов из каждой популяции; в окрестностях г. Элисты). Амплитуда изменчивости признака от 26 до 88 см. В это время в розетке сохраняется в среднем 6—7 листьев, при размахе изменчивости от 0 до 14. В среднем по высоте побега закладывается 14—15 боковых фотосинтезирующих органов (от 2 до 31). В нижней части ортотропного главного стебля 3—4 листа без пазушных побегов; в средней — 2—3 с пазушными побегами и в верхней части — 8—9 листьев с корзинками в пазухе. Завершает побег отдельная корзинка. Наиболее развитый лист розетки достигает в длину — 12,8 см (от 4,0 до 20 см) и в ширину — 3,12 см (от 0,5 до 4,5 см).

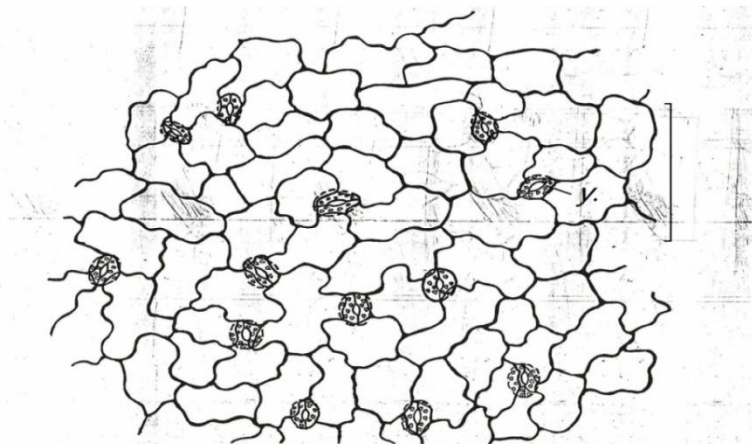
Анатомическая структура рассмотрена на примере одного из листьев розетки. Дорсовентральный мезофилл составлен одним слоем столбчатой и 5—7 слоями губчатой ткани. Толщина пластинки листа 170 мкм, при этом на столбчатый слой клеток приходится лишь 25 % толщины мезофилла, остальная часть довольно рыхло расположенная губчатая ткань (Рис. 1). Амфистоматный лист, анамоцитные устьица. На нижней эпидерме устьиц, больше чем на верхней: на 1 мм<sup>2</sup> — 250 и 175 соответственно. Устьица на треть меньше по размерам, чем на эпидерме стебля (Рис. 2, 3). Устьица на верхней эпидерме расположены на одном уровне с покровными клетками, а на нижней эпидерме расположены чуть ниже уровня основных эпидермальных клеток. В данной работе рассматривался лист розетки осенней генерации (22.09.12 г.). Розеточный лист летней генерации (2.07.12 г.) более толстый (до 230 мкм) и сложен большим числом слоев мезофилла (до 10—12). Столбчатая ткань не четко выражена.



**Рисунок 1. Анатомическое строение розеточного листа *Cichorium intybus* L. (22.09.12): в.э. и н.э. — верхняя и нижняя эпидермы; п.т. и г.т. — палисадная и губчатая ткань; у. — устьица; п.п. — проводящий пучок**



**Рисунок 2. Анатомическое строение верхней эпидермы розеточного листа: у. — устьица; о.в. — основание волоска**



**Рисунок 3. Анатомическое строение нижней эпидермы розеточного листа**

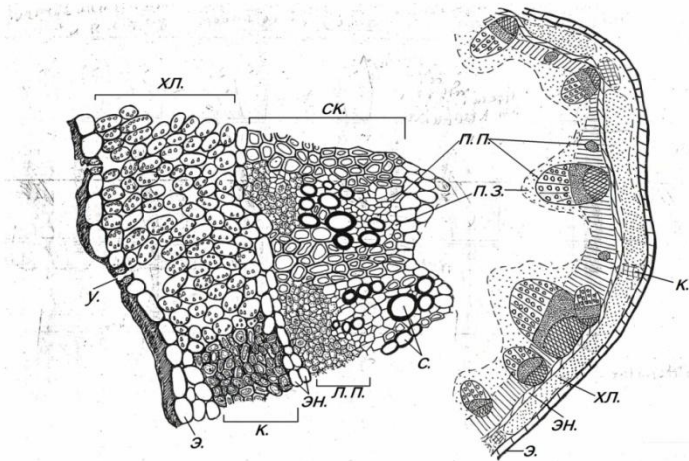
Анатомическая структура стебля Цикория обыкновенного рассмотрена на примере закончившего рост годичного побега (окрестности г. Элиста, 22.09.12 г.). Срез сделан ближе к верхней части стебля. Грани слабо выражены в числе 8—11. Эпидерма составлена из довольно крупных клеток: 20—28 x 12—16 мкм (ширина x высота). Высота кутикулы местами не уступает высоте самих эпидермальных клеток. Под эпидермой в коровой паренхиме широкие участки

хлоренхимы чередуется с небольшими островками колленхимы. Последние приурочены к граням (Рис. 4 схема, увел.7x8). Склеренхимное кольцо с встроенными проводящими пучками отделяется от коровой паренхимы эндодермой. Степень развития коллатеральных проводящих пучков различна: от чисто флоэмных мелких, до крупных с мощно развитой лубяной склеренхимой и небольших — без последней, т. е. состоящей из ксилемы с мягким лубом (Рис. 4). Часто лубяная склеренхима отсутствует или слабее выражена по местам расположения колленхимных островков под эпидермой стебля. Сосуды в ксилемной части проводящих пучков большей частью собраны радиальными рядами, реже разбросаны беспорядочно. Вокруг сосудов выражена древесная паренхима. Между пучками правильными радиальными рядами проходят клетки склеренхимы. Толщина склеренхимного кольца от 50 до 130 мкм. Сердцевина разрушена.

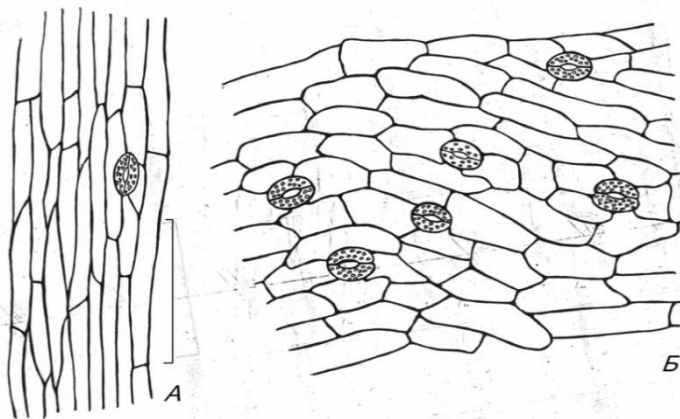
Нами рассмотрена эпидерма стебля. На гранях она составлена из прозенхимных клеток от 40—160 мкм длиной и 10—14 мкм шириной. Длинная ось направлена по высоте стебля. Единичные устьица встречаются на местах перехода к углублениям между гранями. Над хлоренхимой (по углублениям) клетки эпидермы столбчатой формы 40—90 x 12—30 мкм. Устьица значительно крупнее, чем на эпидерме листьев (Рис. 5), до 30x22 мкм, анамоцитного типа, окружены 4 (редко 5) клетками; до 100 устьиц на 1 мм<sup>2</sup>, что в 2—2,5 раза меньше, чем на листьях. Если учесть, что хлоренхима под эпидермой между гранями составлена из 6—8 слоев клеток (Рис. 4), то можно сделать вывод об активном участии молодой части стебля в фотосинтезе наряду с листьями.

Следует отметить, что к завершению роста ортотропного побега в высоту, часть розеточных листьев отмирает, а стеблевые листья имеют незначительную фотосинтезирующую поверхность, то вклад хлоренхимы стебля играют большую роль в автотрофном питании. Цветение и плодоношение на побеге весьма продолжительное с VI по IX(X). При этом число соцветий в пазухе мелких листьев среднего и верхнего яруса может колебаться от одного до нескольких. На главном ортотропном побеге в условиях нашей республики к концу июня можно насчитать от 4 до 40 соцветий, в среднем 18 (без учета боковых пазушных побегов с корзинками).





**Рисунок 4. Схема и анатомическое строение стебля:**  
 у. — устьица; э. — эпидерма с кутикулой; к. — колленхима;  
 хл. — хлоренхима; эн. — эндодерма; ск. — склеренхимное кольцо;  
 п.п. — проводящие пучки; ф. — флоэма; с. — сосуды;  
 л.п. — лубяная паренхима; п.з. — перимедулярная зона



**Рисунок 5. Анатомическое строение эпидермы стебля:**  
 А — на гранях; Б — между гранями над хлоренхимой

В условиях Калмыкии ортотропный вегетативно-генеративный побег *S.intybus* L. достигает в среднем до 54 см (от 26 до 88), в розетке сохраняется до 6—7 листьев (от 0 до 14), а по высоте побега закладывается 14—15 листьев (от 2 до 31). Наиболее развитый лист розетки достигает в длину 12,8 и в ширину 3,12 см. В среднем на побеге (конец июня) закладывается и развивается до 18 корзинок (без учета корзинок на пазушных побегах), при норме реакции от 4 до 40 соцветий.

Под эпидермой стебля чередуются широкие участки хлоренхимы с небольшими островками колленхимы по граням. Склеренхимное кольцо отделяется от коровой паренхимы эндодермой. В кольцо склеренхимы включены проводящие пучки: крупные с мощной лубяной склеренхимой, мелкие — флоэмные или почти флоэмные с несколькими сосудами и средние по размерам — из мягкого луба и ксилемы.

Толщина листовой пластинки наиболее развитого листа осенней генерации составляет 170 мкм. Дорсо-вентральный мезофилл из одного слоя палисадной (25 % толщины мезофилла) и 5—7 слоев губчатой тканей. Амфистоматный лист. Анамоцитные устьица. Мезофилл наиболее развитого листа летней генерации составлен 10—12 слоями: палисадная ткань четко не представлена. Толщина пластинки на 20—30 % превышает толщину пластинки осенней генерации. Изменение толщины листовой пластинки можно связать с возрастанием числа слоев губчатой ткани мезофилла при понижении температуры.

Широкая норма реакции по высоте побега, по числу листьев и соцветий на побеге, по параметрам фотосинтезирующих органов обеспечивает высокий уровень адаптации к полупустынным условиям Калмыкии.

Сильно растянутый период цветения и плодоношения, активное участие в фотосинтезе хлоренхимы стебля, развитие довольно крупных семянков обеспечивает растению не только адаптацию к различным условиям среды, но и расширение ареала обитания и процветание.

Однако, антропогенное воздействие (выпас скота, распашка, освоение целинных земель, мелиорация и т. д.) сводит на нет потенциальные возможности рассматриваемого вида, отодвигая его на обочины дорог, пустыри и склоны.

### **Список литературы:**

1. Махлаюк В.П. Лекарственные растения в народной медицине. М.: Нива России, 1992. — 477 с.
2. Никулин А.В., Олейникова Е.М. Пространственная организация ценопопуляций *Cichorium intybus* L. // Успехи современного естествознания. — 2003. — № 9. — с. 70—71.
3. Хмелев К.Ф., Никулин А.В., Олейникова Е.М. Сезонная и погодная динамика численности *Cichorium intybus* L. в Русской лесостепи. // Раст. Ресурсы. — 2003. — Т. 39, — № 1, — с. 3—11.

## **АНАЛИЗ ФЛОРИСТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ В ЛАНДШАФТАХ ТАЛГИНСКОГО УЩЕЛЬЯ АРИДНЫХ ПРЕДГОРИЙ ДАГЕСТАНА**

*Магомедова Мадина Абдулмаликовна*

*д-р биол. наук, профессор ДГУ,  
РФ, г. Махачкала*

*E-mail: [djamelia@inbox.ru](mailto:djamelia@inbox.ru)*

*Гасанова Оксана Омаровна*

*магистр кафедры ботаники ДГУ,  
РФ, г. Махачкала*

*E-mail: [djamelia@inbox.ru](mailto:djamelia@inbox.ru)*

## **ANALYSIS OF FLORAL COMPLEXES IN LANDSCAPES OF THE RAVIN TALGINSKOE IN DAGHESTAN ARID FOOTHILLS**

*Madina Magomedova*

*doctor of biology sciences, professor of Daghestan State University,  
Russia, Makhachkala*

*Oksana Gasanova*

*magistr of botany department of Daghestan State University,  
Russia, Makhachkala*

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.В37.21.0192 «Закономерности изменения биологического разнообразия компонентов наземных и морских экосистем в условиях изменяющегося уровня режима Каспия»*

#### **АННОТАЦИЯ**

Талгинское ущелье предгорий представляет рефугиум разноценотических биот, которым присуще слабое задернение и ксероморфность. Это связано с условиями пересеченного и скалистого рельефа, который создает широкий диапазон параметров среды обитания. Здесь распространены разные группы петрофитов со специфическими экологическими адаптациями.

#### **ABSTRACT**

The ravine Talginskoe in foothills is the reservoir of the different phytocoenosis which have xerophytical character. The reason for that is the zonal relief. It makes broad range in habital parametres. Different petrophytical groups with the specific ecological adaptations are spreading here.

**Ключевые слова:** фитоценозы; петрофильные виды; адаптация; ксерофиты.

**Keywords:** phytocoenosis; petrophytical species; adaptation; xerophytical species.

Талгинское ущелье — это место, где заканчивается низменная часть Дагестана и начинаются горы. Оно имеет резко вычерченный горный рельеф и характеризуется расчлененностью, разновысотностью и повсеместным обнажением скальных материнских пород. От Каспийского моря ущелье отделено крупными массивами Таркитау и Нараттубе, что способствует сдерживанию облаков. Общая протяженность Талгинского ущелья около 4 км. Ширина его в узкой части не превышает 10—15 м, высота над уровнем моря наивысшей точки составляет около 650 м. Слоистые стены ущелья вздымаются до 200 м высоты и обрушиваются почти отвесно. Скалы перемежаются с сильно подвижными щебнистыми, но более пологими осыпями. Все это создает вид безжизненного пейзажа, где почвенный покров развит лишь на пологих гребнях ущелья и его дне. Одной из климатических особенностей Талгинского ущелья является частая облачность при большой сухости воздуха и мизерности атмосферных

осадков (300—400 мм), поэтому территория безводная, особенно в летнее время.

Известно, что ущелье относится к предгорному флористическому району и к северному подрайону дагестанской провинции Кавказа [6, с. 18]. Его природа своеобразна и уникальна, поскольку географическое местоположение, геологическая история, ландшафтная мозаичность и климат создали широкий диапазон параметров среды обитания и условий для развития разнообразного растительного покрова. Поэтому, несмотря на компактность территории, здесь можно выделить несколько типов растительности. У начала ущелья выражена солонцеватость, что способствует развитию полупустынных галофитов. Глинистые почвы на щебнисто-скальных склонах не засолены, т. к. постоянно промываются дождевыми потоками. Это благоприятствует развитию сухого редколесья, которое сгущается на дне ущелья, имеющего уклон от 650 м н.у.м. до 150. Хребтовые поднятия покрыты нагорно-ксерофильной растительностью, куда наряду с кустарниками и кустарничками входит много травянистых фитоценозов. На гребнях раскинулись горные степи и повсеместно-скально-осыпная растительность [2, с. 180; 3, с. 68]. То есть, несмотря на свои малые размеры, по ландшафтному и видовому разнообразию Талгинское ущелье может состязаться со многими областями Дагестана и Кавказа [9, с. 22; 1, с. 96; 7, с. 96; 5, с. 111].

Вопреки всем климатическим невзгодам, природа собрала здесь богатую коллекцию сосудистых растений из 525 видов, 299 родов и 74 семейств, что составляет 16,3 % от всей флоры Дагестана. Важной ее особенностью является наличие специфических представителей со статусом эндемиков, реликтов и краснокнижных растений: 37 (7,4 %) относятся к эндемикам; 33 (6,3 %) занесены в красные книги России и Дагестана; а отдельные элементы растительного покрова (19,1 %) сохранились здесь с третичного времени, когда хребты были покрыты густыми можжевельновыми лесами. То есть, совокупный генофонд подобных растений Талгинского ущелья составляет 140 видов (26,7 %), т. е. четвертую часть, что позволяет считать его естественным рефугиумом для данных элементов.

Таким образом, Талгинское ущелье как типичная территория предгорного Дагестана, характеризуется высокой степенью гетерогенности флоры благодаря взаимопроникновению представителей как горных, так и равнинных элементов. С другой стороны, специфика растительного покрова напрямую зависит от условий существования и сезона года [4, с. 78; 10, с. 85]. К лету растительный покров полностью выгорает, но в весеннее время местами он образует

сплошной и густой ковер со злаками из *Festuca* L., *Phleum* L., *Poa* L., *Stipa* L. и расцвечен ярко цветущими *Inula* L., *Verbascum* L., *Phlomis* L., *Salvia* L.

Доминируют представители каменисто-щебнистых субстратов (табл. 1).

**Таблица 1.**

**Фитоценотическая принадлежность**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кол-во	140	117	106	92	84	58	24	17	7
%	21,7	18,1	16,6	14,2	13,0	8,9	3,7	2,6	1,1

Примечание: 1 — скально-осыпной, 2 — колюче-кустарниковый, 3 — степной, 4 — лугово-степной; 5 — сорный, 6 — лесной, 7 — увлажненный, 8 — песчаный, 9 — солончаковый

Далее следуют виды колюче-кустарникового фитоценоза (18,1 %). Это представители шибляков с густыми зарослями из *Spiraea hypericifolia* L., *Rhamnus pallasii* Fisch. и т. д. Несколько меньше растений сухостепных ценозов (16,6 %). К лету, на фоне ухудшения водоснабжения, они полностью выгорают, но в весеннее время на уплощенных гребнях растительный покров густ и сомкнут. Виды лугово-степного типа занимают четвертую позицию (табл. 1) во флоре Талгинского ущелья по разнообразию (14,2 %). Лесные элементы играют более скромную роль (8,9 %). Но, несмотря на это, их присутствие свидетельствует о когда-то распространенных, а ныне — почти исчезнувших лесах (арчевники). Помимо этих разреженных реликтовых остатков в настоящее время здесь произрастают дикие плодовые деревья: груша, яблоня, алыча, кизил. Расщелины скал, куда затруднено проникновение солнечных лучей, достаточно долго сохраняют влагу и являются пристанищем влаголюбивых видов: *Asplenium trichomanes* L., *Parietaria judaica* L. Галофиты распространены у начала ущелья, где аккумулируются соли, вымытые из него дождевыми потоками. Это обуславливает произрастание таких видов как *Limonium meureri* (Boiss.) O. Kuntze, *Peganum harmala* L., *Zygophyllum fabago* L., *Eremopyrum orientale* L. Продукты выветривания материнской породы являются субстратом для псаммофильных видов: *Jurinea ciscaucasica* (Sosn.) Pjin., *Chondrilla juncea* L. Особо следует отметить *Jurinea arachnoidea* Bunge, *Erysimum subsrtrigosum* (Rupr.) N.Busch, *Gypsophila capitata* Bieb., *Oxytropis pallasii* Pers. и т. д., являющиеся индикаторами меловых отложений.

Современный облик растительного покрова Талгинского ущелья формируют не только естественные факторы. В последнее время сильное экологическое напряжение обуславливается антропогенным давлением. Этому свидетельствует сорная группа растений (табл. 1), преимущественно локализованных на дне ущелья, но способных подниматься по каменистым склонам и щебням к самым гребням, а в начале ущелья образующих сплошные заросли, заглушающие остальные виды. То есть современные тенденции изменения флоры направлены в сторону резкого расширения фиторазнообразия за счет несвойственных естественным сообществ заносных сорных видов.

Горный рельеф Талгинского ущелья характеризуется не только расчлененностью, но и сильным обнажением материнских пород, где почти всю площадь занимают скалы, осыпи и разной плотности щебнистый субстрат. Поэтому, как и следовало ожидать в подобной среде, наблюдаются нарушение и повреждение целостности растительного покрова, сильная разреженность, слабая задерненность, ксероморфность и самое основное — медленное восстановление. Это показатели природной экологической напряженности. Поэтому здесь немало видов с узкой экологической амплитудой существования (24,4 %), являющихся стенотопными по отношению к тому или иному фактору среды. Но, несмотря на естественный экологический стресс, аборигенные элементы поразительно стойки и жизнеспособны. Во всех экосистемах отлажен исторически сложившийся режим гармоничного сосуществования и функционирования различных сообществ, с оптимальной к данным условиям природно-рекреационной способностью и возможностью обмена генофондом.

Как отмечалось выше, наибольшее количество представителей флоры Талгинского ущелья являются обитателями каменисто-щебнистых субстратов (табл. 1). Сюда относятся самые разнообразные в систематическом отношении травянистые и шибляковые сообщества, в основном, ксерофильного характера с разной степенью разреженности и покрытия. Классификация растительного покрова по предпочтению субстрата произрастания позволил произвести следующую группировку: непетрофильные виды, факультативные петрофиты, облигатные петрофиты (табл. 2). Непетрофиты это случайные растения, растущие на хорошо задерненных каменистых участках, покрытых маломощными почвами. Они могут быть привязаны к двум и более ценоцитическим группам. Факультативные петрофиты широко распространены на обнаженных субстратах, но встречаются и в других местообитаниях. Облигатные произрастают только на обнаженных субстратах.

Исходя из характеристики и свойств обнажений, нами выделено три типа местообитаний: скалы и отколовшиеся каменные глыбы; закрепленный щебнистый субстрат; подвижные осыпи. Ценотипно строгие обитатели подобных мест являются облигатными петрофитами, среди которых выделяют хасмофиты (обитатели скал), гляреофиты (осыпи и другие подвижные субстраты) и хасмогляреофиты (индифференты), произрастающие на всех типах обнажений [8, с. 104]. Причем, облигатность петрофитов тоже не абсолютна и колеблется в широких пределах.

Петрофиты исследуемого района представлены 140 видами. Но облигатных петрофитов (хасмофиты, гляреофиты, индифференты), чье обитание вне каменистого субстрата — редкое исключение, все же незначительно (табл. 2). Таких видов 69 или около 50 % от петрофильной флоры. В их экологических спектрах преобладают индифференты (34,3 %), а самыми малочисленными являются хасмофиты (7,1 %).

**Таблица 2.**

**Экологические группы петрофитов (в % к петрофитам)**

	Непетрофиты	Петрофиты (140 видов)			
		Факультативные	Облигатные		
			Хасмофиты	Гляреофиты	Индифференты
Кол-во	385	71	10	11	48
%	—	50,7	7,1	7,9	34,3

Наиболее жизнестойкими среди них оказываются многолетники, успешно противостоящие частому повреждающему воздействию — *Hippomarathrum microcarpum* (Bieb.) V. Petrov, *Matthiola caspica* (Busch) Grossh., *Euphorbia gloreosus* (Bieb.) Prokh., *Teucrium polium* L. и т.д. Помимо них в данной среде обитания встречаются и факультативные петрофиты (50,7 %), а, кроме того, и совсем непетрофильные представители (табл. 2). Подтверждение этому — остальные произрастающие в Талгинском ущелье 385 видов растений, такие как *Orchis mascula* L., *Chelidonium majus* L., *Festuca ovina* L. и другие.

Распространение петрофитов в Талгинском ущелье вполне закономерно, т.к. узкая и специфичная среда обитания (скально-осыпной ландшафт, аридность) позволяет удерживаться здесь тем растениям и сообществам, чей адаптационный комплекс направлен не только на выживание, но и успешное существование



в естественных стрессорных условиях. Условия обитания петрофитов способствуют выработке сходных экологических признаков в разных систематических группах. Это приземистость, корявость, многоветвистость, опушенность, подушковидность, сезонная приуроченность. Однако невысокая биомасса, низкая сомкнутость покрова и малопродуктивность делают скальные ксероморфные сообщества медленно и трудно восстанавливаемыми в быстро меняющихся условиях, а значит неустойчивыми и уязвимыми.

Подобные характеристики, разнообразие фитоценологических комплексов с преобладанием скально-осыпных, колючекустарниковых, и степных элементов свидетельствуют о том, что структура растительного покрова отражает основные черты и особенности ландшафта Талгинского ущелья и служит индикатором его экологических условий обитания.

### **Список литературы:**

1. Аджиева А.И. Лекции по растительному покрову Дагестана: учебное пособие. Махачкала: Изд-во ДГУ, 2009. — 96 с.
2. Львов П.Л. Редкие растительные сообщества Дагестанской АССР// Растит. ресурсы. Р-на-Д: РГУ, — 1986. — Ч. 3. — С. 166—183.
3. Магомедова М.А. Основные черты флоры Талгинского ущелья (Предгорный Дагестан) в современное время// Тез. Докл. Междунар. научн. конф. «Изучение флоры Кавказа». Пятигорск: РИА-КМВ, 2010. — С. 68—69.
4. Магомедова М.А. О причинах разнообразия фитоценозов Талгинского ущелья Предгорий Дагестана // Вестник ДГУ. Махачкала, — 2011. — вып. 1. — С. 76—79.
5. Магомедова М.А., Яровенко Е.В., Аджиева А.И. Анализ некоторых локальных флор центрального предгорного Дагестана. Махачкала: ДГУ, 2013. — с. 111.
6. Муртазалиев Р.А. Конспект флоры Дагестана. Махачкала: Эпоха, — 2009. — т. 1. — 319 с.
7. Омарова С.О. Анализ флоры Дагестана. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2011. — 96 с.
8. Шагапсоев С.Х. Анализ петрофильного флористического комплекса Западной части Центрального Кавказа. Нальчик: Эль-фа, 2003. — 220 с.
9. Яровенко Е.В. Особенности флоры Нараттюбинского хребта Дагестана как транзитивной зоны // Автореф. дисс. к.б.н. Махачкала, 2005. — 22 с.
10. Яровенко Е.В., Абачев К.Ю., Магомедова М.А. Особенности флоры Нараттюбинского хребта // Бот. журн., — 2011, — Т. 96. — № 1. — С. 75—86.

**АНАТОМИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ МЕЖДОУЗЛИЙ  
ПОСЛЕДНИХ РЯДКОВ ВЕТВЛЕНИЯ  
VISCUM ALBUM L.**

***Очирова Кеemia Сергеевна***

*канд. биол. наук, ассистент кафедры ботаники и зоологии  
Калмыцкого Государственного Университета,  
РФ, Республика Калмыкия, г. Элиста  
E-mail: [Ochirov\\_sergey@list.tu](mailto:Ochirov_sergey@list.tu)*

***Дорджиева Виктория Ильинична***

*канд. биол. наук, преподаватель кафедры ботаники и зоологии,  
доцент Калмыцкого Государственного Университета,  
РФ, Республика Калмыкия, г. Элиста  
E-mail: [Ochirov\\_sergey@list.tu](mailto:Ochirov_sergey@list.tu)*

***Идрисова Зула Владимировна***

*студент 4 курса кафедры ботаники и зоологии  
Калмыцкого Государственного Университета,  
РФ, Республика Калмыкия, г. Элиста  
E-mail: [id-zula@mail.ru](mailto:id-zula@mail.ru)*

# THE ANATOMICAL STRUCTURE OF INTERNODES THE LAST ROWS OF THE BRANCHING OF *VISCUM ALBUM* L.

***Ochirova Keema Sergeevna***

*cand. biol. sciences, assistant Professor of botany and zoology  
of the Kalmyk State University,  
Russia, the Republic of Kalmykia, Elista*

***Dordzhieva Victoria Ilinichna***

*cand. biol. sciences, lecturer in botany and zoology, associate Professor  
of Kalmyk State University,  
Russia, the Republic of Kalmykia, Elista*

***Idrisova Zula Bladimirovna***

*4th year student of the Department of botany and zoology  
of the Kalmyk State University,  
Russian, the Republic of Kalmykia, Elista*

## АННОТАЦИЯ

Установлена структура вегетативных органов молодого побега *Viscum album* L. и отмечены адаптивные черты в анатомическом строении листьев и междоузлий к условиям произрастания в среднем горном поясе. Использован метод микроскопии и описание анатомических рисунков.

## ABSTRACT

A structure of vegetative organs of the young shoots *Viscum album* L. and marked adaptive traits in the anatomical structure of leaf and internodes of conditions in the middle mountain belt. Used the method of microscopy and description of anatomical drawings.

**Ключевые слова:** морфология; анатомия; междоузлия; листовая пластинка; средний горный пояс

**Keywords:** morphology; anatomy; internode; sheet plate; middle mountain zone.

Омела белая — дикорастущее лекарственное растение [2]. В литературе есть отдельные сведения по анатомии омелы окрашенной [3], по распространению растения на территории России [1].

В данной работе представлены сведения о структуре вегетативных органов молодого побега *Viscum album* L. и отмечены

адаптивные к условиям среднего горного пояса анатомические признаки листа и междоузлия.

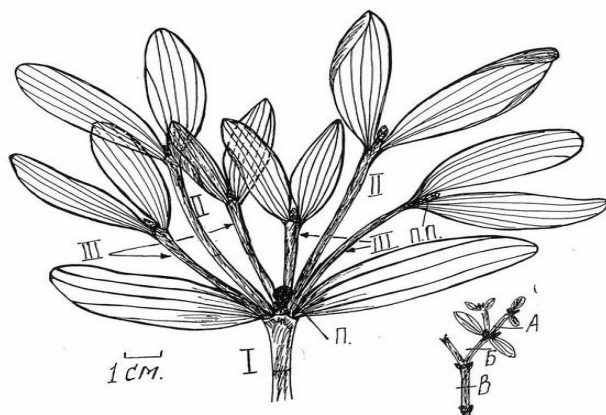
Материал для исследования был собран в июле 2007 и 2013 гг. на территории заказника «Камышанова поляна» (Краснодарский край). Омела белая в первом случае проросла на березе белой, а во втором на иве белой примерно на высоте около 7 и 3 м соответственно. Для анализа были взяты молодые побеги с сохранившимися фотосинтезирующими органами. Отдельные участки растения были зафиксированы в 70 % спирте. Анатомические срезы подготовлены по общепринятой методике. Рисунки выполнены с помощью РА-4. Анатомические срезы были сделаны на разных уровнях побега (через междоузлия диаметром 1,0; 1,5; 2,0; и 5,0 мм). Анатомия фотосинтезирующего органа рассмотрена на примере одного из почти закончивших рост листьев 2,2\*0,9 см. Прошлогодние листья, окончательно завершившие рост могут быть раза в два больше по линейным параметрам, в том числе и в толщину. При этом увеличение параметров происходит лишь за счет возрастания размеров клеток мезофилла, а не за счет деления клеток.

Шаровидная форма *Viscum album* моментально привлекает внимание на кроне дерева-хозяина, особенно зимой. Вильчатое ветвление и супротивное расположение крупных, почти сидячих (безчерешковых), кожистых, темно-зеленых, продолговато-овальных по форме листьев усиливает необычный облик растения. Раздельнополые, желто-зеленые, мелкие цветки сидят по 5—6 в развилинах ложнодихотомически ветвящихся побегов. Цветет в апреле-мае: ♂ P<sub>3-4</sub> A<sub>3-4</sub> G<sub>0</sub>, ♀ P<sub>3-4</sub> A<sub>0</sub> G<sub>3-4</sub>. Плоды созревают осенью: белые сочные ягоды до 1 см в диаметре, с 1—2 семенами, окруженными клейкой массой и сохраняются зимой.

На схематическом рисунке показана верхушечная часть побега с тремя наиболее молодыми междоузлиями I, II, III (рис. 1.). На всех уровнях среза (А, Б, В) в средней части междоузлия стебель имеет типичное для двудольных растений строение.

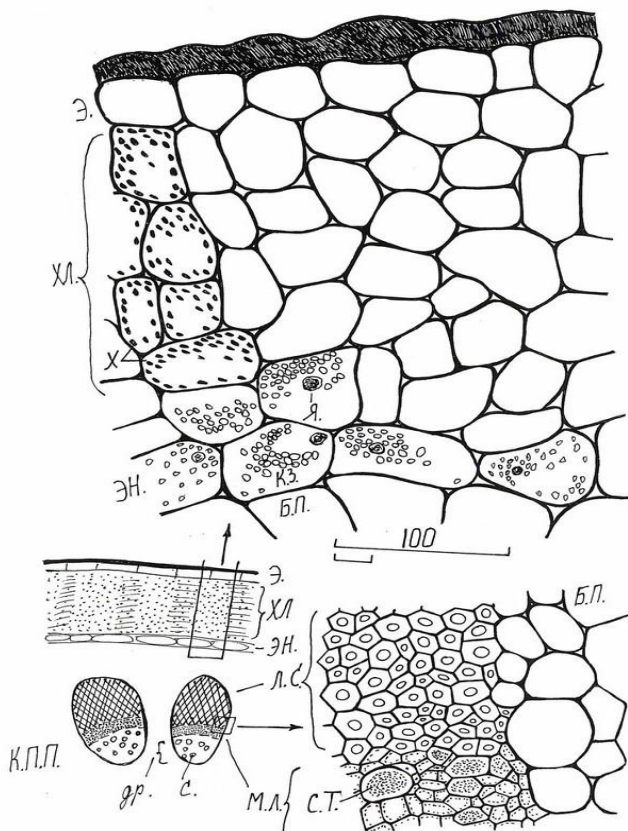
Побеги диаметром от 1 до 5 мм с 8 коллатеральными проводящими пучками. На уровне самого молодого междоузлия последнего порядка ветвления (диаметром до 1 мм, с 2 листьями 6\*3 мм, уровень А) над эпидермой побега хорошо выражена кутикула, которая местами составляет до половины толщины самой эпидермы (рис. 2). На эпидерме крупные устьица 40—60 мкм, длинная ось которых направлена по ширине побега. Число устьиц до 150 на 1мм<sup>2</sup>, что значительно больше, чем на листьях. Устьица ананоцитные. Хлоренхима под эпидермой стебля, из 4—6 слоев клеток, до 200 мкм,

толщиной прилегает к эндодерме. Последняя четко выражена на фоне остальных клеток: это один (местами 2) слой клеток с крупными ядрами и цитоплазмой забитой крахмальными зернами. Под эндодермой до лубяной склеренхимы расположены до 3—4 слоев бесцветных клеток коровой паренхимы. Обычно эндодерма прилегает к флоэме, но в данном случае у омелы белой она намечает границу между хлоренхимной и бесцветной частью первичной коры. Проводящие пучки с сердцевинной представленны эустелой. От трети до половины толщины проводящих пучков стебля составляет лубяная склеренхима (100—150 мкм), мягкий луб до 30—80 мкм. Ситовидные трубки имеют в два-три раза больший диаметр, чем окружающие их клетки лубяной паренхимы (рис. 2, рис. 3А)



**Рисунок 1.** *Верхушечная часть побега с тремя междуузлиями последних порядков (I, II, III) ветвления.*  
(п. — плод, п.п. — пазушные почки, А, Б, В — уровни среза с побега)

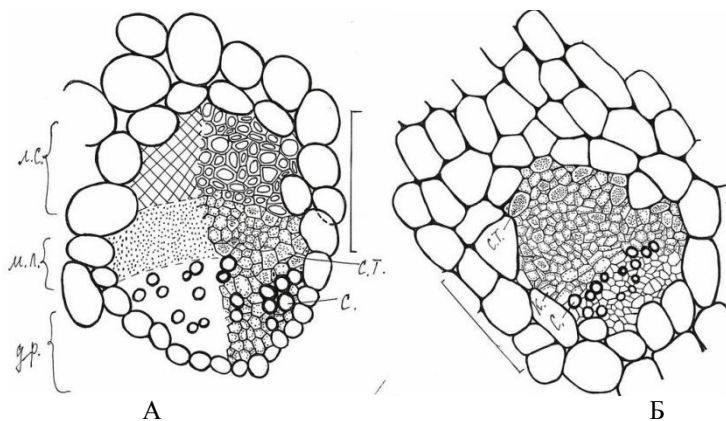
В ксилемной части сосуды, диаметром от 4 мкм, в первичной, и до 12 мкм во вторичной ксилеме разбросаны беспорядочно. Междуузлие завершает два супротивных листа с 2 верхушечными, в данном случае, пазушными почками.



**Рисунок 2. Схема (участок) и анатомическое строение междоузлия последнего порядка ветвления (уровень А). э. — эпидерма, хл. — хлоренхима, эн. — эндодерма, к.п.п. — коллатеральные проводящие пучки, б.п. — бесцветная коровая паренхима, л.с. — лубяная склеренхима; м.л. — мягкий луб, х. — хлоропласты, я. — ядро, к.з. — крахмальные зерна, др. — древесина, с. — сосуды, с.т. — ситовидные трубки**

В молодых фотосинтезирующих органах завершающих рассматриваемое междоузлие неясно выражены до 5 почти параллельно идущих проводящих пучков (между ними мелкие чисто флоэмные проводящие пучки). Наиболее развитый центральный проводящий пучок достигает до 140 мкм, до 70 % из которых составляет мягкий

луб. В отличие от проводящих пучков стебля, в пучках листьев отсутствуют лубяная склеренхима, но местами сохраняется камбий. Ситовидные клетки значительно крупнее, чем окружающие их клетки лубяной паренхимы, сосуды разбросаны между клетками древесной паренхимы без особого порядка (рис. 3Б).

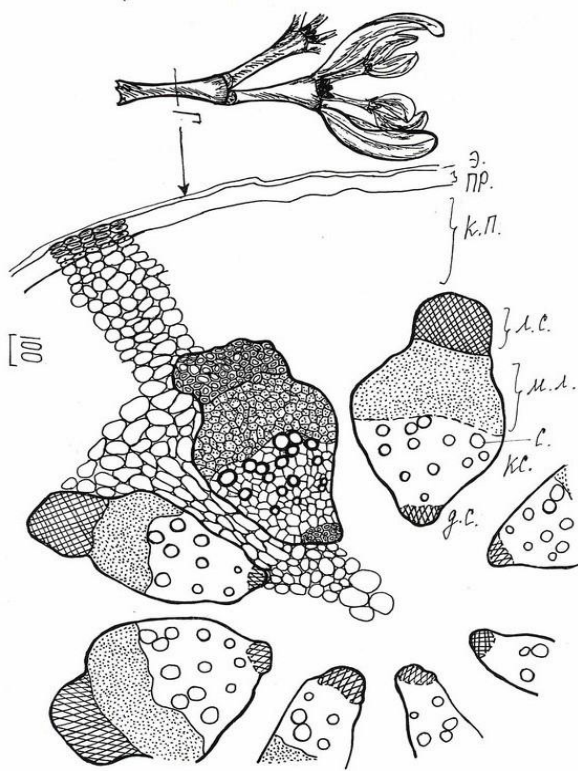


**Рисунок 3. Анатомическое строение проводящего пучка междоузлия диаметром 1,0 мм (А) и несущего листа 6\*3 мм (Б): к. — камбий, остальные обозначения как на рис. 2**

Отсутствие механической ткани в проводящих пучках, скорее всего, связано с тем, что лист находится в фазе активного роста. На данный момент он достиг лишь 1/8 от окончательного размера.

На уровнях срезов Б и В сохраняется такая же структура стебля, лишь клетки составляющие коровую паренхиму и параметры тканей проводящих пучков значительно увеличиваются (в основном за счет растяжения клеток коровой паренхимы, число же их не изменяется). Диаметр же сердцевины уменьшается за счет сближения более крупных (чем на уровне А) проводящих пучков. Вниз по междоузлию побега (междоузлие в средней части до 3 мм, а на узлах до 12 мм) ксилемная часть проводящего пучка увеличивается настолько, что преобладает над флоэмной. Все 8 проводящих пучков образуют почти сплошное кольцо мягкого луба и древесины. Границы отдельных проводящих пучков намечены 1—2 радиальными паренхимными клетками, которые соединяют узкую сердцевину с коровой паренхимой. Арматурную функцию выполняют довольно мощная «шляпка» лубяной склеренхимы, утолщенные стенки сосудов

и участки древесной склеренхимы, прилегающие со стороны сердцевины. Под эпидермой закладывается феллоген, который создает производные в обе стороны. В основании каждого междоузлия между двумя супротивными листьями закладываются сначала генеративные почки (цветение весной, плодоношение осенью и плоды сохраняются зимой), позже две пары вегетативных пазушных почек.



**Рисунок 4. Схема строения участка междоузлия ( $d = 5$  мм).  
 пр. — перидерма, кс. — ксилема, д.с. — древесная склеренхима,  
 стальные обозначения как на рис. 2**

На схематическом рисунке через междоузлие толщиной в 5 мм (рис. 4.) также сохраняется 8 проводящих пучков. По сравнению с уровнем А последние значительно увеличиваются как в длину,



так и в ширину: с 200—380 \* 150—200 мкм до 600—700 \* 300—500 мкм, (длина и ширина).

Увеличение параметров проводящего пучка происходит в основном за счет мягкого луба и ксилемы. Лубяная склеренхима сохраняется почти без изменений, поэтому она остается над широким мягким лубом в виде узкой «шляпки». Со стороны сердцевины, по месту расположения первичной ксилемы возникает участок сплошной древесной склеренхимы. Клетки древесной склеренхимы значительно уступают в диаметре клеткам твердого луба. Расположение и число ксилемы на всех схемах соответствует истине. Сравнив два схематических рисунка (рис. 2 и рис. 4) сделанные при одинаковом увеличении микроскопа можно получить представление не только о возрастании параметров проводящих пучков, составляющих их тканей, но и увеличении сосудов в диаметре. Под эпидермой междоузлия в 5 мм, идет заложение перидермы. А хлоропласты в хлоренхиме разрушаются, и коровая паренхима становится полностью бесцветной. Однако, эпидерма местами сохраняется даже на поверхности многолетнего побега, который в средней части междоузлия доходит до 12 см.

### **Заключение**

Самое молодое междоузлие последнего порядка ветвления заканчивается 2 (4) верхушечными почками между двумя супротивно расположенными листьями. На поперечном срезе через междоузлие четко просматривается 8 коллатеральных проводящих пучков вокруг сердцевины. От трети до половины своей ширины проводящие пучки сложены лубяной склеренхимой с настолько толстой клеточной оболочкой, что просвет в них остается в виде небольшого отверстия. В мягком лубе, которая остается между лубяной склеренхимой и ксилемой в виде узкой полосы, среди клеток лубяной паренхимы выделяется довольно крупными ситовидные трубки с клетками спутниками. Сосуды в древесине разбросаны без особого порядка. Как правило, эндодерма в эустеле двудольных растений прилегает к проводящим пучкам. Но в междоузлии последнего порядка омелы белой эндодерма делит коровую паренхиму на хлоренхиму и бесцветную паренхиму. При этом клетки эндодермы на фоне других клеток выделяются не столько размерами, а, сколько крупными ядрами и цитоплазмой забитой крахмальными зёрнами.

Эпидерма междоузлий последних порядков ветвления диаметром (от 1 до 3 мм) снабжена крупными устьицами: 40\*60 мкм; длинная ось которых направлена по ширине побега. В отличие от эпидермы листьев устьица не паразитного, а анамоцитного типа и окружены

4 (5) околоустьичными клетками. Число устьиц по эпидерме побега до 150 на 1 мм<sup>2</sup>, что значительно больше чем на листьях. Последующие междоузлия второго и третьего порядка ветвления сохраняют общий план строения. Происходит лишь утолщение междоузлий в диаметре за счет увеличения объемов проводящих пучков: в длину — 3, а в ширину — 2 раза, по сравнению с проводящими пучками междоузлия последнего порядка ветвления. С возрастом под эпидермой закладывается феллоген, деятельность которого приводит заложению перидермы. Вся коровая паренхима представлена бесцветными клетками, т. е. по мере утолщения хлоропласты в хлоренхиме разрушаются.

### **Список литературы:**

1. Махлаюк В.П. Лекарственные растения в народной медицине. М: Нива России, 1992. — С. 78—90.
2. Щекина В.В., Крытов А.В. Эколого-анатомические адаптации в строение стебля однолетнего побега омелы окрашенной // Вест. Башкир. гос. аграр. Ун-та. — 2013. — № 1(25). — С. 107—108.
3. Атрошенко В.Н. др. О распространении плодов омелы окрашенной птицами на Дальнем Востоке России // Вест. Красноярского гос. аграр. Ун-та. — 2013. — № 11. — С. 138—140.

## **ОНТОГЕНЕТИЧЕСКИЕ СТРАТЕГИИ И ТАКТИКИ НЕКОТОРЫХ ДОМИНИРУЮЩИХ ВИДОВ ЗЛАКОВ ПРИБРЕЖНО-ВОДНОЙ РАСТИТЕЛЬНОСТИ ЛЕНО-ВИЛЮЙСКОГО МЕЖДУРЕЧЬЯ**

*Федорова Александра Ивановна*

*м.н.с., лаб. биологии луговых растений ИБПК СО РАН,*

*РФ, г. Якутск*

*E-mail: [nyrba\\_nps@mail.ru](mailto:nyrba_nps@mail.ru)*

# ONTOGENETIC STRATEGIES AND TACTICS OF SOME PREDOMINANT SPECIES OF CEREALS OF STREAMSIDE-AQUATIC VEGETATION OF THE LENA-VILYUI INTERFLUVE

*Aleksandra Fedorova*

*Junior research scientist of the laboratory of Biology of Meadow Plants,  
Institute for Biological Problems of Cryolithozone, Siberian Branch of RAS,  
Russia, Yakutsk*

## АННОТАЦИЯ

На основе морфометрических параметров впервые изучены онтогенетические стратегии и тактики ценопопуляций *Alopecurus arundinaceus* (Poir), *Beckmannia syzigachne* (Steud.) Fern, и *Calamagrostis langsdorffii* (Link) Trin. в условиях Лено-Вилуйского междуречья. По результатам исследования установлены, что у ЦП *Alopecurus arundinaceus* стрессово-защитная онтогенетическая стратегия, у ЦП *Beckmannia syzigachne* защитная онтогенетическая стратегия, а у ЦП *Calamagrostis langsdorffii* защитно-стрессовая.

## ABSTRACT

Based on the morphometric parameters ontogenetic strategies and tactics of cenopopulations of *Alopecurus arundinaceus* (Poir), *Beckmannia syzigachne* (Steud.) Fern, and *Calamagrostis langsdorffii* (Link) Trin. under the conditions of the Lena-Vilyui interfluve have been studied for the first time. According to the study results it is found that the cenopopulation of *Alopecurus arundinaceus* has a stressful-protective ontogenetic strategy, the cenopopulation of *Beckmannia syzigachne* has a protective ontogenetic strategy and the cenopopulation of *Calamagrostis langsdorffii* — a protective-stressful strategy.

**Ключевые слова:** онтогенетическая стратегия; тактика; морфометрия; ценопопуляция.

**Keywords:** ontogenetic strategy; tactics; morphometry; cenopopulation.

При анализе стратегий нужно обращать внимание на то, что стратегии это видовые характеристики, и познать их можно, только изучая позиции вида в разных сообществах, в разных местообитаниях. Стратегии видов представляют собой комплексы адаптаций, возникшие в результате естественного отбора и характеризующие наиболее общие приспособления видов

к факторам биотической и абиотической среды. Далеко не все виды растений обладают четко выраженной стратегией. Культурные растения не обладают стратегией, так как находятся в искусственно созданных местообитаниях, а их отношения с другими видами регулируются человеком [1].

Для оценки стратегий жизни растений все чаще используют подход, включающий анализ характера реагирования на стресс на организменном и популяционном уровнях. В соответствии с этим подходом нами были исследованы доминирующие виды прибрежно-водной растительности Лено-Виллойского междуречья.

Объекты исследования — *Alopecurus arundinaceus* (Poir), *Beckmannia syzigachne* (Steud.) Fern, *Calamagrostis langsdorffii* (Link) Trin., принадлежат к семейству Злаки или Мятликовые (Gramineae Juss., или Poaceae Barnh [8]. Эти растения устойчивы к выпасу, относятся к видам растений с устойчивой зимостойкостью и с устойчивой семенной продуктивностью [2]. Они широко распространены и доминируют особенно на засоленных и увлажненных лугах, по берегам рек, солончаках, болотах, у зарастающих озер, на лесных опушках, на гарях и представляют большое сельскохозяйственное значение и особый интерес для испытания в культуре [6].

**Цель исследования** — на основе морфометрических параметров изучить онтогенетические стратегии и тактики некоторых доминирующих видов злаков прибрежно-водной растительности Лено-Виллойского междуречья.

**Материал и методы исследований.** Исследования проведены в Нюрбинском районе Виллойской зоны Якутии. Изучены в природных условиях 7 ценопопуляций (далее ЦП) *Alopecurus arundinaceus*, 5 ЦП *Beckmannia syzigachne*, 4 ЦП *Calamagrostis langsdorffii*, которые отличаются по градиентам увлажнения, засоления, видовому составу и по степени антропогенного воздействия. Экологические условия местообитаний (увлажнение и богатство-засоленность почв) каждого сообщества определяли с помощью экологических шкал растений Якутии [7].

Распространение изучаемых ЦП по сообществам и оценка фитоценозов по экологическим шкалам представлено в таблице 1. По фактору увлажнения изученные сообщества встречаются от сухолугового (34,1 % ЦП, 53—63 ступени) до влажнолугового (45,9 % ЦП, 64—76 ступени) увлажнения, по фактору богатства засоленности занимают местообитания с довольно богатыми почвами (56,9 % ЦП, 10—13 ступени).

В каждой ЦП изучены организменные и популяционные признаки. Выборка особей в каждой ценопопуляции составила не менее 30 экземпляров среднегенеративного онтогенетического состояния.

Онтогенетические тактики и стратегии оценивали в соответствии методическими разработками Ю.А. Злобина [3], дополненной А.Р. Ишбирдина М.М. Ишмуратовой [4]. Типы жизненных стратегий даются по классификации Раменского-Грайма [5].

Полученные данные обработаны вариационно-статистическими методами с использованием пакета программ EXCEL и STATISTICA.

*Таблица 1.*

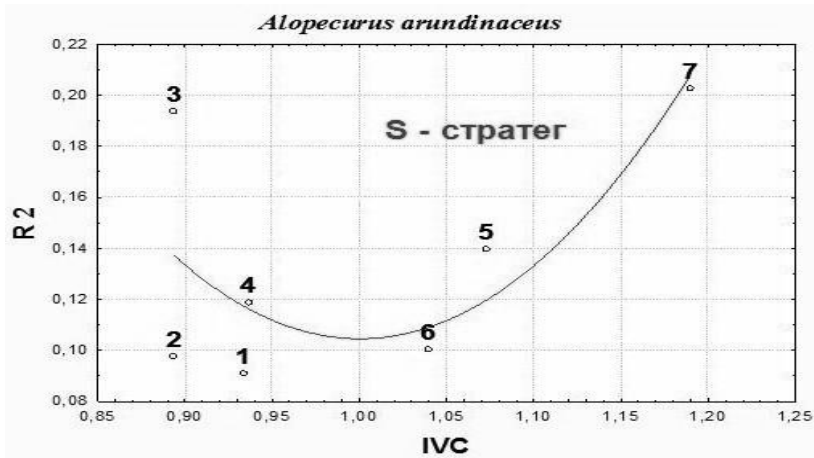
**Экологические показатели сообществ и изучаемых ценопопуляций**

Экологические показатели Название сообществ с ценопопуляциями	Балл по увлажнению	Балл по богатству почв — засолению	Роль в сообществе	Состояние виталитета	Степень антропогенной нагрузки
<i>Alopecurus arundinaceus</i>					
1. Лисохвостно-ячменный сухой луг	62,9	13,6	доминант	депрессив.	выше среднего
2. Лисохвостно-ячменный влажный луг	66,2	12,6	доминант	депрессив.	выше среднего
3. Клеверо-мышинорошковый сухой луг	59,8	12,7	спутник	депрессив.	выше среднего
4. Осоково-лисохвостный сухой луг	63,9	12,8	содоминант	равновесн.	средняя
5. Бекманниевосококовый влажный луг	67,3	12,9	содоминант	процвет.	—
6. лисохвостно-мышинорошковый сухой луг	60,8	12,9	доминант	процвет.	средняя
7. Бекманниевосококовый влажный луг	65,2	12,6	содоминант	процвет.	—

<i>Beckmannia syzigachne</i>					
1. Осоково-бекманиевый влажный луг	71,2	12,8	доминант	процвет.	—
2. Лисохвостно-ячменный влажный луг	65,3	13,0	содоминант	процвет.	Средняя
3. Лисохвостно-пырейный сухой луг	63,5	12,7	спутник	депрессив.	Средняя
4. Бекманиево-осоковый влажный луг	71,2	12,7	содоминант	процвет.	Средняя
5. Пырейно-бескильницевый влажный луг	64,3	13,1	спутник	депрессив.	Средняя
<i>Calamagrostis langsdorffii</i>					
1. Осоково-бекманиевый влажный луг	71,6	13,0	доминант	процвет.	—
2. Бекманиево-осоковый влажный луг	71,2	12,7	содоминант	депрессив.	Слабая
3. Вейниково-осоковый влажный луг	68,8	13,0	доминант	процвет.	Средняя
4. Осоково-пырейный сухой луг	63,8	13,4	содоминант	процвет.	Средняя

**Результаты исследования.** Анализ характера изменения морфологической интеграции растений генеративного состояния на экологическом градиенте по нашим данным установлено несколько типов реагирования на стресс — онтогенетических стратегий.

На градиенте ухудшения условий обитания у *Alopecurus arundinaceus* сначала происходит ослабление морфологической интеграции особей, что выражается в понижении индекса морфологической интеграции (от 0,20 до 0,09) проявляется стрессовая компонента, затем при дальнейшем ухудшении усиливается координированность развития растений на морфологическом уровне. Это выражается в повышении индекса морфологической интеграции (от 0,09 до 0,19) проявляется защитная компонента (Рис. 1).



**Рисунок 1.** Тренд онтогенетической стратегии ценопопуляции *Alopecurus arundinaceus* (Poir) (по оси абсцисс — IVC индекс виталитета, по оси ординат  $R^2_{ch}$  — коэффициент детерминации)

На установленном градиенте у ЦП *Alopecurus arundinaceus* выявлено два типа онтогенетических тактик: дивергентная и конвергентная. К дивергентной относятся такие признаки как высота побега, длина верхнего междоузлия, ширина 1-го листа, длина 2-го и 3-го листьев, длина влагалища 2-го и 3-го листьев, длина соцветия, к конвергентной относятся: число листьев, длина 1-го листа, ширина 2-го и 3-го листьев, длина влагалища 1-го листа

Оценка жизненности ЦП *Alopecurus arundinaceus* по размерному спектру показала, что в наиболее благоприятных условиях находятся растения ЦП 7, 5 произрастающие в увлажненном бекманниевосоковом. В наименее благоприятных условиях находятся растения ЦП 2, 3 произрастающие в сухих лисохвостно-ячменном и клеверомышиногоорошковом.

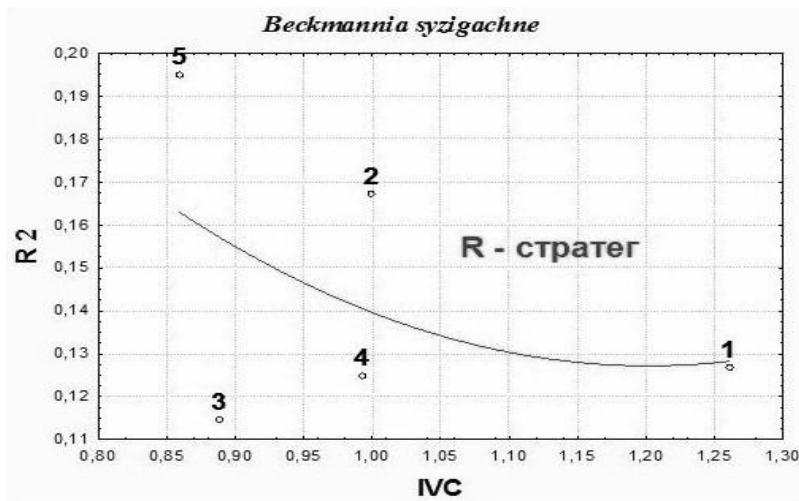
С ухудшением условий у *Beckmannia syzigachne* наблюдается повышение развития морфологических признаков и усиление морфологической интеграции от 0,11 — ЦП 3 до 0,19 — ЦП 5. В онтогенетической стратегии *Beckmannia syzigachne* относится к защитной стратегии, которая является формой проявления устойчивости и способности сохранять свое место в сообществах.

Оценка жизненности ЦП *Beckmannia syzigachne* по размерному спектру показала, что наиболее максимальные показатели IVC отмечены в ЦП 1 (1,26) осоково-бекманниевом, наименьшие

показатели IVC отмечены в ЦП 5 (0,85) пырейно-бескильницево (Рис. 2).

С нарастанием стресса у *Beckmannia syzigachne* уменьшаются такие параметры, как количество узлов, длина верхнего междоузлия, длина и ширина 1-го листа, ширина 2-го и 3-го листьев, длина влагалища 2-го и 3-го листьев, число веточек в соцветии (конвергентная тактика), а такие признаки, как число листьев, длина влагалища 1-го листа, длина 3-го листа, длина нижней веточки в соцветии, наоборот увеличиваются (дивергентная тактика). Тактика стабилизации отмечены для высоты побега, длины 2 листа, длины соцветия.

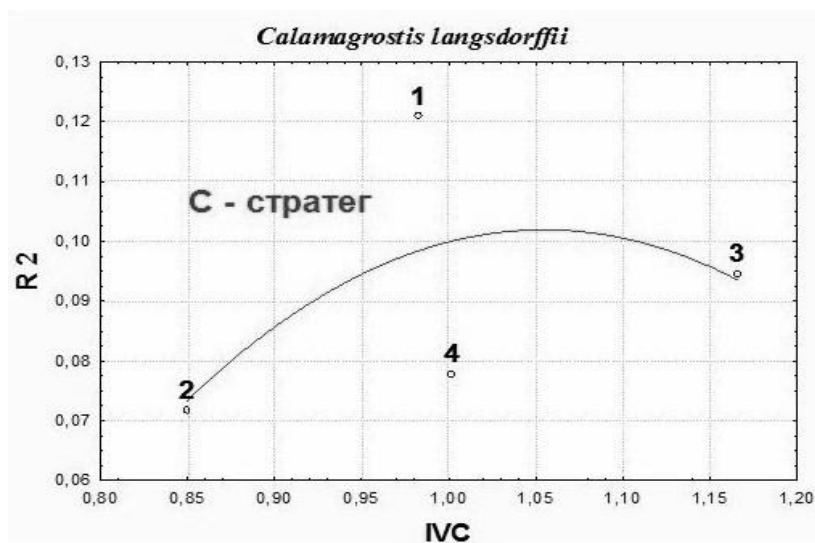
У *Calamagrostis langsdorffii* в ответ на ухудшение экологических условий обитания сначала усиливается координированность развития растений на морфологическом уровне — это реализация защитной составляющей онтогенетической стратегии. При дальнейшем усилении стресса происходит дезинтеграция морфологической структуры растений, корреляции между признаками резко ослабевают и снижаются — это стрессовая составляющая онтогенетической стратегии (Рис. 3).



**Рисунок 2.** Тренд онтогенетической стратегии ценопопуляции *Beckmannia syzigachne* (Steud.) Fern (по оси абсцисс — IVC индекс виталитета, по оси ординат  $R^2_{ch}$  — коэффициент детерминации)



На установленном градиенте у *Calamagrostis langsdorffii* выявлено 2 типа онтогенетических тактик: к дивергентной относятся: длина верхнего междоузлия, длина 1-го, 2-го и 3-го листьев, ширина 2-го и 3-го листьев, длина влагалища 1-го и 3-го листьев и ширина, длина соцветия, число веточек в соцветии, длина нижней веточки в соцветии, к конвергентной — высота побега, количество узлов, число листьев, ширина 1-го листа и длина влагалища 2-го листа. В наиболее благоприятных условиях находятся растения ЦП 3 вейниково-осоковом, где IVC составляет (1,17).



**Рисунок 3. Тренд онтогенетической стратегии ценопопуляции *Calamagrostis langsdorffii* (Link) Trin (по оси абсцисс — IVC индекс виталитета, по оси ординат  $R^2_{ch}$  — коэффициент детерминации)**

По результатам исследований были сделаны следующие выводы: у *Alopecurus arundinaceus* установлена стрессово-защитная онтогенетическая стратегия, которая соответствует S (пациент) типу конкурентно-стресс-толерантной эколого-ценогической стратегии, именно такая стратегия позволяет данному виду расти в широких пределах экологических условий и в том числе в условиях сильного антропогенного пресса. У *Beckmannia syzigachne* установлена защитная онтогенетическая стратегия, которая соответствует R (эксплерент) типу, такая стратегия позволяет виду захватывать новых

территорий и самых разнообразных синантропных местообитаний. У *Calamagrostis langsdorffii* установлена защитно-стрессовая онтогенетическая стратегия, которая соответствует С (виолент) типу стресс-толерантной эколого-ценотической стратегии.

Наиболее оптимальными условиями во всех исследованных видах являются влажнолуговые сообщества на достаточно засоленных почвах при минимальных антропогенных нагрузках.

Все выводы являются предварительными, так как при увеличении количества ценопопуляций в различных иных условиях выводы могут измениться. Но, в целом, ценопопуляции вида вполне закономерно ведут себя как организмы, адаптированные в условиях увлажнения и антропогенной нагрузки.

### Список литературы:

1. Василевич В.И. Типы стратегий растений и фитоценоотипы //Журнал общей биологии. — 1987. — Т. 48. — № 3. — С. 368—374.
2. Денисов Г.В. Травосеяние в зоне вечной мерзлоты (эколого-биологические основы). Новосибирск: Наука, 1983. — 240 с.
3. Злобин Ю.А. Принципы и методы ценотических популяций растений. Казань, 1989. — 146 с.
4. Ишбирдин А.Р., Ишмуратова М.М. Адаптационный морфогенез и эколого-ценотические стратегии выживания травянистых растений // Методы популяционной биологии. Сборник материалов VII Всеросс. Популяционного семинара (Сыктывкар, 16—21 февраля 2004 г.), ч. 2. Сыктывкар, 2004. — С. 113—120.
5. Миркин Б.М., Наумова Л.Г. Наука о растительности (история и современное состояние основных концепций). Уфа: Гилем, 1998. — 413 с.
6. Определитель высших растений Якутии. Новосибирск, 1974. — С. 68.
7. Троева Е.И., Зверев А.А., Королюк А.Ю., Черосов М.М. Экологические шкалы флоры и микобиоты Якутии // Флора Якутии: Географический и экологический аспекты. Новосибирск: Наука, 2010 — С. 114—150.
8. Цвелев Н.Н. Злаки. Л.: Наука, 1976. — 788 с.

## 4.5. ЗООЛОГИЯ

### СТРУКТУРА НАСЕЛЕНИЯ НАПОЧВЕННЫХ БЕСПОЗВОНОЧНЫХ СМЕШАННЫХ ЛЕСОВ ПРИОКСКОЙ ТЕРРАСЫ

*Трошкова Инга Юрьевна*

*канд. биол. наук, доцент*

*Московского государственного областного университета,*

*РФ, г. Москва*

*E-mail: [troshkova\\_inga@rambler.ru](mailto:troshkova_inga@rambler.ru)*

*Трошков Николай Юрьевич*

*соискатель кафедры общей биологии и биоэкологии,*

*Московский государственный областной университет,*

*РФ, г. Москва*

### POPULATION COMPOSITION OF GROUND INVERTEBRATES IN MIXED FORESTS OF PRIOKSKAYA TERRACE

*Inga Troshkova*

*candidate of Biological Sciences, associate professor*

*of Moscow Region State University,*

*Russia, Moscow*

*Nikolay Troshkov*

*degree-seeking student of the chair of General Biology and Bioecology*

*of Moscow Region State University,*

*Russia, Moscow*

### АННОТАЦИЯ

В течение полевого сезона 2011 г. исследована таксономическая структура, относительное обилие и динамика активности населения напочвенных беспозвоночных в смешанном лесу вблизи Приокско-Террасного биосферного государственного заповедника. Отмечено

84 вида насекомых. Для Carabidae проанализировано распределение частот встречаемости видов. Доминировали: *Platynus assimile*, *Carabus nemoralis*, *Pterostichus oblongopunctatus*, *Pterostichus niger*, *Pterostichus melanarius*, *Carabus granulatus*.

#### ABSTRACT

During the surveying season of 2011 a taxonomical structure, relative amount and activity dynamics of population of ground invertebrates in mixed forest near Prioksko-Terrasny Nature Biosphere Reserve have been studied. 84 species of insects have been marked. Frequency distribution of species for Carabidae has been examined. There dominated the following ones: *Platynus assimile*, *Carabus nemoralis*, *Pterostichus oblongopunctatus*, *Pterostichus niger*, *Pterostichus melanarius*, *Carabus granulatus*.

**Ключевые слова:** напочвенные беспозвоночные; динамика активности; смешанный лес; приокская терраса; Coleoptera; Carabidae; Staphylinidae.

**Keywords:** ground invertebrates; activity dynamics; mixed forest; Priokskaya terrace; Coleoptera; Carabidae; Staphylinidae.

Под напочвенными понимаются беспозвоночные, обитающие в лесной подстилке, на поверхности почвы и в её верхнем слое [1, с. 19] К ним относятся: паукообразные, многоножки, имаго и частично личинки многих жуков — жужелиц, стафилинид, мертвоедов, щелкунов, пластинчатоусых и др. [9, с. 73]. Фауна и экология напочвенных беспозвоночных Московской области изучены недостаточно [8, с. 3]. Изучение биоразнообразия напочвенных беспозвоночных в районах особо охраняемых природных территорий является актуальным [10, с. 152].

Полевые исследования проводились в Московской области вблизи западной границы Приокско-Тerrasного биосферного государственного заповедника в урочище р. Сушка с 28.V по 2.X.2011 г. Заповедник расположен на надпойменных террасах левого берега р. Оки, на стыке смешанных и широколиственных лесов. Рельеф пробной площади — террасированная равнина, пересеченная р. Сушкой. Обследованный биотоп — смешанный лес с примесью широколиственных пород на пологом правобережном склоне с юго-восточной экспозицией и крутом левобережном склоне с северо-западной экспозицией в нижнем течение р. Сушка, почва дерново-подзолистая, влажная, подстилка хорошо развита. Первый ярус леса: *Tilia cordata*, *Populus tremula*, *Quercus robur*, *Betula pendula*,

единично — *Pinus sylvestris*; второй ярус: *Acer platanoides*; подлесок: *Sorbus aucuparia*, *Padus avium*, *Euonymus verrucosa*, *Lonicera xylosteum*, *Corylus avellana*; подрост — *Picea abies*; травянисто-кустарничковый ярус: *Aegopodium podagraria*, *Anthriscus sylvestris*, *Asarum europaeum*, *Impatiens parviflora*, *Carex caespitosa*, *Pteridium aquilinum*, *Equisetum hyemale*, *Equisetum pratense*, *Mercurialis perennis*, *Galeobdolon luteum*, *Glechoma hederacea*, *Lamium maculatum*. Для определения растений был собран гербарий.

Для сбора напочвенных беспозвоночных использовали пластиковые стаканчики типа ловушек Барбера [11, с. 260] емкостью 200 мл, диаметром входного отверстия 7 см, на 2/3 объема заполненные 4 % раствором формалина [4, с. 19] [6, с. 49]. Ловушки устанавливались в линию через 10 метров в количестве 47 штук по левому и правому берегу. Выборку делали один раз в месяц [2, с. 202]. Собрано 14212 экз. беспозвоночных, отработано 4345 ловушко-суток. Уловистость выражалась в среднем количестве экземпляров каждой таксономической группы на 10 ловушко-суток в каждом учетном периоде. Учитывались представители всех крупных таксономических групп беспозвоночных, попавших в ловушки, не все из которых относятся к герпетобионтам [Табл. 1].

Основную долю (98,6 %) населения напочвенных беспозвоночных смешанного леса урочища р. Сушка составляют насекомые (Insecta, 60,1 %), паукообразные (Arachnida, 30,1 %) и многоножки (Myriapoda, 8,4 %). Активность насекомых равномерно снижается в течение сезона, в то время как максимальная активность паукообразных наблюдается с мая до середины июня, затем резко падает. Активность многоножек плавно снижается в течение сезона. Среди насекомых преобладают Coleoptera (53,2 %), представленные в основном Caraboidea (42,8 %) и Staphylinoidea (46,7 %). Динамика активности Carabidae и Staphylinidae сходна — максимальна в мае-июне, быстро падает к середине июля, затем постепенно снижается к концу сезона. Значительную долю насекомых составляют Hymenoptera (22,5 %), среди которых преобладают Formicoidea (96,2 %). Максимальная активность муравьев отмечена с середины июня до середины июля. В июле-августе возрастает активность Hemiptera (*Pyrrhocoris apterus* и др.) и незначительно Dictyoptera (*Ectobius lapponicus*).

Таблица 1.

### Численность, уловистость и процентное соотношение групп беспозвоночных в смешанном лесу урочища р. Сушка

Таксономическая группа	28.V-18.VI			18.VI-10.VII			10.VII-13.VIII			13.VIII-4.IX			4.IX-2.X			За сезон 2011 г.	
	N	ДП	%	N	ДП	%	N	ДП	%	N	ДП	%	N	ДП	%	N	%
Insecta	2860	28,98	43,8	2406	23,27	74,1	2214	18,09	71,6	602	12,44	80,6	462	7,50	78,6	8544	60,1
Arachnida	3003	30,43	45,9	552	5,34	17,0	573	4,68	18,5	84	1,74	11,2	63	1,02	10,7	4275	30,1
Myriapoda	621	6,29	9,5	256	2,48	7,9	234	1,91	7,6	43	0,89	5,8	33	0,54	5,6	1187	8,4
Crustacea	29	0,29	0,4	13	0,13	0,4	47	0,38	1,5	8	0,17	1,1	4	0,06	0,7	101	0,7
Oligochaeta	18	0,18	0,3	2	0,02	0,1	19	0,16	0,6	8	0,17	1,1	22	0,36	3,7	69	0,5
Gastropoda	5	0,05	0,1	18	0,17	0,6	7	0,06	0,2	2	0,04	0,3	4	0,06	0,7	36	0,3
Insecta																	
Coleoptera	2016	20,43	70,5	1056	10,21	43,9	1022	8,35	46,2	268	5,54	44,5	183	2,97	39,6	4545	53,2
Hymenoptera	458	4,64	16,0	914	8,84	38,0	429	3,50	19,4	77	1,59	12,8	47	0,76	10,2	1925	22,5
Hemiptera	26	0,26	0,9	210	2,03	8,7	596	4,87	26,9	111	2,29	18,4	199	3,23	43,1	1142	13,4
Diptera	205	2,08	7,2	203	1,96	8,4	96	0,78	4,3	113	2,33	18,8	25	0,41	5,4	642	7,5
Lepidoptera	148	1,50	5,2	21	0,20	0,9	54	0,44	2,4	26	0,54	4,3	0	0,00	0,0	249	2,9
Dictyoptera	0	0,00	0,0	2	0,02	0,1	12	0,10	0,5	3	0,06	0,5	1	0,02	0,2	18	0,2
Прочие	7	0,07	0,2	0	0,00	0,0	5	0,04	0,2	4	0,08	0,7	7	0,11	1,5	23	0,3
Coleoptera																	
Staphylinioidea	994	10,07	49,3	503	4,86	47,7	501	4,09	49,0	67	1,38	25,1	57	0,93	31,1	2122	46,7
Scarabaeoidea	896	9,08	44,4	439	4,25	41,6	408	3,33	39,9	131	2,71	49,1	69	1,12	37,7	1943	42,8
Curculionoidea	38	0,39	1,9	100	0,97	9,5	103	0,84	10,1	68	1,40	25,5	50	0,81	27,3	359	7,9
Elateroidea	48	0,49	2,4	3	0,03	0,3	6	0,05	0,6	0	0,00	0,0	4	0,06	2,2	61	1,3
Elateroidea	30	0,30	1,5	5	0,05	0,5	3	0,02	0,3	0	0,00	0,0	0	0,00	0,0	38	0,8
Chrysomeloidea	9	0,09	0,4	4	0,04	0,4	1	0,01	0,1	0	0,00	0,0	2	0,03	1,1	16	0,4
Прочие	3	0,03	0,1	1	0,01	0,1	0	0,00	0,0	1	0,02	0,4	1	0,02	0,5	6	0,1
Staphylinioidea																	
Staphylinidae	973	9,86	97,9	453	4,38	90,1	480	3,92	95,8	66	1,36	98,5	49	0,80	86,0	2021	95,2
Silphidae	21	0,21	2,1	43	0,42	8,5	13	0,11	2,6	0	0,00	0,0	0	0,00	0,0	77	3,6
Leiodidae	0	0,00	0,0	7	0,07	1,4	8	0,07	1,6	1	0,02	1,5	8	0,13	14,0	24	1,1
Scarabaeoidea																	
Geotrupidae	31	0,31	81,6	95	0,92	95,0	100	0,82	97,1	65	1,34	95,6	50	0,81	100,0	341	95,0
Scarabaeidae	0	0,00	0,0	4	0,04	4,0	3	0,02	2,9	3	0,06	4,4	0	0,00	0,0	10	2,8
Lucanidae	7	0,07	18,4	1	0,01	1,0	0	0,00	0,0	0	0,00	0,0	0	0,00	0,0	8	2,2
Hymenoptera																	
Formicoidea	448	4,54	97,8	902	8,72	98,7	390	3,19	90,9	71	1,47	92,2	40	0,65	85,1	1851	96,2
Ichneumonidea	8	0,08	1,7	7	0,07	0,8	26	0,21	6,1	4	0,08	5,2	7	0,11	14,9	52	2,7
Прочие	2	0,02	0,4	5	0,05	0,5	13	0,11	3,0	2	0,04	2,6	0	0,00	0,0	22	1,1
Hemiptera																	
Heteroptera	22	0,22	84,6	190	1,84	90,5	466	3,81	78,2	108	2,23	97,3	199	3,23	100,0	985	86,3
Auchenorrhyncha	4	0,04	15,4	20	0,19	9,5	130	1,06	21,8	3	0,06	2,7	0	0,00	0,0	157	13,7

Примечание. N - количество экземпляров; ДП - динамическая плотность (экз./10 лушко-суток)

Среди насекомых наиболее полно определены до вида представители двух преобладающих по численности семейств: Carabidae [3, с. 8] [5, с. 93] [7, с. 29] и Staphylinidae [7, с. 111]. Материал по семейству Staphylinidae обработан частично, определено 20 видов из 16 родов, 10 триб и 5 подсемейств. В наибольшем количестве отмечены: *Staphylinus erythropterus*, *Philonthus decorus*, *Quedius fuliginosus*, *Drusilla canaliculata* [Табл. 2].

**Таблица 2.**

**Видовой состав [13], численность и процентное соотношение Staphylinidae в смешанном лесу долины р. Сушка, по данным почвенных ловушек**

№	Вид	Количество, экз.	%
<b>Omaliinae</b>			
1	<i>Acidota cruentata</i> Mannerheim, 1830	2	1,53
<b>Tachiporinae</b>			
2	<i>Bryophacis crassicornis</i> (Mäklin, 1847)	2	1,53
3	<i>Lordithon lunulatus</i> (Linnaeus, 1760)	2	1,53
4	<i>Tachinus laticollis</i> Gravenhorst, 1802	1	0,76
5	<i>Tachinus rufipes</i> (Linnaeus, 1758)	4	3,05
6	<i>Tachyporus chrysomelinus</i> (Linnaeus, 1758)	2	1,53
<b>Aleocharinae</b>			
7	<i>Aleochara brevipennis</i> Gravenhorst, 1806	1	0,76
8	<i>Callicerus rigidicornis</i> (Erichson, 1839)	1	0,76
9	<i>Drusilla canaliculata</i> (Fabricius, 1787)	7	5,34
10	<i>Chanoma sp</i>	1	0,76
<b>Paederinae</b>			
11	<i>Rugilus rufipes</i> Germar, 1836	2	1,53
<b>Staphylininae</b>			
12	<i>Gabrius osseticus</i> (Kolenati, 1846)	2	1,53
13	<i>Philonthus carbonarius</i> (Gravenhorst, 1802)	1	0,76
14	<i>Philonthus decorus</i> (Gravenhorst, 1802)	18	13,74
15	<i>Philonthus succicola</i> Thomson, 1860	1	0,76
16	<i>Quedius fuliginosus</i> (Gravenhorst, 1802)	10	7,63
17	<i>Quedius molochinus</i> (Gravenhorst, 1806)	1	0,76
18	<i>Staphylinus erythropterus</i> Linnaeus, 1758	88	67,18
19	<i>Tasgius melanarius</i> (Heer, 1839)	1	0,76
20	<i>Xantholinus tricolor</i> (Fabricius, 1787)	2	1,53

Материал по семейству Carabidae обработан полностью, идентифицирован 41 вид из 19 родов, 15 триб и 6 подсемейств [Табл. 3].

Таблица 3.

**Видовой состав [12, 14], численность и процентное соотношение  
Carabidae в смешанном лесу урочища р. Сушка,  
по данным почвенных ловушек**

№	Вид	Колич.экз.	%
1	<i>Leistus ferrugineus</i> (Linnaeus, 1758)	1	0,05
2	<i>Leistus terminatus</i> (Panzer,1793)	1	0,05
3	<i>Notiophilus palustris</i> (Duftschmid,1812)	9	0,46
4	<i>Loricera pilicornis</i> (Fabricius,1775)	9	0,46
5	<i>Carabus arcensis</i> Herbst,1784	41	2,11
6	<i>Carabus convexus</i> Fabricius,1775	56	2,88
7	<i>Carabus coriaceus</i> Linnaeus, 1758	7	0,36
8	<i>Carabus glabratus</i> Paykull,1790	65	3,35
9	<i>Carabus granulatus</i> Linnaeus, 1758	145	7,46
10	<i>Carabus hortensis</i> Linnaeus, 1758	56	2,88
11	<i>Carabus nemoralis</i> O.F. Müller, 1764	267	13,74
12	<i>Cychrus caraboides</i> (Linnaeus, 1758)	22	1,13
13	<i>Elaphrus cupreus</i> Duftschmid,1812	1	0,05
14	<i>Patrobus atrorufus</i> (Stroem, 1768)	2	0,10
15	<i>Trechus secalis</i> (Paykull,1790)	6	0,31
16	<i>Chlaenius tibialis</i> Dejean, 1826	1	0,05
17	<i>Harpalus latus</i> (Linnaeus, 1758)	6	0,31
18	<i>Harpalus laevipes</i> Zetterstedt, 1828	47	2,42
19	<i>Harpalus rubripes</i> (Duftschmid,1812)	6	0,31
20	<i>Harpalus xanthopus</i> Gemminger & Harold, 1868	22	1,13
21	<i>Harpalus rufipes</i> (De Geer, 1774)	22	1,13
22	<i>Ophonus rufibarbis</i> (Fabricius, 1792)	1	0,05
23	<i>Badister lacertosus</i> Sturm, 1815	10	0,51
24	<i>Badister sodalis</i> (Duftschmid, 1812)	1	0,05
25	<i>Agonum fuliginosum</i> (Panzer,1809)	1	0,05
26	<i>Platynus assimile</i> (Paykull, 1790)	445	22,90
27	<i>Poecilus cupreus</i> (Linnaeus, 1758)	5	0,26
28	<i>Poecilus versicolor</i> (Sturm,1824)	3	0,15
29	<i>Pterostichus aethiops</i> (Panzer,1796)	73	3,76
30	<i>Pterostichus anthracinus</i> (Illiger,1798)	3	0,15
31	<i>Pterostichus melanarius</i> (Illiger,1798)	148	7,62
32	<i>Pterostichus niger</i> (Schaller,1783)	197	10,14
33	<i>Pterostichus nigrita</i> (Paykull,1790)	7	0,36
34	<i>Pterostichus oblongopunctatus</i> (Fabricius,1787)	222	11,43
35	<i>Pterostichus strenuus</i> (Panzer,1796)	20	1,03
36	<i>Stomis pumicatus</i> (Panzer,1796)	7	0,36
37	<i>Synuchus nivalis</i> (Panzer, 1798)	2	0,10
38	<i>Amara aulica</i> (Panzer,1796)	1	0,05
39	<i>Amara (Celia) bifrons</i> (Gyllenhal 1810)	1	0,05
40	<i>Amara communis</i> (Panzer,1797)	3	0,15
41	<i>Amara nitida</i> Sturm,1825	1	0,05

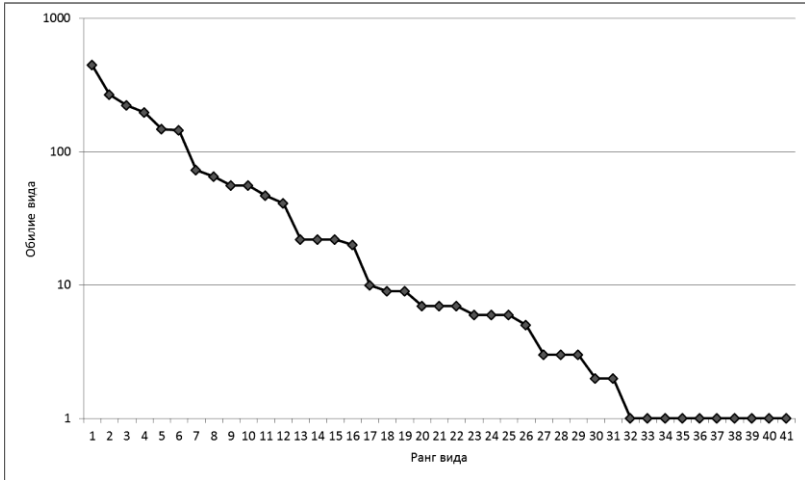


На рис. 1. приведена кривая доминирования видов в логарифмическом масштабе, построенная по ряду, ранжированному в порядке убывания обилия видов. На рис. 2 показано частотное распределение данного ряда, построенное по относительному обилию в процентах. Частотное распределение состоит из трех классов. К доминантным отнесены виды, относительная доля каждого из которых составляла более 5 % от общей численности семейства, к субдоминантным — от 1 до 5 %, к малочисленным — менее 1 %.

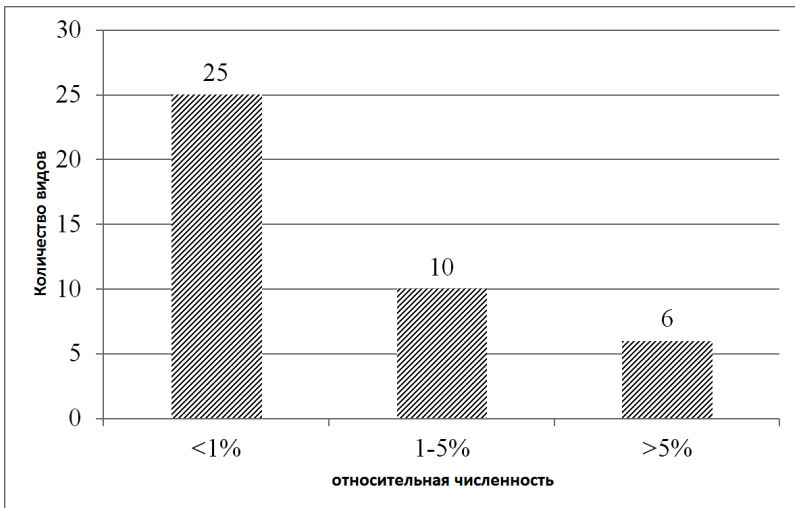
В группу доминантных входят 6 видов жуужелиц: *Platynus assimile*, *Carabus nemoralis*, *Pterostichus oblongopunctatus*, *Pterostichus niger*, *Pterostichus melanarius*, *Carabus granulatus*. К субдоминантным отнесены 10 видов. Наибольшую долю (25 видов) в структуре населения жуужелиц составляли малочисленные виды [Табл. 3; Рис. 2]. Полученная зависимость соответствует лог-распределению встречаемости видов в сообществе [15, с. 17].

Также отмечены виды других семейств жесткокрылых: Leiodidae — *Catops nigricans* (Spence, 1813); Geotrupidae: *Anoplotrupes stercorosus* (Hartmann in Scriba, 1791); Scarabaeidae: *Serica brunnea* (Linnaeus, 1758); Lucanidae: *Platycerus caraboides* (Linnaeus, 1758); Nitidulidae: *Glischrochilus hortensis* (Fourcroy, 1785), *G. grandis* (Tournier 1872); Silphidae: *Nicrophorus investigator* (Zetterstadt, 1824), *N. vespilloides* (Herbst, 1783), *N. vespillo* (Linnaeus, 1758), *Phosphuga atrata* (Linnaeus, 1758), *Silpha tristis* (Ill., 1798), *Oiceoptoma thoracicum* (Linnaeus, 1758); Curculionidae: *Strophosoma capitatum* (De Geer, 1775), *Otiorhynchus ovatus* (Linnaeus, 1758); Antribidae: *Platystomos albinus* (Linnaeus, 1758); Chrysomelidae: *Gonioctena interposita* (Franz et Palmen, 1950), *Galerucella pusilla* (Duftschmid, 1825) Наличие в пробах представителей семейства Silphidae, по видимому, объясняется попаданием в ловушки мышевидных грызунов. Представители Curculionidae, Antribidae, Chrysomelidae попали в пробы случайно с растительности.

Семейства муравьев (Formicoidea) представлены видами — Formicidae: *Formica sanguinea* (Latreille, 1798), *Lasius niger* (Linnaeus, 1758), *L. fuliginosus* (Latreille, 1798); Myrmecidae: *Myrmica ruginodis* (Nylander, 1846).



**Рисунок 1. Логарифмическая кривая доминирования — разнообразия сообщества жуужелиц смешанного леса урочища р. Сушка**



**Рисунок 2. Зависимость между относительной численностью каждого вида жуужелиц и количеством видов, в каждой процентной группе**

Таким образом, структура населения беспозвоночных на обследованной пробной площадке представлена разнообразными группами, основную долю которых составляют насекомые, среди которых преобладают стафилиниды и жужелицы.

На примере Carabidae построена кривая доминирования-разнообразия, соответствующая лог-распределению. Данное распределение характеризует сообщество со средней выровненностью, при котором наблюдается плавное логарифмическое снижение обилия от массовых к малочисленным и единичным видам. Распределение количества видов по группам обилия показывает, что основную долю видового разнообразия составляют малочисленные виды, в меньшей степени субдоминантные и доминантные. Среди редко встречающихся видов характерно наличие значительного числа единичных видов, которые могли попасть в пробы случайно с прилегающих биотопов.

Авторы выражают благодарность д. б. н. Н.Б. Никитскому за помощь и консультации в определении материала.

#### **Список литературы:**

1. Гиляров М.С. Зоологический метод диагностики почв. М.: Наука, 1965. — 275 с.
2. Грюнталь С.Ю. К методике количественного учета жужелиц (Coleoptera, Carabidae)// Энтومол. обозрение. — 1982. — Т. 61, — вып. 1. — С. 201—205.
3. Исаев А.Ю. Определитель жесткокрылых Среднего Поволжья (часть 1. Aderphaga и Muxorphaga): серия «Природа Ульяновской области», вып. 10. Ульяновск, 2002. — С. 8—50.
4. Количественные методы в почвенной зоологии. М.: Наука, 1987. — 284 с.
5. Комаров Е.В. Жужелицы рода *Badister* Clairv. (Coleoptera, Carabidae) фауны СССР// Энтومол. обозрение. — 1991. — Т. 70 (1). — С. 93—108.
6. Методы почвенно-зоологических исследований. М.: Наука, 1975. — С. 73—85.
7. Определитель насекомых европейской части СССР в 5 т.: «Определители по фауне СССР, издаваемые Зоологическим институтом АН СССР», вып. 89 / под общ. ред. Г.Я. Бей-Биенко. М.-Л. : Наука, 1965. Т. 2. Жесткокрылые и веерокрылые. — 668 с.
8. Почвенные беспозвоночные Московской области. М.: Наука, 1982. — 240 с.
9. Тихомирова А.Л. Учет напочвенных беспозвоночных// Методы почвенно-зоологических исследований. М.: Наука, 1975. — С. 73—85.
10. Тихомирова А.Л., Рыбалов Л.Б., Россолимо Т.Е. Фауна и экология почвенных беспозвоночных (мезофауны) в сосновых лесах Приокско-Тerrasного заповедника// Экосистемы Южного Подмосковья. М.: Наука, 1979. — С. 150—160.

11. Barber H.S. Traps for Cave-Inhabiting Insects// Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society. — 1931. — Vol. 46. — P. 259—266.
12. Catalogue of Palaearctic Coleoptera. Vol. 1. Archostemata-Myxophaga-Adephaga. Eds. I. Löbl, A. Smetana. Denmark, Stenstrup : Apollo Books, 2003. — 819 p.
13. Catalogue of Palaearctic Coleoptera. Vol. 2. Hydrophiloidea-Histeroidea-Staphylinoidea. Eds. I. Löbl, A. Smetana. Denmark, Stenstrup : Apollo Books, 2004. — 942 p.
14. Kryzhanovskij O.L. A Checklist of the Ground Beetles of Russia and Adjacent Lands (Insecta, Coleoptera, Carabidae) / Eds. O. L. Kryzhanovskij [et al]. Sofia, Moscow : Pensoft Publ., 1995. — 271 p.
15. Magurran A.E. Ecological diversity and its measurement. Princeton : Princeton Univ. press, 1988. — 179 p.

## 4.6. МИКРОБИОЛОГИЯ И ВИРУСОЛОГИЯ

### ПРИМЕНЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕФОРМАЦИИ РИЗОБАКТЕРИЙ

**Артамонова Марина Николаевна**

*ассистент кафедры общей и клинической фармакологии с курсом  
микробиологии Ульяновского государственного университета,  
РФ, г. Ульяновск  
E-mail: [artamonovamn2013@yandex.ru](mailto:artamonovamn2013@yandex.ru)*

**Пчелинцева Екатерина Сергеевна**

*канд. физ.-мат.наук, начальник лаборатории зондовой и электронной  
микроскопии Научно-исследовательского технологического  
института Ульяновского государственного университета,  
РФ, г. Ульяновск  
E-mail: [nanolabniti@gmail.com](mailto:nanolabniti@gmail.com)*

**Костишко Борис Борисович**

*мл. науч. сотр. лаборатории зондовой и электронной микроскопии  
Научно-исследовательского технологического института  
Ульяновского государственного университета,  
РФ, г. Ульяновск  
E-mail: [nanolabniti@gmail.com](mailto:nanolabniti@gmail.com)*

**Потатуркина-Нестерова Наталия Иосифовна**

*д-р мед. наук, профессор  
кафедры общей и клинической фармакологии с курсом микробиологии  
Ульяновского государственного университета,  
РФ, г. Ульяновск  
E-mail: [kfarm@ulsu.ru](mailto:kfarm@ulsu.ru)*

# APPLICATION OF YOUNG 'S MODULUS FOR THE DEFORMATION CHARACTERISTICS OF RHIZOBACTERIA

***Artamonova Marina Nikolaevna***

*assistant of Department of General and Clinical Pharmacology  
with the course of Microbiology of Ulyanovsk State University,  
Russia, Ulyanovsk*

***Pchelintseva Yekaterina Sergeevna***

*candidate of science, Head of Laboratory scanning probe and electron  
microscopy of Research Technology institute of Ulyanovsk State University,  
Russia, Ulyanovsk*

***Kostishko Boris Borisovich***

*junior research fellow of Laboratory scanning probe and electron  
microscopy of Research Technology institute of Ulyanovsk State University,  
Russia, Ulyanovsk*

***Potaturkina-Nesterova Natalia Iosifovna***

*doctor of Medicine, professor of Department of General  
and Clinical Pharmacology with the course of Microbiology  
of Ulyanovsk State University,  
Russia, Ulyanovsk*

## АННОТАЦИЯ

Целью работы явилось изучение упруго-механических свойств мембраны ризобактерий методом атомно-силовой спектроскопии в режиме силовой спектроскопии. В ходе исследования было установлено, что модуль упругости бактериальных клеток изменяется в зависимости от режима культивирования. Модуль Юнга изменялся обратно пропорционально относительно температуры. Показатели модуля Юнга ризобактерий 1 группы (культивируемых при  $+5^{\circ}\text{C}$ ) составил  $3,6\pm 0,1$  Мпа, 2 группы ( $0^{\circ}\text{C}$ ) —  $5,1\pm 0,7$  Мпа, 3 группы ( $-5^{\circ}\text{C}$ ) —  $6,0\pm 1,1$  Мпа. При снижении температуры культивирования происходило уменьшение размеров бактериальных клеток. Установлено, что сила адгезии также зависит от температурного фактора и достоверно увеличивалась при снижении температуры.

## ABSTRACT

The purpose of the research was studying the elastic and mechanical properties of the rhizobacteria membrane with atomic force spectroscopy in mode force spectroscopy. It has been found that the elastic modulus of the bacterial cells depend on temperature. Young's modulus was inversely proportional to temperature. The elastic modulus of rhizobacteria in group №1 (cultured at 50 °C) was  $3,6 \pm 0,1$  MPa, in group №2 (0 °C) —  $5,1 \pm 0,7$  MPa, in group №3 (–50 °C) —  $6,0 \pm 1,1$  MPa. It has been reducing the size of the bacterial cells when the temperature of cultivation decreased. It has been established that the adhesion force was also dependent on the temperature factor, and it increased when the temperature decreased.

**Ключевые слова:** модуль Юнга; упруго-механические свойства бактерий; ризобактерии; сила адгезии.

**Keywords:** Young's modulus; elasto-mechanical properties of the bacteria; rhizobacteria; adhesion force.

Одним из наиболее общих интегральных показателей структурно-функционального состояния бактерий и их мембран являются вязко-эластические свойства, изучение которых стало возможным благодаря использованию атомно-силовой микроскопии [5, 6]. Упругость и вязкость являются фундаментальными механическими свойствами микроорганизмов, определяющими их функциональность [2, с. 14]. Известно, что структурные трансформации в мембране приводят к изменению её упругости с последующей деформацией клетки [3, с. 54].

Упруго-эластические свойства бактерий обеспечивают их устойчивость к действию абиотических факторов окружающей среды [3, с. 55]. Среди физико-химических факторов, влияющих на рост и размножение микроорганизмов, наибольшее значение имеет температура. Большинство ризосферных микроорганизмов являются мезофилами с оптимумом роста при 26—30 °C. При температуре ниже оптимальной на 5—10 °C бактерии не погибают, однако, происходит изменение структуры бактерий и задержка их размножения.

Известны такие методы измерения вязкоупругих характеристик клеток микроорганизмов, как прямой метод с применением микроманипуляционной техники, оптический, основанный на регистрации изменений светорассеяния микробных суспензий, и метод инородных включений [2, с. 73]. Однако все они имеют ряд недостатков, ограничивающих их применение в работе с микроорганизмами. Имеются единичные сообщения о применении для характеристики механических

свойств бактериальных мембран атомно-силовой спектроскопии, основанный на измерении степени деформации поверхности при её взаимодействии с вершиной зонда атомно-силового микроскопа [1, с. 68]. Данный метод позволяет проводить измерение модуля упругости (модуля Юнга) и на основе этого производить расчет степени деформации микроорганизмов.

Целью работы явилась характеристика степени деформации мембраны ризобактерий *Cucurbita pepo L.* на основе определения модуля Юнга при атомно-силовой микроскопии.

#### **Материалы и методы исследования**

В работе было изучено 24 штамма бактерий, выделенных из ризосферы *Cucurbita pepo L.* Штаммы ризобактерий культивировали в жидкой питательной среде LB (Danieles, Россия), содержащей агар до 2,25 % и выдерживали при температуре 37 °С в течение 10 ч [10].

Упруго-механические свойства ризобактерий изучали в стационарной фазе роста (10—18 ч культивирования) при различных температурных показателях: +5 °С (1 группа), 0 °С (2 группа), -5 °С (3 группа).

Исследования проводили с использованием сканирующего зондового микроскопа Solver P47-PRO (NT-MDT, Россия) при помощи зондов с золотым напылением серии NSG10 (NT-MDT, Россия) размером 95x30 мкм, с жесткостью балки 17 Н/м, радиусом закругления иглы 10 нм. Анализ морфометрических показателей полученных изображений проводили с использованием штатного программного обеспечения микроскопа Debug Nova 1.1.0.1847.

При определении упругих свойств бактериальных клеток происходит снятие зависимостей прогиба кантилевера от расстояния между концом иглы и поверхностью образца. Получаемые в процессе измерений так называемые «кривые подвода» представляют собой графическое отображение зависимости отклонения кантилевера от его перемещения по вертикальной оси *Z*. Алгоритм исследования включал в себя предварительное получение кривых подвода с объекта, упругость которого превышает константу упругости кантилевера ( $k_c$ ).

Предполагается, что движение сканера по оси *Z* ( $\Delta z$ ) сопровождается пропорциональным отклонением кантилевера ( $\Delta d$ ). В свою очередь в случае «мягкого» образца ( $k_0 < k_c$ ) отклонение кантилевера оказывается несимметричным движению сканера ( $\Delta z > \Delta d$ ), поскольку поверхность объекта «продавливается» зондом. Зарегистрированные показатели в дальнейшем используются для вычисления глубины продавливания как  $\delta = \Delta z - \Delta d$  с последующим расчетом модуля Юнга по модели Герца, описывающей контактную деформацию двух тел.



При этом исходная формула(1) выражала зависимость между действующей на объект силой (F) и глубиной его продавливания ( $\delta$ ):

$$F = \frac{4}{3} \frac{E}{1 - \nu^2} \delta^{\frac{3}{2}} \sqrt{R} \quad (1)$$

где:  $F$  — приложенная сила,

$E$  — модуль Юнга, характеризующий упруго-эластические свойства ЦПМ бактерий,

$\nu$  — коэффициент Пуассона,

$\delta$  — продавливание,

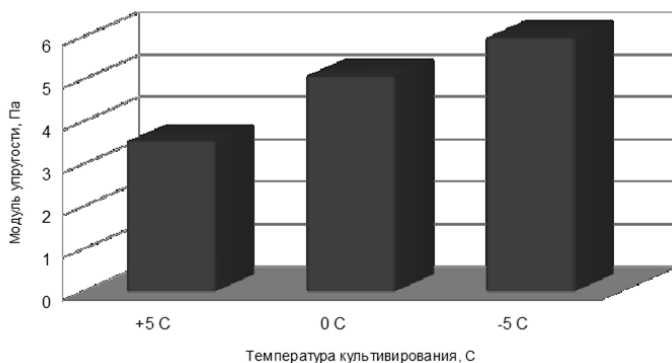
$R$  — радиус иглы. Коэффициент Пуассона для бактериальных клеток равен 0,5.

Статистическую обработку данных производили с использованием программ “Microsoft Excel” и “Statistika 6.0”. Оценку статистической значимости полученных результатов осуществляли с помощью t- критерия Стьюдента.

Результаты исследования.

В ходе исследования было установлено, что структурно-механические свойства ризобактерий изменялись в зависимости от температуры их культивирования.

Бактериальные клетки 1 группы оказывались менее упругими по сравнению с ризобактериями 2 и 3 группы. Показатели модуля Юнга ризобактерий 1 группы составил  $3,6 \pm 0,1$  Мпа, 2 группы —  $5,1 \pm 0,7$  Мпа, 3 группы —  $6,0 \pm 1,1$  Мпа (рис. 1).



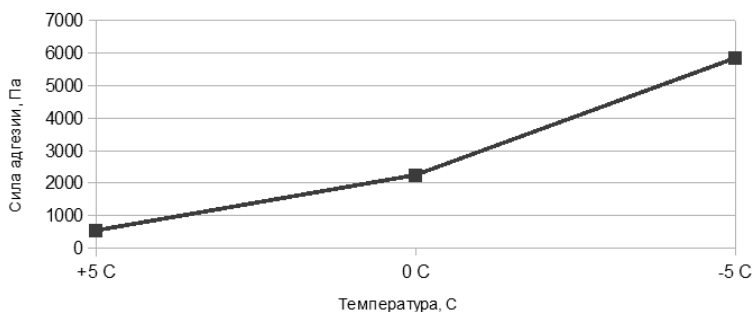
**Рисунок 1. Показатели модуля Юнга при различных температурных режимах культивирования**

В ходе исследования было также установлено, что в зависимости от температуры изменяются морфометрические параметры ризобактерий.

В процессе культивирования ризобактерий при снижении температуры бактериальные клетки уменьшались в размерах. В 1 группе линейные размеры бактериальных клеток составляли  $1,86 \times 0,92$  нм, во 2 группе —  $1,38 \times 0,59$  нм и в 3 группе —  $0,94 \times 0,45$  нм (рис. 2).

Изменение морфометрических параметров ризобактерий при снижении температуры сопровождалось изменением силы адгезивного взаимодействия.

Динамика адгезивной активности оказалась обратно пропорциональной изменению температурного фактора. Сила адгезии бактерий 1 группы составила  $544,0 \pm 59,8$  нН. При снижении температуры адгезивное взаимодействие достоверно увеличивалось, и во 2 и 3 группах сила адгезии составила  $2250,8 \pm 51,3$  нН ( $p < 0,05$ ) и  $5849,0 \pm 73,4$  нН ( $p < 0,05$ ) соответственно (рис. 2).



**Рисунок 2. Изменение показателей силы адгезивного взаимодействия ризобактерий от температуры**

Таким образом, установлено, что снижение температуры в процессе культивирования влияет на структурно-механические и морфологические свойства ризобактерий. Показатель Юнга изменялся обратно пропорционально относительно температуры. Уровень модуля упругости ризобактерий возрастал в 1, 2 и 3 группах как  $1 < 1,4 < 1,7$  соответственно. При снижении температуры культивирования происходило достоверное уменьшение размеров бактериальных клеток ( $p < 0,05$ ).

Снижение температуры сопровождалось повышением показателей силы адгезии. Так, при  $+5$  °С адгезивная сила ризобактерий

составила 544,0 нН; при 0 °С и -5°С — показатели силы адгезии увеличились в 4,1 и 10,7 раза соответственно.

### Список литературы:

1. Васильченко А.С., Яруллина Д.Р., Никиян А.Н., Тесля А.В. Морфофункциональные характеристики *Bacillus cereus* на различных этапах жизненного цикла//Вестник ОГУ. — 2012. — № 10. — С. 66—71.
2. Кобелев А.В., Смолюк Л.Т., Кобелева Р.М., Проценко Ю.Л. Нелинейные вязкоупругие свойства биологических тканей. Екатеринбург: УрО РАН, 2011. — 244 с.
3. Лебедев Д.В., Чукланов А.П., Бухараев А.А., Дружинина О.С. Измерение модуля Юнга биологических объектов в жидкой среде с помощью специального зонда атомно-силового микроскопа//Письма в ЖТФ. — 2009. — Т. 35. — Вып. 8. — С. 54—61.
4. Яминский И.В., Пышкина О.А., Сергеев В.Г., Семенов А.Э., Филонов А.С. Визуализация прокариотических клеток с помощью атомно-силовой микроскопии// Зондовая микроскопия-97: Всероссийское совещание по зондовой микроскопии. 1997. — С. 124—127.
5. Deng Z., Lulevich V., Liu F.-t., Liu G.-y. Applications of Atomic Force Microscopy in Biophysical of Cells // J. Phys. Chem. B. — 2011. — Vol. 114. — № 18. — P. 5971—5982.
6. Francis L.W, Lewis P.D., Wright C.J., Conlan R.S. Atomic force microscopy comes of age // Biol.Cell. — 2010. — Vol. 102, — № 2. — P. 133—143.
7. Heinz W.F. and Hoh J.H. Spatially resolved force spectroscopy of biological surfaces using the atomic force microscope. Trends Biotechnol., — 1999a, — v. 17, — p. 143—150.

**ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ  
СИСТЕМЫ НАССР, ВНЕДРЕННОЙ  
В ПРОИЗВОДСТВЕ МИНЕРАЛЬНЫХ ВОД,  
С ПОМОЩЬЮ СТАНДАРТНЫХ САНИТАРНЫХ  
ОПЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕДУР**

***Карапетян Арташес Андраникович***

*магистр биофизики, аспирант  
Армянского национального аграрного университета,  
Республика Армения, г. Ереван  
E-mail: [artashes.k@list.ru](mailto:artashes.k@list.ru)*

***Батикян Айкуш Гургеновна***

*д-р биол. наук, академик инженерной академии Армении, лектор  
Ереванского государственного университета,  
Республика Армения, г. Ереван  
E-mail: [h.batikyan@mail.ru](mailto:h.batikyan@mail.ru)*

**EFFECTIVENESS ASSURANCE OF HACCP SYSTEM  
IMPLEMENTED IN MINERAL WATERS  
PRODUCTION WITH THE SUPPORT  
OF STANDART SANITARY  
OPERATIONAL PROCEDURES**

***Artashes Karapetyan***

*master of biophysics, PhD student  
of Armenian National Agrarian University,  
Republic of Armenia, Yerevan*

***Haykush Batikyan***

*doctor of Biological Sciences, Academician of Engineering Academy  
of Armenia, Lecturer of Yerevan State University,  
Republic of Armenia, Yerevan*

**АННОТАЦИЯ**

Цель данной статьи представление процедур обеспечения эффективности системы НАССР с помощью стандартных санитарных операционных процедур. В качестве альтернативного дезинфектанта

использовалась биоцидная добавка на основе наноконплекса серебра. Исследования показали, что это средство является эффективным при дезинфекции воды, производственных помещений, рук и униформ персонала.

### ABSTRACT

The aim of this statement is the assurance of HACCP system effectiveness with the support of SOPs. Biocid addition based on silver nanocomplex has been used as an alternative of disinfectant. Researches showed that the agent is effective while disinfecting water, production facilities, hands and uniform of personnel as well.

**Ключевые слова:** система HACCP; санитарно-микробиологический контроль производства; ССОП; дезинфектант; нанотехнологии; активированные ионы серебра.

**Keywords:** HACCP system; sanitary-microbiological control of production; SSOP; disinfectant; nanotechnology; activated silver ions.

Основные критерии и требования качества питьевой минеральной воды состоят в следующем: питьевая минеральная вода должна быть безопасна в эпидемиологическом отношении, безвредна по химическому составу и обладать благоприятными органолептическими свойствами. На основе этих критериев в различных странах мира создаются нормативные документы в области качества питьевой минеральной воды. При оценке степени риска здоровью в зависимости от природы нежелательных примесей в воде, наиболее важную роль играют микробиологические контаминации [2]. Исследования показали, что опасность заболевания от микробиологических загрязнений воды во много раз выше, чем при загрязнении воды химическими соединениями различной природы [5].

Качество дезинфекции на предприятиях пищевой промышленности — залог качества выпускаемой продукции и рейтинга производителя. Дезинфекция — это методы и средства уничтожения болезнетворных микроорганизмов на путях передачи от источника инфекции к здоровому организму. Одним словом, дезинфекция это удаление или уничтожение возбудителей инфекционных заболеваний в объектах окружающей среды. Водные растворы антимикробных препаратов являются важнейшим инструментом всего комплекса санитарно-эпидемиологических мероприятий, направленных на уничтожение возбудителей и переносчиков инфекций во внешней среде [1].

Концепция НАССР (Hazard Analysis and Critical Control Points — Анализ рисков и критические контрольные точки) в рамках системы внутреннего контроля на предприятии пищевой промышленности призвана противодействовать возникновению биологических, химических и физических опасностей (рисков) для здоровья потребителей.

В ходе анализов нами отмечался целый ряд факторов, в числе которых: возможные пути проникновения микроорганизмов в готовую продукцию; вероятность контаминации готовой продукции микроорганизмами, в том числе патогенными; возможность размножения микроорганизмов в установленных сроках годности и режимах хранения продукции.

Стандартные санитарные операционные процедуры (ССОП) играют важную роль в поддержке системы НАССР.

Нами выделены основные участки и аспекты для ССОП, в том числе:

- состояние / чистота поверхностей, контактирующих с продукцией,
- предупреждение перекрестного загрязнения (cross-contamination),
- борьба с вредителями,
- безопасность воды,
- надлежащая маркировка и складирование,
- контроль за состоянием здоровья персонала,
- санитарные удобства.

С учетом перечисленных аспектов разработан ряд санитарно-контрольных процедур:

- маркировка, хранение и применение токсичных веществ,
- микробиологический контроль воздушной среды производства и используемой воды,
- уборка и дезинфекция производственной среды,
- предупреждение взаимозагрбления и т. д.

Нами выделены три основных метода дезинфекции: физико-химический, химический и биологический. К первому методу относится воздействие высокой температуры, ко второму — дезинфекция с химическими препаратами, к биологическому — способы обеззараживания с помощью биологических фильтров, биотермических камер и компостирования.

Во всем мире 98 % питьевой воды подвергается хлорированию. Причина состоит в том, что это наиболее экономический и эффективный метод обеззараживания питьевой воды при сравнении с любыми другими известными методами. Но этот метод имеет

некоторые недостатки, одним из которых является образование галогенсодержащих соединений, в том числе: тригалогенметаны, хлороформ, дихлорбромметан, дибромхлорметан и бромформ [2]. Кроме того, чтобы смыть следы хлорсодержащего дезинфектанта, нужно тратить огромное количество воды, которая опять таки может служить источником микробиологического загрязнения.

С целью обеспечения функционирования ССОП, нами выбраны чистящие и дезинфицирующие средства, удовлетворяющие критерии безопасности, удобства и эффективности при применении.

В качестве альтернативного дезинфектанта нами использована современная экологически чистая биоцидная добавка, которая разработана на основе наноконцентрации серебра. Биоцидные свойства серебра известны с давних времен: «святую воду» на протяжении нескольких месяцев держали в серебряных тарах, серебряные ложки используют для кормления новорожденных младенцев и т. д. Именно это свойство серебра и учитывают в нанотехнологических разработках дезинфектанта. Уникальность этой добавки состоит в уничтожении бактерий, микроскопических грибов и их спор на длительное время. Противомикробное влияние добавки способствует уменьшению микробиологического загрязнения воздуха помещений за счет микробной инактивации аэрозоля. Еще одно преимущество данного дезинфектанта состоит в том, что он не требует длительного ополаскивания. При начальном сливании воды можно начинать бутылирование, так как трубопровод уже чист. Активные ионы серебра образуют специальный слой, уничтожая все микробы на долгий срок.

Данная добавка используется в виде цитрата, содержащий  $250 \pm 25$  мг/дм<sup>3</sup> активного серебра,  $250 \pm 25$  мг/дм<sup>3</sup> активной меди, 0,005—0,5 % лимонной кислоты и питьевую воду. Водородный показатель раствора составляет 2,0—5,0 [3].

Нами изучалось влияние дезинфектанта на мезофильно-аэробные и факультативно-анаэробные микроорганизмы (МАФАНМ), бактерий группы кишечных палочек (БГКП), *Pseudomonas aeruginosa*, сальмонелл, плесневых и дрожжевых грибов. Исследования проводились в течении одного года. Отбор проб был проведен с трубопроводов и розливных машин минеральной воды — сразу после дезинфекции и ежедневно. Результаты систематических анализов показывают следующее: после 24-го дня наблюдений обнаруживаются колонии МАФАНМ (3 КОЕ/см<sup>3</sup>), число которых на 61-ый день доходит до 7 КОЕ/см<sup>3</sup> (норма <100 КОЕ/см<sup>3</sup>); на 26-ой день наблюдений выделяются первые колонии дрожжевых и плесневых грибов

(2 КОЕ/см<sup>3</sup>), число которых на 61-ый день доходит до 5 КОЕ/см<sup>3</sup> (норма <20 КОЕ/см<sup>3</sup>); БГКП, *Pseudomonas aeruginosa* и сальмонеллы не обнаруживаются на протяжении всего срока.

Обобщая вышесказанное, можно сделать следующее заключение:

- наноконкомплекс активированных ионов серебра эффективное средство для дезинфекций источников и путей микробиологических контаминаций в производстве минеральной воды,
- применение наноконкомплекса серебра доступно, экономно и безопасно для производителей минеральных вод,
- применение наноконкомплекса может служить индикатором при оценке эффективности действия системы управления рисками НАССР.

### **Список литературы:**

1. Бахир В.М. Дезинфекция питьевой воды: проблемы и решения // Питьевая вода 2003 № 1.
2. Бахир В.М., Леонов Б.И., Прилуцкий В.И., Шомовская Н.Ю. Дезинфекция: проблемы и решения // Вестник новых медицинских технологий 2003 № 4.
3. Приказ министра здравоохранения РА № 628 от 12.04.2011 г.
4. Рабинович Г.Ю., Сульман Э.М. Санитарно-микробиологический контроль объектов окружающей среды и пищевых продуктов с основами микробиологии: учебное пособие. Тверь, 2005.
5. Tardiff R.G. Balancing Risk from Chemical Carcinogens at Waterborne Infectious Microbes: A Conceptual Framework. Report prepared for EPA Advisory Committee to Negotiate the Disinfection By-products Ruls. USA, 1993.



## 4.7. ЭКОЛОГИЯ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЕ

### АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СНИЖЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОЗДУШНОГО БАССЕЙНА ТОКСИЧНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ ОТРАБОТАВШИХ ГАЗОВ С СУДОВ

*Вострикова Марина Александровна*

*канд. тех. наук, доцент Краснодарского государственного  
университета культуры и искусств,  
РФ, г. Краснодар*

*E-mail: [marishavostrikova@yandex.ru](mailto:marishavostrikova@yandex.ru)*

### TOPICAL ISSUES OF REDUCING AIR POLLUTION BY TOXIC COMPONENTS OF EXHAUST EMISSIONS FROM SHIPS

*Marina Vostrikova*

*candidate of Science, Associate Professor  
of Krasnodar State University of Culture and Arts,  
Russia, Krasnodar*

#### АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается остро стоящая проблема загрязнения атмосферы токсичными компонентами отработавших газов судовых энергетических установок. Приведена характеристика вредных выбросов и анализ влияния на окружающую среду.

#### ABSTRACT

The article deals with acute standing problem of toxic pollution exhaust gas components of ship power plants. The characteristic emissions and analysis of the impact on the environment.

**Ключевые слова:** морские суда; выбросы; токсичность.

**Keywords:** ships; emissions; toxicity.

Развитие судоходства на водных путях привело к строительству нового, современного флота с мощными энергетическими установками. Массовая эксплуатация такого флота сопровождается интенсивным ростом его воздействия на окружающую среду.

Один из важнейших компонентов общественного и экономического развития, поглощающий значительное количество ресурсов и оказывающий серьезное влияние на природную среду, является морской транспорт. Услуги морского транспорта играют важную роль в экономике и в жизни людей. При всей важности транспортного комплекса необходимо учитывать его весьма значительное негативное воздействие на природные экологические системы. Ежегодный рост морских судов влечет за собой увеличение объема сжигаемого ими топлива, а, следовательно, к большим выбросам токсичных компонентов с отработавшими газами.

Морские порты являются неорганизованными источниками загрязнения воздушного бассейна твердыми и газообразными веществами. Одним из важных показателей степени влияния вредных выбросов дизельных установок судов на окружающую природную среду является уровень их приземных концентраций в атмосферном воздухе в непосредственной близости к судовым фарватерам, местам скопления флота, портам. Интенсивность загрязнения атмосферного воздуха и эмиссия загрязняющих веществ зависят от объемов и видов основных перерабатываемых грузов, технологии их перегрузки (крановая, конвейерная). Результаты огромного количества исследований показывают, что содержание в воздушной среде оксида углерода, оксидов азота, оксидов серы превышает допустимые максимально-разовые концентрации для атмосферного воздуха. Это свидетельствует о существенном загрязнении воздуха морскими судами [3].

Огромную роль в загрязнении атмосферного воздуха играют дизели и котлы морских судов, которые до сих пор остаются наиболее эффективными в энергетическом смысле. Так, при сгорании дизельного топлива выделяется оксид углерода (II), оксиды азота, углеводороды, оксиды серы, альдегиды, сажа.

При работе судовых энергетических установок в атмосферный воздух выбрасываются выпускные газы главных двигателей и котлов морских судов, токсичность которых определяется как сортом топлива, так и условиями его сгорания. Применение тяжелых топлив, с высоким содержанием серы, способствует уменьшению эксплуатационных затрат на топливо, но при этом повышается загрязнение окружающей среды сернистым и серным ангидридом, увеличивается

износ и число отказов судовых энергетических установок. Отработавшие газы дизелей обладают достаточно высокой токсичностью из-за повышенного содержания оксидов азота, оксидов серы, сажи и альдегидов [2].

Выброс в атмосферу отработавших газов судовых энергетических установок является следствием и естественным условием функционирования двигателей внутреннего сгорания. По своей природе отработавшие газы дизелей представляют собой очень сложную смесь паров, газов, капель жидкостей и частиц. Отработавшие газы двигателей внутреннего сгорания содержат около 270 веществ, часть из которых является нетоксичными. При использовании углеводородных топлив нефтяного происхождения и атмосферного воздуха в качестве окислителя отработавшие газы дизельных и котельных установок состоят на 99,2 % из нетоксичных компонентов — продуктов неполного сгорания (диоксид углерода  $\text{CO}_2$  и водяной пар  $\text{H}_2\text{O}$ ) и воздуха с пониженным содержанием кислорода  $\text{O}_2$ .

Все токсичные компоненты, образующиеся в судовых дизелях и котлах, можно разделить на две группы. К первой группе относятся продукты неполного сгорания топлива — это монооксид углерода, углеводороды, альдегиды, сажа. Токсичные компоненты второй группы образуются в результате полного окисления химических элементов, входящих в состав топлива и воздуха — оксиды азота  $\text{NO}_x$  и серы  $\text{SO}_x$  [2].

Судовые дизели и котлы, которые находятся в эксплуатации, требуют постоянного поиска эффективных способов снижения токсичности отработавших газов, в первую очередь, выбросов оксидов серы.

Ущерб, который наносится живой природе атмосферными загрязнениями тяжело оценить. Однако, гибель лесов, загрязнение водных объектов, распространение аллергических заболеваний, нарушение биологического равновесия в экосистемах в большей степени связаны с высокими концентрациями агрессивных примесей в атмосфере. Некоторые компоненты отработавших газов судовых дизелей обладают сильными токсикологическими свойствами и могут вызывать тяжелые заболевания у людей. Это приводит к необходимости вводить строгие ограничения на их содержания в отработавших газах. Атмосферный воздух является основной средой деятельности биосферы. Однако по вине человечества ежегодно в атмосферу выбрасывается миллионы тонн оксидов азота, оксидов серы, сажа, соединения тяжелых металлов, водяной пар.

Таким образом, проанализировав состав отработавших газов, можно прийти к выводу, что присутствие сравнительно небольшого по объему, но опасного по воздействию количества вредных веществ, выбрасываемых с судов, оказывает значительное влияние на состояние здоровья человека и окружающую среду, особенно в крупных портовых центрах.

Существует достаточно технологий, которые снижают выбросы и токсичность компонентов отработавших газов морских судов, рассмотренных в данной статье. Наиболее известные и эффективные — мокрые методы, сухие методы, очистка топлива от серы, регулировка рабочих и режимных параметров. С их помощью можно добиться существенного снижения выбросов оксидов серы, оксидов азота, оксидов углерода в результате работы судовых энергетических установок.

Предварительная очистка топлива от соединений серы — технически эта технология освоена, но процедура очень дорогостоящая.

Топливоподготовка и регулировка режимных параметров — к этим методам (для транспортных систем) возможно отнести изменение конструктивных параметров (форма камеры сгорания, усовершенствование форсунки и др.), применение рециркуляции отходящих газов, использование различных катализаторов, применение водотопливных эмульсий.

Наиболее распространенный метод — *мокрый процесс*, когда уходящие газы, например, барботируют через раствор известняка, в результате чего образуются сульфит или сульфат кальция; к простейшим мокрым методам относятся абсорбция с помощью воды, а также более емких поглотителей органического происхождения (ксилидин, диметиланилин и др.) или водных растворов неорганических веществ (щелочи, аммиачная вода, известняковая и известковая пульпа и др.). Преимущества мокрых методов очистки заключается в их высокой эффективности, дешевизне реагентов, возможности одновременного улавливания летучей золы, относительно малых массогабаритных показателях установок. К мокрым методам относятся содово-электролитический, содово-сульфитный Шова-Денко, цитратный и метод Веллман-Лорд.

Также эффективен *метод использования скруббера*, который в значительной степени уменьшает выбросы оксидов серы. Этот способ основан на промывке газа жидкостью (обычно водой) при максимально развитой поверхности контакта жидкости

с частицами аэрозоля и возможно более интенсивном перемешивании очищаемого газа с жидкостью.

*Применение сухих методов очистки.* Процесс улавливания отходящих газов из продуктов сгорания твердыми сорбентами происходит за счет преимущественной ее адсорбции поверхностью сорбента. Поэтому, как величина, так и характер поверхности сорбентов играют важную роль при очистке газа сухими методами. К наиболее разработанным и перспективным методам очистки дымовых газов от оксидов серы, оксидов азота с применением углеродных сорбентов относятся методы Рейнлюфт, Бергбау-Форшунг и окисно-медный. В качестве сорбентов при сухих методах очистки применяются различные марки активированных углей, силикагели, синтетические смолы и другие. Процесс поглощения газов происходит на поверхности твердых сорбентов и сопровождается капиллярной конденсацией и химическими реакциями (хемосорбция). К сожалению, установки сухих методов очистки имеют большие массогабаритные показатели и более высокую удельную стоимость очистки.

Главными аппаратами, обеспечивающими эффективность работы схемы очистки дымовых газов от газообразных примесей при использовании мокрых методов, являются абсорберы, а сухих методов — адсорберы. Конструкции абсорберов весьма многообразны, однако, для очистки продуктов сгорания наиболее часто применяются абсорберы поверхностные, насадочные, барботажные (в том числе и с подвижной насадкой) и абсорберы (скрубберы) Вентури [1].

В результате использования технологий очистки, рассмотренных в данной статье, можно добиться радикального снижения выбросов.

### **Список литературы:**

1. Комплексная очистка дымовых газов теплогенерирующих установок. Монография. / Комиссаров К.Б., Лутков С.А., Филь А.В. Ростов н/Д.: Филиал ФГОУ ВПО «Морская государственная академия имени адмирала Ф.Ф. Ушакова» в г. Ростове-на-Дону, 2007. — 134 с.
2. Носков А.С. Технологические методы защиты атмосферы от вредных выбросов на предприятиях энергетики: Аналит. обзор / А.С. Носков, З.П. Пай / СО РАН. ГПНТБ, Ин-т катализа имени К.Б. Борескова; Отв. редактор чл.-кор. РАН В.Н. Парамон. Новосибирск, 1996. — 156 с.
3. Щавелев Д.В. Экологически безопасный судовый двигатель / Д.В. Щавелев // Всероссийская выставка научно-технического творчества молодежи / Сб. материалов. М.: ГАО ВВЦ, 2004. — С. 262—264.

# КАЧЕСТВО АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА И ДИНАМИКА ЕГО ИЗМЕНЕНИЯ НА ТЕРРИТОРИИ Г. НЕФТЕКАМСК

*Лыгин Сергей Александрович*

*канд. хим. наук, доцент Бирского филиала  
Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Бирск  
E-mail: [lygins@mail.ru](mailto:lygins@mail.ru)*

*Пурина Елена Сергеевна*

*канд. биол. наук, старший преподаватель Бирского филиала  
Башкирского государственного университета,  
РФ, г. Бирск  
E-mail: [lygins@mail.ru](mailto:lygins@mail.ru)*

## AIR QUALITY AND DYNAMICS OF ITS CHANGES ON THE TERRITORY OF NEFTEKAMSK

*Sergei Lygin*

*candidate of chemical sciences, associate professor  
Birsk branch of Bashkir State University,  
Russia, Birsk*

*Elena Purina*

*candidate of biological sciences, senior lecturer,  
Birsk branch of Bashkir State University,  
Russia, Birsk*

### АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается вопрос оценки степени загрязненности воздушного бассейна г. Нефтекамск Республики Башкортостан. В работе дана характеристика экологического состояния г. Нефтекамск, исследовано качество атмосферного воздуха и его динамика на территории города.

В работе использовалось такое оборудование как электроаспиратор — ТУ 25-11-1414-78. Для определения оксидов использовался экспресс-метод, а также фотометрический и другие

методы. Определена концентрация загрязняющих веществ на исследуемых участках г. Нефтекамск.

#### ABSTRACT

The article discusses the assessment of air pollution in Neftekamsk, Republic of Bashkortostan. In this paper, the environmental situation of Neftekamsk are described, the air quality and its dynamics in the city are studied.

The paper used equipment such as elektroaspirator — TU 25-11-1414-78. To determine the oxides the express-method is used, as well as photometric and other methods. The concentration of pollutants at the key points in Neftekamsk is determined.

**Ключевые слова:** загрязнение атмосферы; экология; оксид азота (IV); угарный газ (CO); диоксид серы (SO<sub>2</sub>); аммиак (NH<sub>3</sub>).

**Keywords:** atmospheric pollution; ecology; nitrogen oxide (IV); carbon monoxide(CO); sulfur dioxide(SO<sub>2</sub>); ammonia (NH<sub>3</sub>).

По численности и производству промышленной продукции Нефтекамск — четвертый город Республики Башкортостан после Уфы, Стерлитамака и Салавата, располагающийся на северо-западе республики, в 220 км от столицы республики — Уфа, вблизи многоводной реки Кама. Город занимает территорию 147,25 км<sup>2</sup>, с населением более 131 тысячи жителей 49 национальностей со средним возрастом — 36 лет. Через город проходит развитая сеть автомобильных дорог: Уфа-Янаул; Самара-Уфа, а так же Нефтекамск связан с такими городами как: Бирск, Янаул, Агидель, Октябрьский, Ижевск, Казань и Пермь. Ближайшей узловой железнодорожной станцией, расположенной в 50 километрах от города, является Янаул [1].

В Нефтекамске развита многоотраслевая промышленность: машиностроение и металлообработка, легкая и пищевая, топливная и электроэнергетика, деревообработка и др. Динамично развиваются строительство, потребительский рынок, малое и среднее предпринимательство [5].

Устойчивое развитие, высокое качество жизни, здоровье и безопасность населения могут быть обеспечены только при условии сохранения природных систем, благоприятной окружающей среды.

Целью исследования является оценка степени загрязненности воздушного бассейна г. Нефтекамск.

Для реализации данной цели были поставлены следующие задачи:

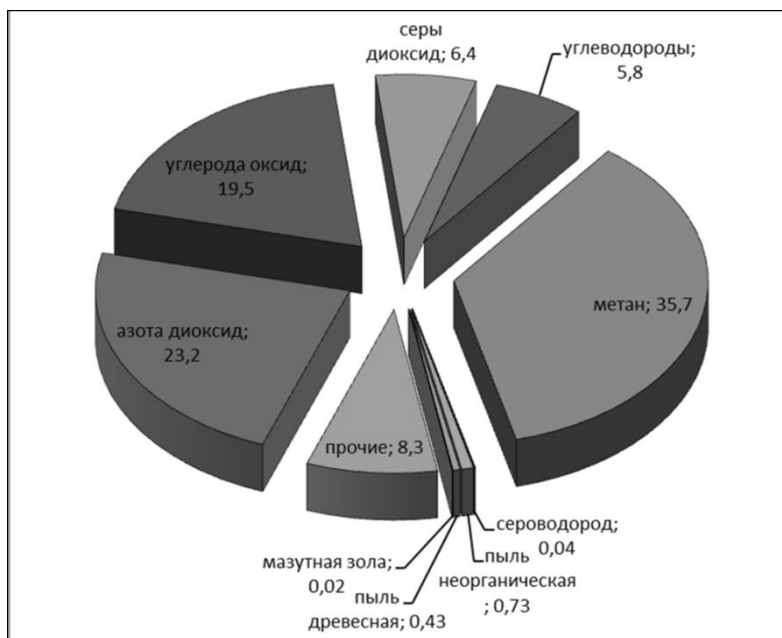
1. дать характеристику экологического состояния г. Нефтекамск, исследовать качество атмосферного воздуха и динамику его изменения на территории города;

2. изучить методы исследования атмосферного воздуха на наличие таких загрязняющих веществ как оксид азота (IV), оксид серы (IV), оксид углерода (II), аммиак, пыль (твердые частицы);

3. определить концентрацию загрязняющих веществ на исследуемых участках г. Нефтекамск.

В силу объективных и субъективных причин сегодня самой уязвимой природной средой является атмосферный воздух. Обострение экологического состояния атмосферного воздуха происходит на фоне высокой степени изношенности основных и природоохранных фондов предприятий. Наряду с этим значительный вклад в загрязнение атмосферного воздуха вносит автомобильный транспорт.

Валовые выбросы загрязняющих веществ в атмосферу за 2001—2010 гг. от стационарных и передвижных источников на территории г. Нефтекамск представлены на рисунке 1 [1—5].



**Рисунок 1. Вклад основных ингредиентов в загрязнение атмосферного воздуха (%)**

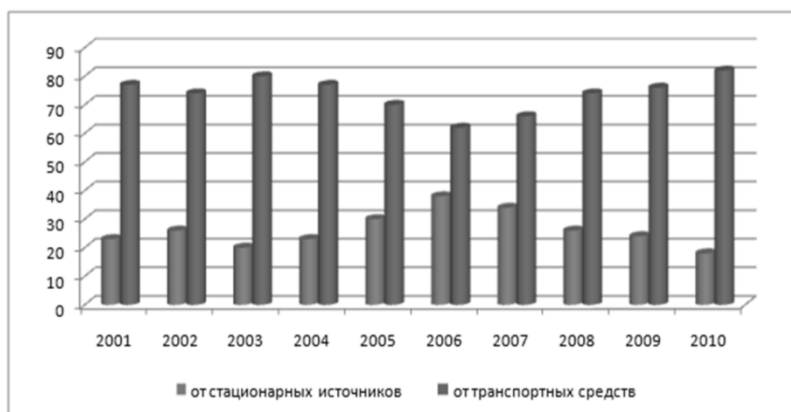


В составе выбрасываемых в атмосферный воздух веществ преобладают: метан ( $\text{CH}_4$ ), диоксид азота ( $\text{NO}_2$ ) и оксид углерода ( $\text{CO}$ ). Наименьший вклад в общий объем выбросов вносят мазутная смола, сероводород ( $\text{H}_2\text{S}$ ), пыль неорганическая и древесная.

Среди проблем качества атмосферного воздуха одной из наиболее актуальных остается проблема загрязнения выхлопными газами автомобильного транспорта.

Доля стационарных источников падает, а передвижных загрязняющих веществ в атмосферу в г. Нефтекамск — из года в год всё более возрастает (рис. 2) [1—5].

В связи с тем, что в настоящее время наблюдается рост числа транспортных средств, одним из путей решения проблемы по выбросу загрязняющих веществ в окружающую среду может быть ужесточение нормативных показателей на топливо и содержание вредных веществ в выхлопных газах.



**Рисунок 2. Доля вклада стационарных и передвижных источников в загрязнение атмосферного воздуха по годам (%)**

Исследования проводились на базе Нефтекамского подразделения Государственного учреждения Управление государственного аналитического контроля (ГУ УГАК) Министерства экологии и природопользования Республики Башкортостан.

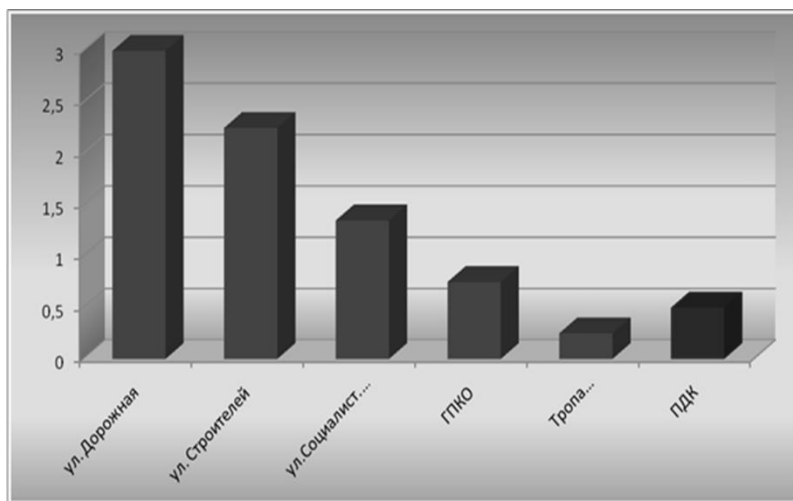
Забор воздуха производился с использованием электроаспиратора — ТУ 25-11-1414-78. Для определения оксида азота (IV) и оксида углерода (II) использовался экспресс-метод с применением

газоанализатора Анкат 7654-01, а также применялся фотометрический и другие методы.

Проведен лабораторный анализ отобранных проб воздуха на наличие пыли в атмосферной среде г. Нефтекамск. Результаты исследования представлены на рис. 3.

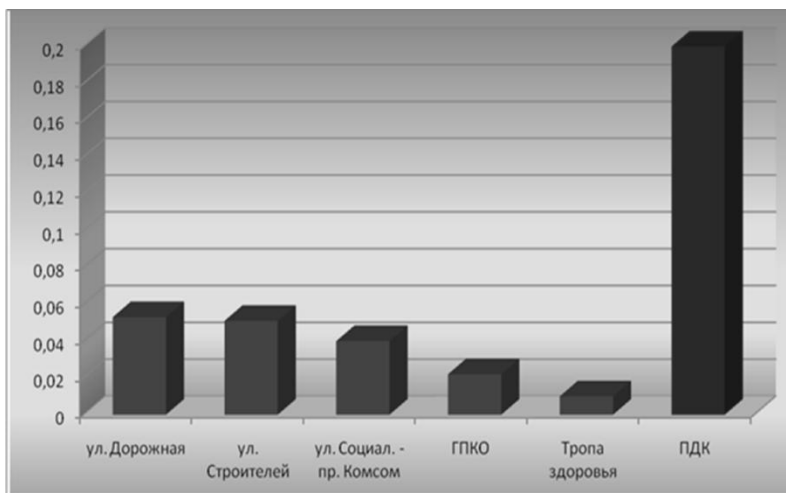
Как можно видеть из рис. 3, повышенная концентрация пыли в воздушной среде города была обнаружена на всех исследуемых участках с превышением ПДК, кроме Тропы здоровья — там показатели меньше ПДК практически в 2 раза. Достаточно низкие показатели были получены в Городском парке культуры и отдыха —  $0,75 \text{ мг/м}^3$  и на Тропе здоровья —  $0,25 \text{ мг/м}^3$ .

Таким образом, содержание исследуемого загрязнителя в воздухе колебалось в пределах от  $0,25$  до  $3 \text{ мг/м}^3$ .



**Рисунок 3. Содержание пыли в атмосферном воздухе ( $\text{мг/м}^3$ )**

ПДК для аммиака составляет  $0,2 \text{ мг/м}^3$ . Порогового превышения ПДК не наблюдалось ни на одном исследуемом участке (рис. 4).



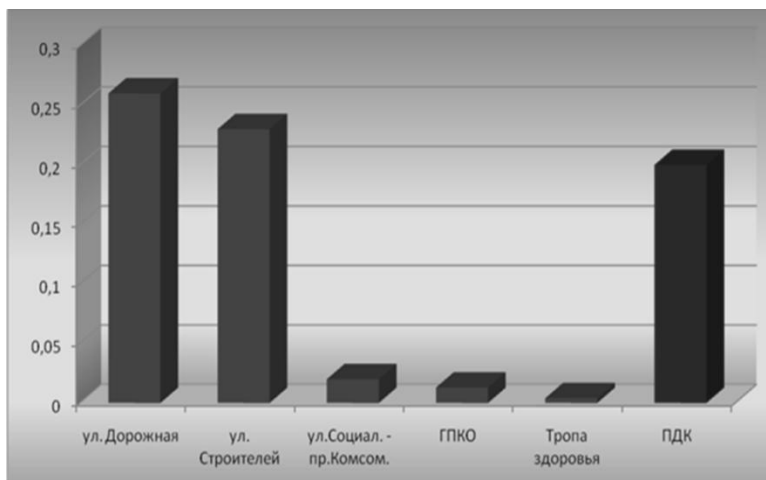
**Рисунок 4. Содержание аммиака в атмосферном воздухе (мг/м³)**

Степень загрязнения аммиаком на ул. Дорожная равна 0,053 мг/м³, на ул. Строителей составила 0,051 мг/м³. Чуть меньше обнаружено на пересечении улиц Социалистическая и Комсомольская — 0,04 мг/м³, в Городском парке культуры и отдыха (ГПКО) — 0,022 мг/м³, на Тропе здоровья среднее значение концентрации этого газа равно 0,01 мг/м³ (рис. 4).

Значение ПДК для диоксида азота, равно 0,2 мг/м³. Результаты проделанных анализов демонстрируют, что показатели данного загрязнителя превысили ПДК на двух участках (рис. 5).

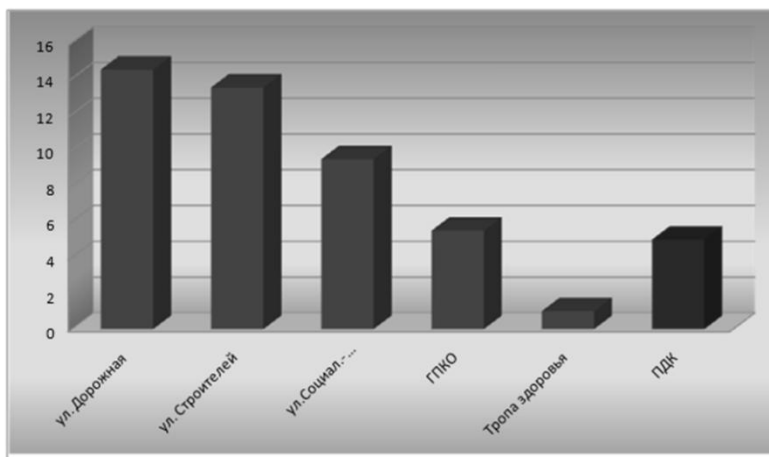
Наибольшая степень загрязнения диоксидом азота характерна для ул. Дорожная и ул. Строителей — 0,26 мг/м³ и 0,23 мг/м³ соответственно, а наименьшая — для Тропы здоровья — 0,004 мг/м³.

Соединения углерода являются наиболее распространенными веществами, поступающими в атмосферу в результате сжигания и переработки органического топлива. Особенно высокая концентрация угарного газа в воздухе наблюдается на перекрестках больших автомагистралей при скоплении автотранспорта, а также на улицах с интенсивным движением.



**Рисунок 5. Содержание диоксида азота в атмосферном воздухе (мг/м³)**

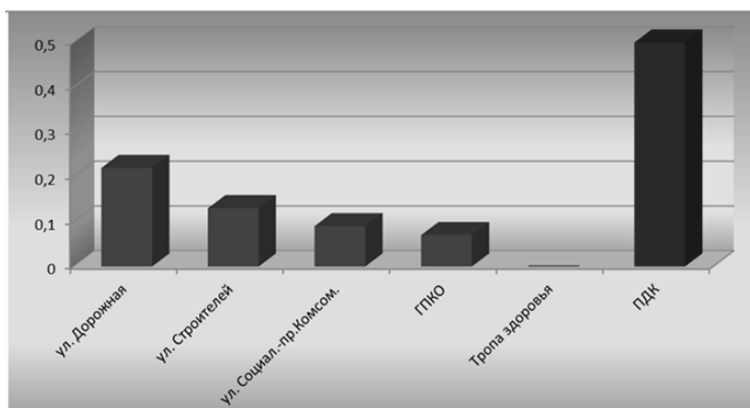
Результаты исследований по выявлению оксида углерода в атмосферном воздухе г. Нефтекамск показали, что концентрации данного загрязнителя на четырех участках превышают значение ПДК — 5 мг/м³ (рис. 6).



**Рисунок 6. Содержание оксида углерода в атмосферном воздухе (мг/м³)**

Наиболее высокое содержание  $\text{SO}_2$  наблюдалось на ул. Дорожная (район автовокзала «Южный») и ул. Строителей (район автовокзала), концентрация анализируемого вещества была равна  $14,5 \text{ мг/м}^3$  и  $13,5 \text{ мг/м}^3$  соответственно. На перекрестке ул. Социалистическая — пр. Комсомольский данный показатель равен  $9,5 \text{ мг/м}^3$ , а на территории Городского парка культуры и отдыха —  $5,5 \text{ мг/м}^3$ . Лишь на Тропе здоровья концентрация загрязнителя не превысила значение ПДК и составила  $1,0 \text{ мг/м}^3$ .

По 4-балльной шкале опасности оксид серы относится к третьему классу токсикантов. Значение ПДК для него равно  $0,5 \text{ мг/м}^3$ . Как свидетельствуют полученные в ходе лабораторного анализа данные, показатели концентраций загрязнителя ни на одном из исследуемых участков не превышают установленные нормы (рис. 7).



**Рисунок 7. Содержание двуокиси серы в атмосферном воздухе**

Так, на ул. Дорожная концентрация  $\text{SO}_2$  равна  $0,22 \text{ мг/м}^3$ , на ул. Строителей —  $0,13 \text{ мг/м}^3$ , на пересечении улиц Социалистическая и Комсомольская —  $0,09 \text{ мг/м}^3$ , а на территории Городского парка культуры и отдыха —  $0,07 \text{ мг/м}^3$ . Только на Тропе здоровья, выбранной в качестве контрольной точки, содержание в атмосферном воздухе диоксида серы практически не выявлено.

С целью получения полной картины об экологическом состоянии г. Нефтекамск, необходимо провести контроль воздуха, используя методику [6]. Также, в связи с увеличением числа транспортных средств, возможно и загрязнение почвы тяжелыми металлами за счет выхлопных газов. Определение тяжелых металлов по методике [7] позволит определить их влияние на живой организм.

В результате проведенного эксперимента было установлено, что:

- повышенная концентрация пыли в воздушной среде города была обнаружена на всех исследуемых участках, кроме контрольного, причем на всех участках было выявлено превышение ПДК;
- показатели концентрации аммиака ни на одном из участков не превысили ПДК;
- показатели концентрации диоксида азота превысили ПДК на двух участках;
- концентрации оксида углерода на четырех участках превысили значение ПДК —  $5 \text{ мг/м}^3$ ;
- показатели концентраций диоксида серы ни на одном из исследуемых участков не превысили ПДК, а на Тропе здоровья, выбранной в качестве контрольной точки, содержание диоксида серы практически не выявлено;
- экологическая обстановка в г. Нефтекамск остается стабильной и не вызывает тревог. Основным источником загрязнения воздушного бассейна города является автомобильный транспорт, нагрузка со стороны которого возрастает. Тогда как валовые выбросы от стационарных источников с каждым годом уменьшаются.

### Список литературы:

1. Доклад о состоянии природных ресурсов и окружающую среду в северо-западном регионе Республики Башкортостан в 2006 году. Нефтекамск, 2007. — 100 с.
2. Доклад о состоянии природных ресурсов и окружающую среду в северо-западном регионе Республики Башкортостан в 2007 году. Нефтекамск, 2008. — 105 с.
3. Доклад о состоянии природных ресурсов и окружающую среду в северо-западном регионе Республики Башкортостан в 2008 году. Нефтекамск, 2009. — 115 с.
4. Доклад о состоянии природных ресурсов и окружающую среду в северо-западном регионе Республики Башкортостан в 2009 году. Нефтекамск, 2010. — 97 с.
5. Доклад о состоянии природных ресурсов и окружающую среду в северо-западном регионе Республики Башкортостан в 2010 году. Нефтекамск, 2011. — 103 с.
6. Лыгин С.А., Гатиятова Г.Ф., Лыгина Р.И. Практико-ориентированный проект «Лихеноиндикация как метод контроля чистоты воздуха» // Химия в школе. — 2012. — № 4. — С. 60—63.
7. Лыгин С.А., Пурина Е.С., Имаева Т.В. Практико-ориентированный проект «Влияние солей тяжелых металлов на живой организм» // Химия в школе. — 2013. — № 3. — С. 55—58.

## СЕКЦИЯ 5.

### НАУКИ О ЗЕМЛЕ

#### 5.1. ГЕОЭКОЛОГИЯ

#### ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ ГОРОДСКИХ АКВАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИОИНДИКАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

*Фатнева Елена Алексеевна*

*канд. геогр. наук, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин  
Белгородского университета кооперации, экономики и права,*

*РФ, г. Белгород*

*E-mail: [fatnevaea@mail.ru](mailto:fatnevaea@mail.ru)*

#### GEOECOLOGICAL MONITORING OF URBAN WATER COMPLEXES BY USING METHODS OF BIOINDICATION

*Elena Fatneva*

*candidate of Geographical Science, assistant professor of natural sciences,  
Belgorod University of Cooperation, Economics and Law,  
Russia, Belgorod*

#### АННОТАЦИЯ

Объект исследования послужила река Везелка, ее бассейн и качество воды. Цель работы заключалась в оценке состояния реки Везелки с помощью биоиндикации. Основные методы: полевое обследование, картографический метод, химико-аналитические методы, биотестирование. Уровень сапробности показал, что антропогенная нагрузка превосходит самоочистительные возможности реки.

## ABSTRACT

Object of study served Vezelka river, a river basin and water quality. The purpose of this work was to assess the state of the river Vezelka using bioindication. Main methods: a field survey, mapping method, chemical analytical methods, biotesting. Level saprobity demonstrated that the anthropogenic load exceeds the self-cleaning capability of the river.

**Ключевые слова:** геоэкология; малые реки; водные ресурсы; биоиндикация.

**Keywords:** geocology; small rivers, water resources; bioindication.

Обострение экологических проблем в городах обычно связано с недооценкой роли средозащитных зон. Когда границы между зонами градостроительного освоения и средозащитными зонами размываются, происходит увеличение антропогенной нагрузки на природные комплексы городов. Помимо зеленых зон, средозащитные функции выполняют аквальные и субаквальные комплексы, обеспечивающие непрерывность средозащитной зоны. Водоемы, как известно, играют важную роль в формировании ландшафта города. Они уменьшают загрязненность воздуха пылью и промышленными газами, влияют на ветровой режим города, повышают влажность и усиливают вертикальную циркуляцию воздуха [1, с. 211].

Кроме того, эти комплексы зачастую являются местами массового отдыха горожан и подвергаются рекреационной нагрузке [3, с. 72]. Постоянный мониторинг этих объектов необходим для обоснования проектов по реконструкции пойменно-русловой части городских рек и разработки программ по экологическому оздоровлению их бассейнов.

Белгород расположен на водоразделе между короткими верховьями притоков Днепра и Дона и речные долины являются характерными формами рельефа. Они сформировались в основном еще в доледниковое время, но позднее, в четвертичном периоде, испытывали ряд последовательных омоложений. Наличие нескольких террас на их склонах — явное тому подтверждение. Наиболее молодые из них — пойменные террасы. В широких долинах террасы широкие, а поверхность равнинная. В геоморфологическом отношении город Белгород располагается в пределах долины р. Северский Донец и ее притоков. В долине реки выделяются первая и вторая аккумулятивные, третья и четвертая цокольные террасы.

Планировочная структура г. Белгорода во многом определяется городскими реками [4, с. 233]. Хотя Северский Донец и Везелка —



реки совершенно разного калибра: одна считается крупнейшей рекой СНГ (с длиной более 1000 км) другая — типичная малая река длиной всего 27,4 км, главной городской рекой можно считать все же Везелку. Везелка (Болховец), рассекая г. Белгород на две части, является основной городской рекой: на ее водосбор приходится 55 % городских территорий с соответствующим экологическим воздействием. Из общей длины реки в границах города находится 10-километровый участок низовья (9,75 км).

Основной задачей геоэкологического мониторинга аквальных комплексов г. Белгорода является изучение населяющих пресноводные экосистемы организмов [2, с. 302]. При этом нами используется характеристика их состояния для биологической индикации качества поверхностных вод. Как известно, гидробиоценозы образуют систему биологического самоочищения водоемов, поэтому необходимо знать особенности жизнедеятельности этой системы в условиях различного уровня антропогенного воздействия.

Насколько водоем чист или загрязнен можно определить на основании сведений о видовом составе обитающих в нем гидробионтов. Организмы в этом случае выступают биоиндикаторами состояния водоемов. Причем для анализа важен не только факт нахождения или отсутствия гидробионтов в водоеме, но и степень их количественной представленности: чем больше в водоеме гидробионтов и чем интенсивнее их метаболизм, тем больше органического вещества подвергается биологическому окислению и энергичнее идет процесс очищения водоемов. Видовое разнообразие также является критерием стабильности и важной характеристикой экосистемы.

Гидробиологическими исследованиями установлено, что существуют группы водных организмов, приспособившиеся к существованию только в условиях определенного уровня загрязненности или сапробности водоемов. Все эти особенности гидробиоценозов используется для биоиндикации качества воды и состояния пресноводных водоемов.

В период июль-август (летняя межень) 2013 г. проводилась биоиндикация уровня сапробности (содержания в воде разлагающихся органических веществ) в следующих пунктах: 1 — х. Сумской; 2 — с. Стрелецкое; 3 — г. Белгород, р-н АРЗ; 4 — г. Белгород, р-н путепровода ул. Б. Хмельницкого-Щорса; 100 м до впадения в р. Северский Донец. Кроме того, были взяты пробы по руслу р. Гостенка: 6 — пруд у пос. Комсомolec; 7 — р-н пересечения с объездной дорогой (на Комсомolec); 8 — р-н железнодорожной

платформы «Красное»; 9 — р-н пересечения с железнодорожной веткой на Готню.

Полученные результаты сравнивались с результатами химического анализа реки (в её устье), проводимого в июне и августе 2013 года.

В целом видовая насыщенность животных в пробах нарастала от 1-й пробы к 3-й, а далее убывала. Численное обилие животных в пробах увеличивалось во 2-й, 4 и 5-ой пробах — прежде всего за счет видов, относящихся ко II-III-III классам. В условиях маловодности и, соответственно, повышенной концентрации органических веществ в воде во всех пробах преобладали виды, приуроченные к  $\alpha$ - и  $\beta$ -мезосапробным классам загрязненности, а в 4 и 5 пробах — и к полисапробному классу. Неполнота представленности индикаторных групп на участке АРЗ — Северский Донец предположительно связана с поступлением в реку токсичных веществ.

По результатам анализа воды р. Везёлка класс качества воды в июне оценивался как 5, а в августе класс качества воды изменился до 4. ПДК, установленные для рыбохозяйственных водоёмов, по таким показателям как медь, железо общее, нефтепродукты превышены в 1,5—2 раза. Кроме того, в речной воде установлено повышенное содержание сульфатов и нитритного азота.

#### **Выводы:**

1. Данные биотестирования и химического анализа хорошо коррелируют друг с другом. Проведённая работа позволяет использовать выделенные организмы как биоиндикаторы уровня загрязнённости вод р. Везелка. Уровень сапробности показал, что антропогенная нагрузка превосходит самоочистительные возможности реки.

2. В пределах города Белгорода для 10-километрового участка устьевой зоны Везелки следует ввести специальный режим на территории водоохраных зон (шириной не менее 100 м по обоим берегам) с комплексом природоохраных мер по улучшению гидрологического, гидрохимического, гидробиологического, санитарного и экологического состояния реки и благоустройству ее прибрежных территорий. Целесообразно границы водоохраных зон закрепить в генеральном плане города.

3. В прибрежных защитных полосах реки (шириной 35—55 м), используемых в городской черте как рекреационные зоны, следует организовать систематические санитарные мероприятия (уборку мусора, установку мусоросборников, подсев многолетних трав и др.).

4. Качество речной воды по уровню загрязненности (особенно по таким поллютантам, как медь, общее железо, нефтепродукты,

нитратного и нитритного азота) ставит задачу определения виновников складывающегося экологического неблагополучия. Для этого целесообразно организовать систематический геоэкологический мониторинг всех источников поступления сточных вод.

### **Список литературы:**

1. Фатнева Е.А. Геоэкологическая диагностика средозащитной зоны города Белгорода // *Естественные и технические науки*. — № 1. — 2009. — С. 209—213.
2. Фатнева Е.А. Геоэкологическое зонирование территории г. Белгорода // *Материалы IV Всероссийской конференции с международным участием «Научное творчество XXI века»*. Приложение к журналу «В мире научных открытий». Красноярск, — 2011. — Вып. 1. — С. 301—302.
3. Фатнева Е.А. Экологические проблемы рекреационных территорий и пути их решения // *Современные исследования социальных проблем*. Красноярск, — 2011. — № 4(08). — С. 69—74.
4. Удянская Е.А. Оценка различных зон г. Белгорода по экологической комфортности методом биодиагностики // *Сборник докладов Международной конференции «Экология — образование, наука и промышленность»*. Белгород, 2002. — С. 232—236.

*ДЛЯ ЗАМЕТОК*

**Научное издание**

**«ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ»**

Сборник статей по материалам  
XV международной научно-практической конференции

№ 2 (14)  
Февраль 2014 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 11.02.14. Формат бумаги 60x84/16.  
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 13,75. Тираж 550 экз.

Издательство «СибАК»  
630075, г. Новосибирск, Залесского 5/1, оф. 605  
E-mail: mail@sibac.info

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного  
оригинал-макета в типографии «Allprint»  
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3